

[1] 剛体のつり合い (摩擦なし)

#13力学演習

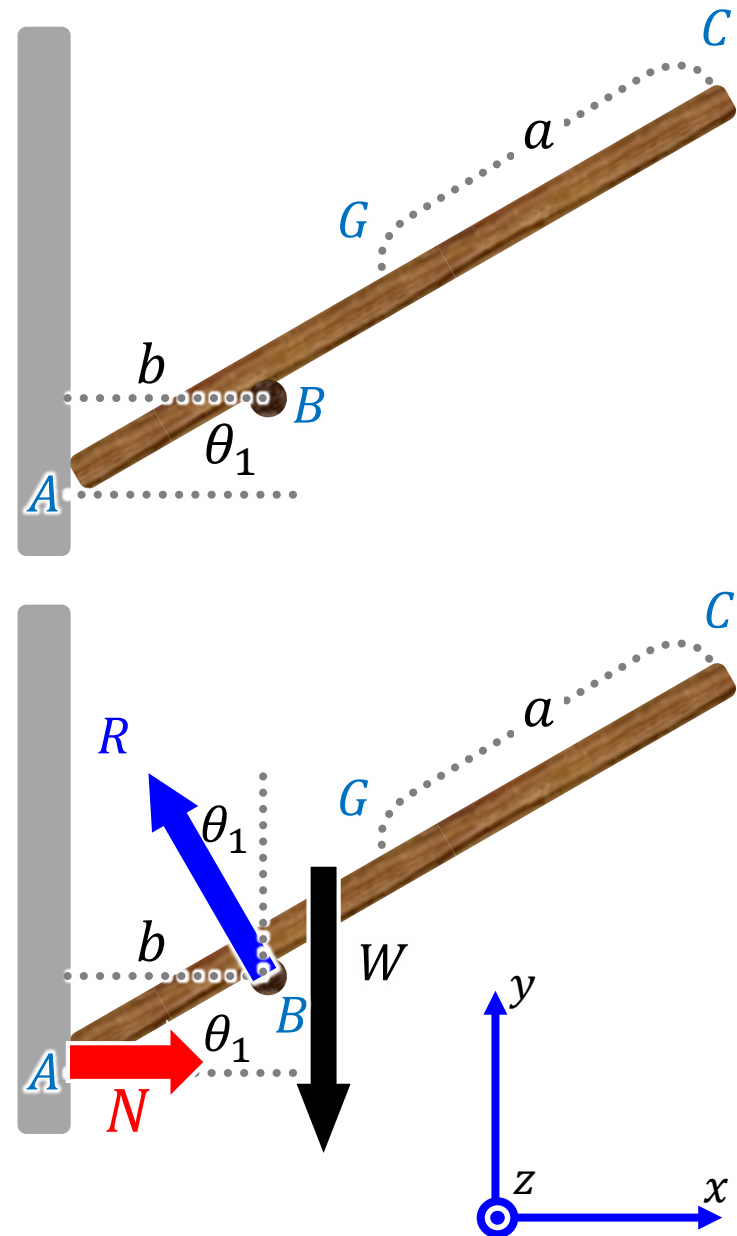
長さ $2a$ 、質量 M の一様な棒が図のように、一端を滑らかな鉛直壁に接し、壁の前 b の距離にある滑らかな水平釘に支えられ、つり合っている。以下の問に答えよ。

- (1) 棒にはたらく重力を $W = Mg$ 、
釘の抗力を R 、
壁と棒の間にはたらく垂直抗力を N 、
棒が水平面となす角を θ_1 とするとき、
剛体のつり合いの条件 $\sum_n \mathbf{F}_i = 0$ より
力のつり合いの式を示せ。

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta_1 \\ R \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \text{成分:} \quad N - R \sin \theta_1 = 0$$

$$y \text{成分:} \quad -Mg + R \cos \theta_1 = 0$$



(2) 剛体のつり合いの条件 $\sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ より A のまわりのつり合いの式を示せ。

