

[1] 重心

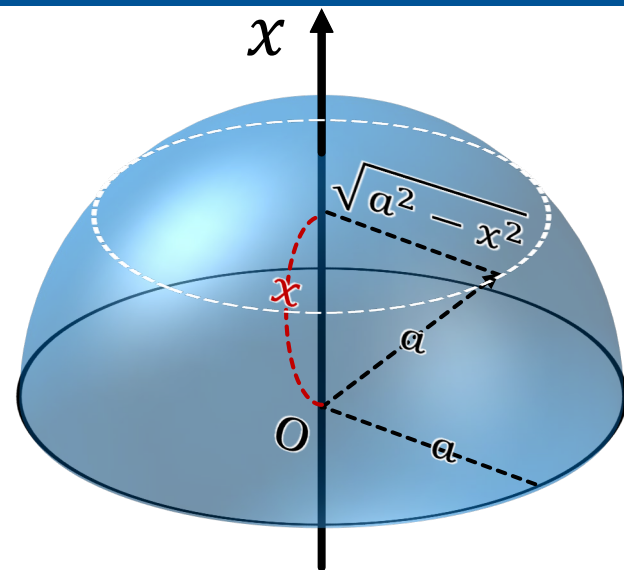
#12力学演習

次の半径 a の剛体の重心位置を求めよ。

(1) 半球

対称性より、重心は底面の円の中心から鉛直方向上にある。

底面からの距離 x のところで平行面で切った切り口の円の半径は $\sqrt{a^2 - x^2}$ であるので厚さ dx の部分の体積は $\pi(a^2 - x^2)dx$ である。



$$\begin{aligned}\therefore OG &= \frac{\int_0^a x \cdot \pi(a^2 - x^2)dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)dx} = \frac{\pi \int_0^a (a^2x - x^3)dx}{\pi \int_0^a (a^2 - x^2)dx} = \frac{\pi \left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}{\pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \underline{\underline{\frac{3}{8}a}}\end{aligned}$$

よって、重心は底面の円の中心から

鉛直方向に $\frac{3}{8}a$ 離れた点

[1] 重心

#12力学演習