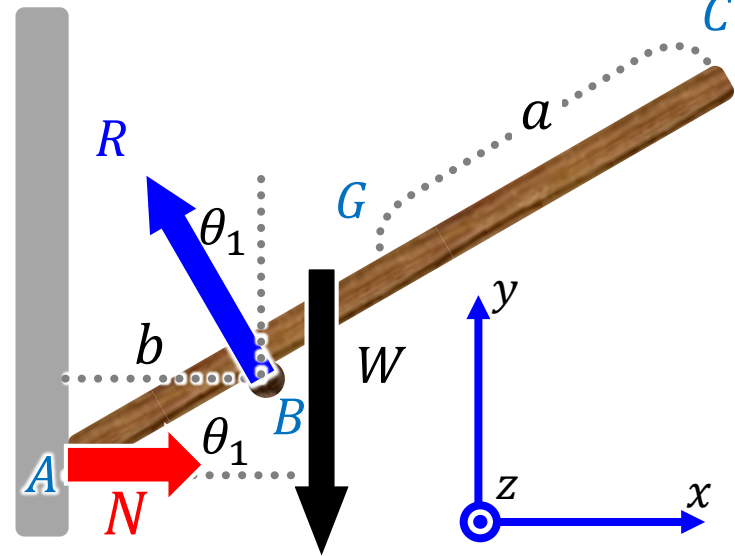
$$\overrightarrow{AB} = \frac{b}{\cos \theta_1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AG} = a \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{R} + \overrightarrow{AG} \times \mathbf{W}$$

$$= \frac{b}{\cos \theta_1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -R \sin \theta_1 & R \cos \theta_1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b}{\cos \theta_1} (R \cos^2 \theta_1 + R \sin^2 \theta_1) \mathbf{e}_z - Mga \cos \theta_1 \mathbf{e}_z$$

$$\therefore \frac{Rb}{\cos \theta_1} - Mga \cos \theta_1 = 0$$



(3) 以上3式から R および N の大きさをもとめよ。

$$R = \frac{Mg}{\cos \theta_1} \quad N = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} Mg = \underline{Mg \tan \theta_1}$$

(4) つりあっているときの θ_1 を求めよ。

$$\frac{b}{\cos^2 \theta} Mg - Mga \cos \theta_1 = 0$$

$$\cos^3 \theta_1 = \frac{b}{a}$$

$$\cos \theta_1 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$\therefore \theta_1 = \cos^{-1} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

(5) つりあいが保たれる θ_1 の範囲を求めよ。

$$-1 < \sqrt[3]{\frac{b}{a}} < 1$$

$a > 0, b > 0$ より

$$0 < \sqrt[3]{\frac{b}{a}} < 1$$

よって、

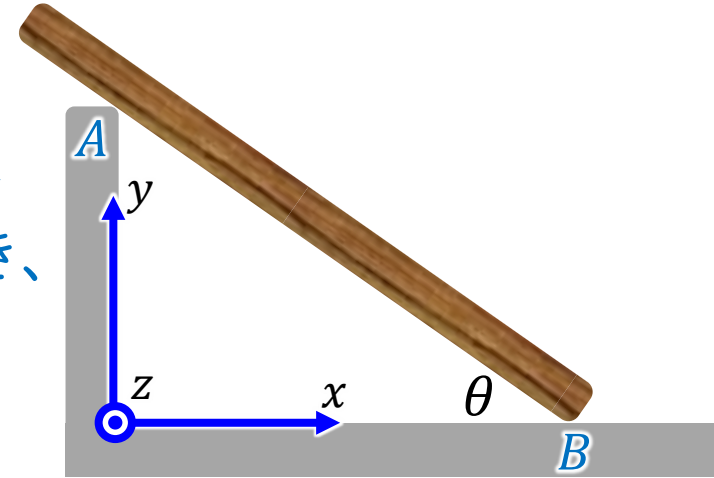
$$\underline{0 < b < a}$$

$a < b$ となると棒は釘の内側に落ちる

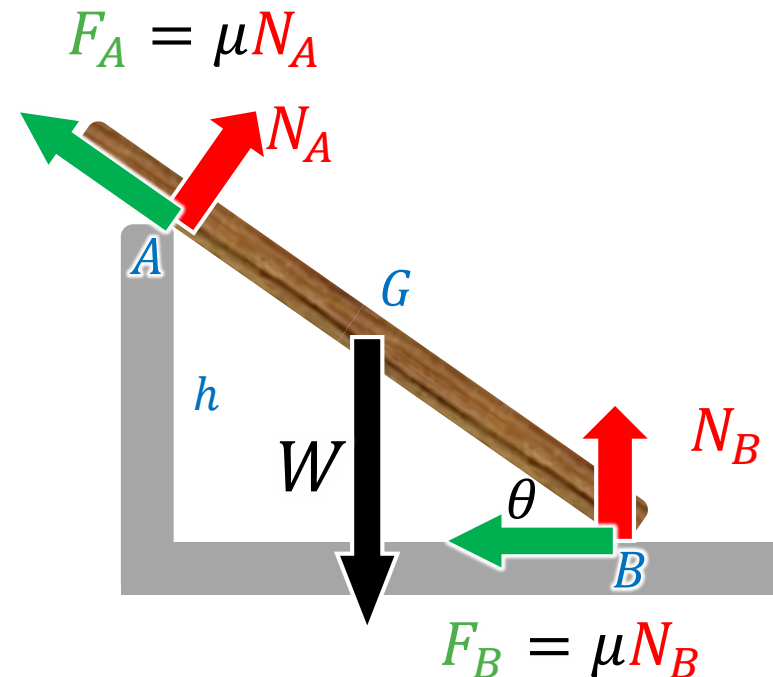
[2] 剛体のつり合い (摩擦あり)

#13 力学演習

長さ $2l$ 、質量 M の一様な棒が図のように、水平面と高さ h の鉛直壁の上の滑らかな角にかかっている。壁及び床と棒との間の摩擦係数を μ とする。座標を右図のようにとるとき、以下の問に答えよ。



- (1) 棒にはたらく力を図に示せ。
ただし、重力を W 、
壁と棒の間にはたらく
垂直抗力と摩擦力をそれぞれ N_A 、 F_A 、
床と棒の間にはたらく
垂直抗力と摩擦力をそれぞれ N_B 、 F_B
とする。



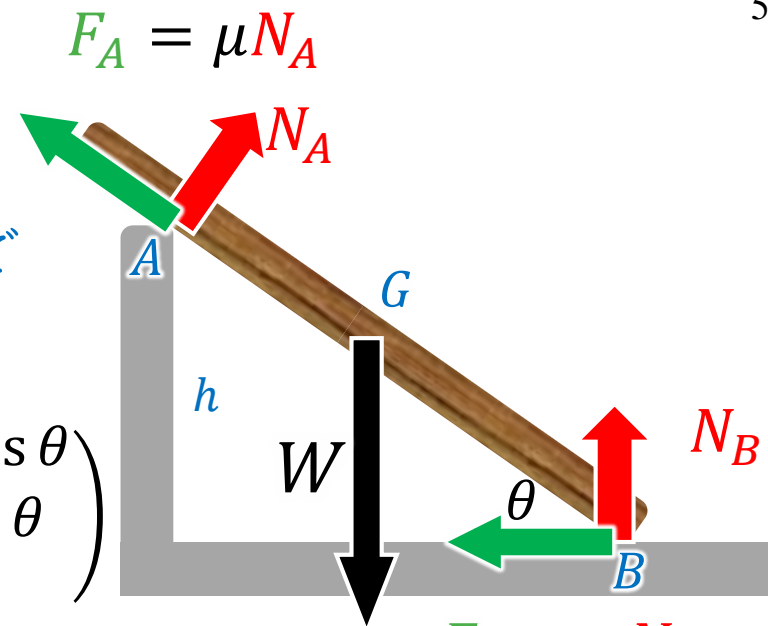
(2) 棒にはたらく重力をベクトル表示で

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかくとき、 N_A 、 F_A 、 N_B 、 F_B をベクトル表示で表わせ。ただし、 F_A 、 F_B は N_A 、 N_B および μ を用いて表すこと

$$N_A = \begin{pmatrix} N_A \sin \theta \\ N_A \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_A = \mu N_A = \begin{pmatrix} -\mu N_A \cos \theta \\ \mu N_A \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_B = \begin{pmatrix} 0 \\ N_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_B = \mu N_B = \begin{pmatrix} -\mu N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



(3) 剛体のつり合いの条件 $\sum_n \mathbf{F}_i = 0$ より力のつり合いの式を示せ。

$$x \text{成分: } N_A \sin \theta - \mu N_A \cos \theta - \mu N_B = 0$$

$$y \text{成分: } N_A \cos \theta + \mu N_A \sin \theta + N_B - Mg = 0$$

(4) (3)の結果から $\frac{Mg}{N_A}$ を求めよ。

$$x \text{成分の式より } N_B = N_A \left(\frac{1}{\mu} \sin \theta - \cos \theta \right)$$

y成分の式に代入して
$$N_A \left(\frac{1}{\mu} \sin \theta - \cos \theta \right) + N_A \cos \theta + \mu N_A \sin \theta = Mg$$

$$\frac{Mg}{N_A} = \underline{\left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) \sin \theta}$$

(5) 剛体のつり合いの条件 $\sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ より B のまわりのつり合いの式を示せ。

$$\overrightarrow{BA} = \frac{h}{\sin \theta} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ +\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BG} = l \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ +\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \overrightarrow{BA} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{BG} \times \mathbf{W} \\ &= \frac{h}{\sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \theta & +\sin \theta & 0 \\ N_2 \sin \theta & N_2 \cos \theta & 0 \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \theta & +\sin \theta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{\sin \theta} (-N_2 \cos^2 \theta - N_2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_z + Mgl \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\underline{-\frac{N_2 h}{\sin \theta} + Mgl \cos \theta = 0}$$

(6) (5)の結果から $\frac{Mg}{N_A}$ を求めよ。

$$\frac{N_A h}{\sin \theta} = Mgl \cos \theta$$

$$\frac{Mg}{N_A} = \frac{h}{l \cos \theta \sin \theta}$$

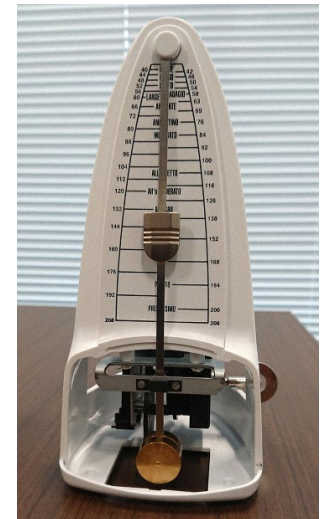
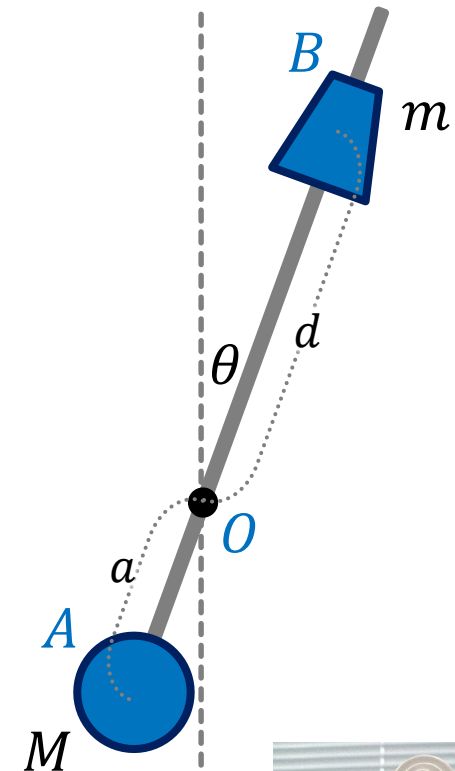
(7) (4)と(6)の結果から、 $\cos \theta \sin^2 \theta$ を求めよ。

$$\frac{Mg}{N_A} = \left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) \sin \theta = \frac{h}{l \cos \theta \sin \theta}$$

$$\cos \theta \sin^2 \theta = \frac{\mu h}{l(1 + \mu^2)}$$

[3] 剛体の平面運動 (メトロノーム) #13力学演習

図のように、質量の無視できる長さ l の細い棒が、点 O のまわりに鉛直面内で摩擦なく回転できるものとする。この棒の点 O から下方に距離 a の位置に、質量 M の固定されたおもり A が取り付けられている。また、点 O から上方に距離 d ($0 < d < l - a$) の位置に、質量 m の可動式のおもり B が取り付けられている。鉛直上向きからの傾き角を θ とする。



- (1) この剛体全体 (棒、おもり A 、 B) の慣性モーメント I を求めよ。ただし、2つのおもりを質点として扱ってよい。

$$I = \underline{Ma^2 + md^2}$$

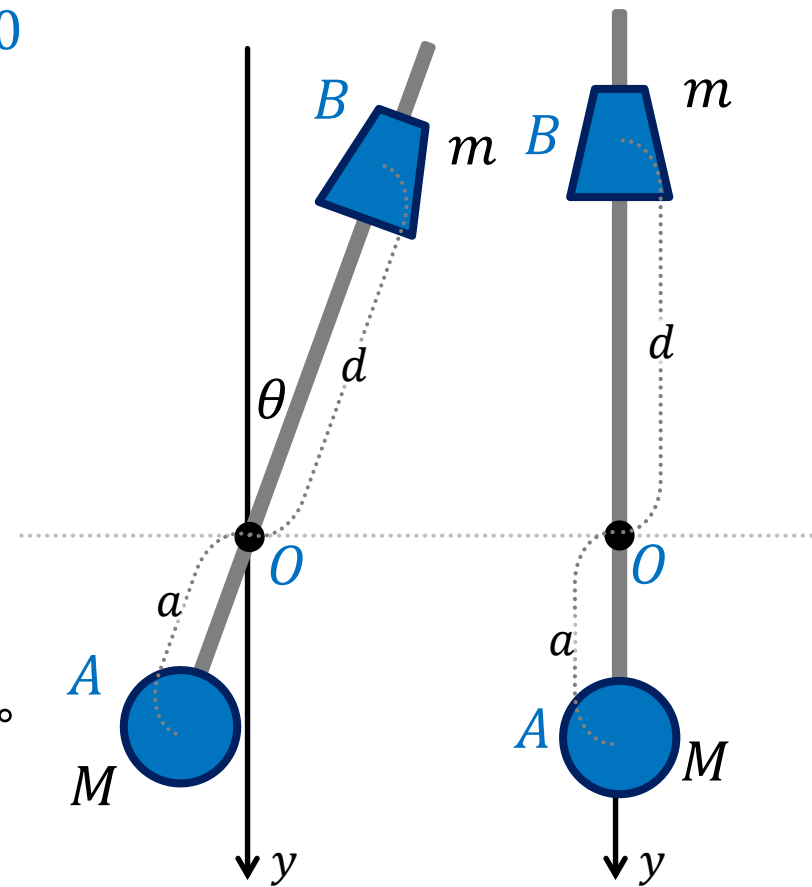
- (2) 点 O を原点とし、鉛直下向きを正とする軸を y 軸とする。この剛体系の重心の $\theta = 0$ での座標 y_G を求めよ。
 また、このメトロノームが $\theta = 0$ で安定に静止するために d が満たすべき条件を求めよ。

重心の定義より
$$y_G = \frac{Ma - md}{M + m}$$

安定に静止するためには、
 重心が回転軸 O よりも下にある必要がある。
 よって、

$$Ma - md > 0$$

$$\underline{d < \frac{M}{m}a}$$



(3) 角変位 θ に対する剛体の回転の運動方程式をたてよ。

水平右向きに x 軸を取り A と B にはたらく重力をそれぞれ W_A 、 W_B とすると

$$\mathbf{W}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} d \sin \theta \\ -d \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので、 $\sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ より

$$\sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{W}_A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{W}_B$$

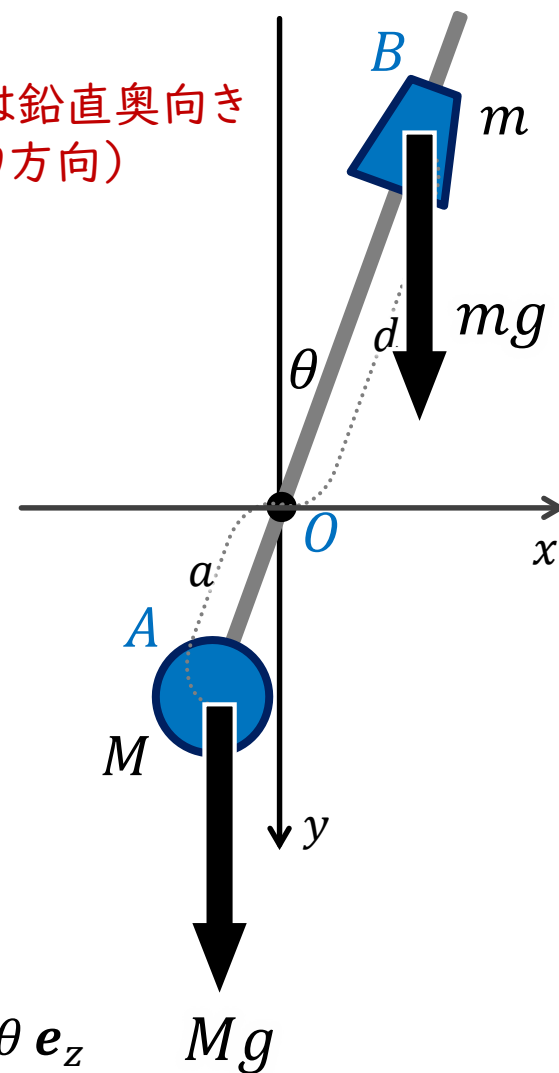
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & Mg & 0 \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d \sin \theta & -d \cos \theta & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -Mga \sin \theta \mathbf{e}_z + mgd \sin \theta \mathbf{e}_z = -(Ma - md)g \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\therefore I\ddot{\theta} = -(Ma - md)g \sin \theta$$

$$\underline{(Ma^2 + md^2) \ddot{\theta} = -(Ma - md)g \sin \theta}$$

+zは鉛直奥向き
(+ θ 方向)



+ θ 方向が+z方向なので
符号は+

(4) 微小振動 ($\theta \ll 1$) のとき、このメトロノームの微小振動の周期 T を求めよ。

微小振動のとき、 $\sin \theta \approx \theta$ より

$$(Ma^2 + md^2) \ddot{\theta} = -(Ma - md)g\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{(Ma - md)g}{Ma^2 + md^2} \theta$$

このとき角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{(Ma - md)g}{Ma^2 + md^2}}$$

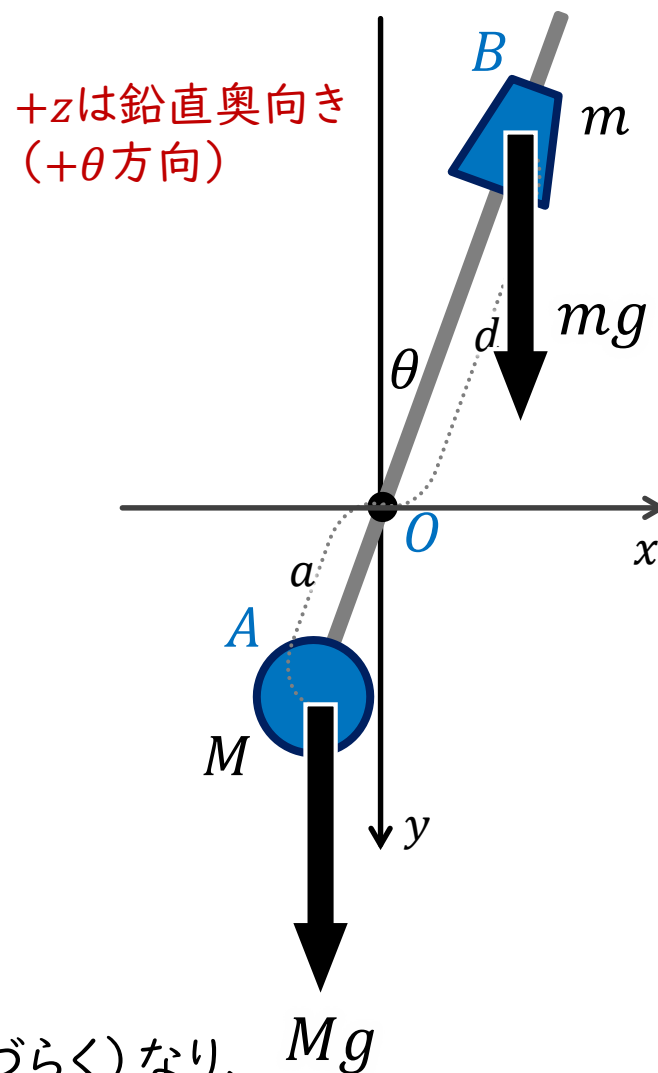
であるから周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2 + md^2}{(Ma - md)g}}$$

(5) d を上にずらすと周期 T は長くなる。

このとき、慣性モーメントと力のモーメントはどのように変化するか考察せよ。

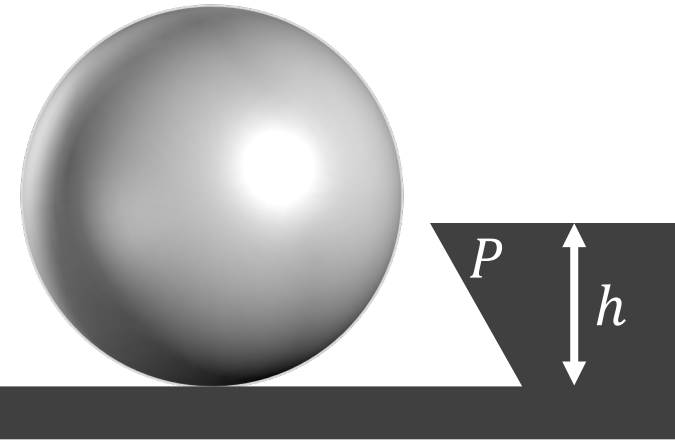
$I = Ma^2 + md^2$ より慣性モーメントは大きく (回転しづらく) なり、
 $N = -(Ma - md)g \sin \theta$ より力のモーメントの絶対値は
 小さく (戻ろうとする力が弱く) なる。
 そのため、周期が遅く (テンポが遅くなる) なる。



[4] 段差を乗り越える球

#13力学演習

半径 a 、質量 M の球がすべらずに床を転がって高さ h ($0 < h < a$) の段差にぶつかるとする。ただし、球と床・段差の間には滑りが生じず、段差の角は十分に鋭く、球はこの角 P を支点として回転し始めるものとする。



(1) 球の慣性モーメントを求めよ。(復習)

球の密度を ρ とすると

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \quad \therefore \rho = \frac{3M}{4\pi a^3}$$

$$I = \int \rho \xi^2 dV = \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} \frac{4}{3} = \frac{3M}{4\pi a^3} \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} M a^2$$

$$I = \underline{\underline{\frac{2}{5} M a^2}}$$

(2) いま、球に床から l の点に水平右向きに瞬間的に衝撃力（力積 $\bar{F}\Delta t$ ）を加えた。球がすべらずに転がるとき l はいくらか。
また、このときの並進速度 v_0 と角速度 ω_0 を求めよ。

力積 = 運動量変化 より $\bar{F}\Delta t = Mv_0$

$$v_0 = \frac{\bar{F}\Delta t}{M}$$

撃力による力のモーメント より

$$I\dot{\omega} = (l - a)\bar{F}$$

$$I\omega_0 = (l - a)\bar{F}\Delta t$$

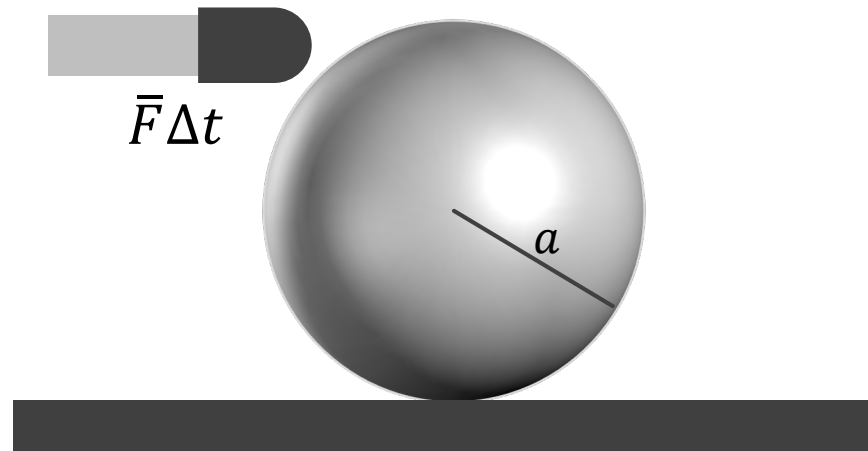
積分

$$\frac{2}{5}Ma^2\omega_0 = (l - a)\bar{F}\Delta t$$

$$\omega_0 = \frac{5(l - a)}{2Ma^2}\bar{F}\Delta t$$

すべりがなく転がるとき $v_0 = a\omega_0$ であるから、

$$\frac{\bar{F}\Delta t}{M} = \frac{5(l - a)}{2Ma}\bar{F}\Delta t \quad \therefore l = \underline{\underline{\frac{7}{5}a}}$$



このとき

$$v_0 = \frac{\bar{F}\Delta t}{M}$$

$$\omega_0 = \frac{\bar{F}\Delta t}{Ma}$$

(3) 点 P の周りの球の慣性モーメント I_P を求めよ。(復習)

$$I_P = I + Ma^2 = \frac{2}{5}Ma^2 + Ma^2 = \underline{\underline{\frac{7}{5}Ma^2}}$$

(4) 点 P との衝突後の角速度を ω として点 P まわりの角運動量保存の式をたて、 ω を求めよ。

$$Mv_0(a-h) + \frac{2}{5}Ma^2\omega_0 = \frac{7}{5}Ma^2\omega$$

重心運動による角運動量 重心まわりの回転の角運動量 衝突後の点 P まわりの回転の角運動量

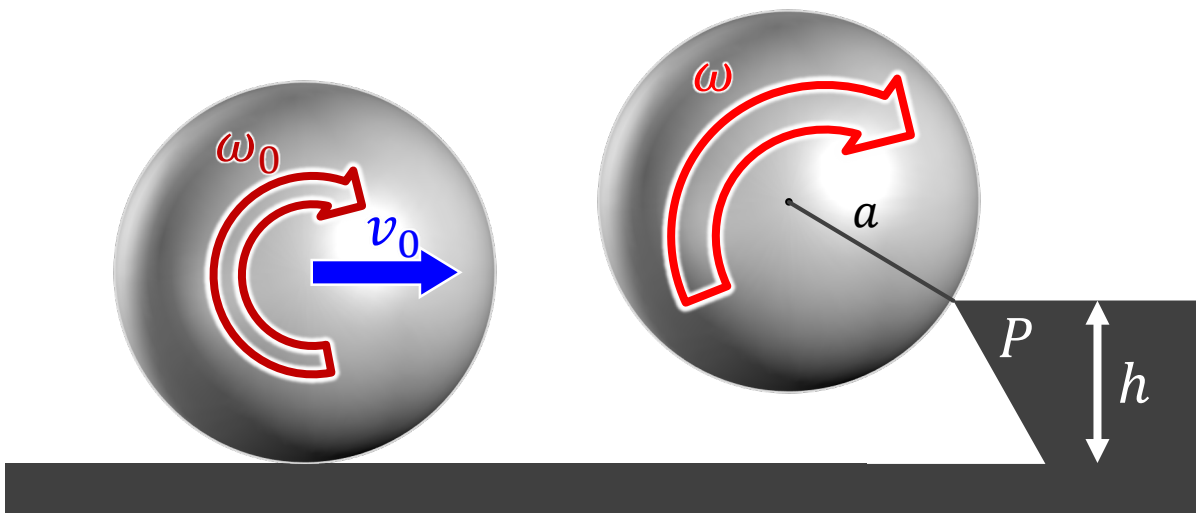
$$v_0 = a\omega_0 \text{ より}$$

$$Ma\omega_0(a-h) + \frac{2}{5}Ma^2\omega_0 = \frac{7}{5}Ma^2\omega$$

$$\left(\frac{7}{5}a - h\right)\omega_0 = \frac{7}{5}a\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{5}{7a} \left(\frac{7}{5}a - h\right)\omega_0$$

$$\therefore \omega = \underline{\underline{\left(1 - \frac{5h}{7a}\right)\omega_0}}$$



(5) 球が点 P との衝突直後の回転エネルギーが位置エネルギーよりも大きいとき、球は段差を乗り越える。角速度球が段差を乗り越えるために必要な、最小の力積 $\bar{F}\Delta t_{min}$ を M, g, a, h を用いて表わせ。

(衝突直後の回転エネルギー) > (位置エネルギー)

$$\frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{7}{5} M a^2 \omega^2 = \frac{7}{10} M a^2 \omega^2 > Mgh \quad \therefore \omega > \sqrt{\frac{10gh}{7a^2}}$$

ここで ω は (4)、(2) より

$$\omega = \left(1 - \frac{5h}{7a}\right) \omega_0 = \left(1 - \frac{5h}{7a}\right) \frac{\bar{F}\Delta t}{Ma}$$

よって、

$$\left(1 - \frac{5h}{7a}\right) \frac{\bar{F}\Delta t}{Ma} > \sqrt{\frac{10gh}{7a^2}}$$

$$\bar{F}\Delta t > \frac{\sqrt{70gh}}{7a - 5h} Ma$$

$$\therefore \bar{F}\Delta t_{min} = \frac{\sqrt{70gh}}{7a - 5h} Ma$$

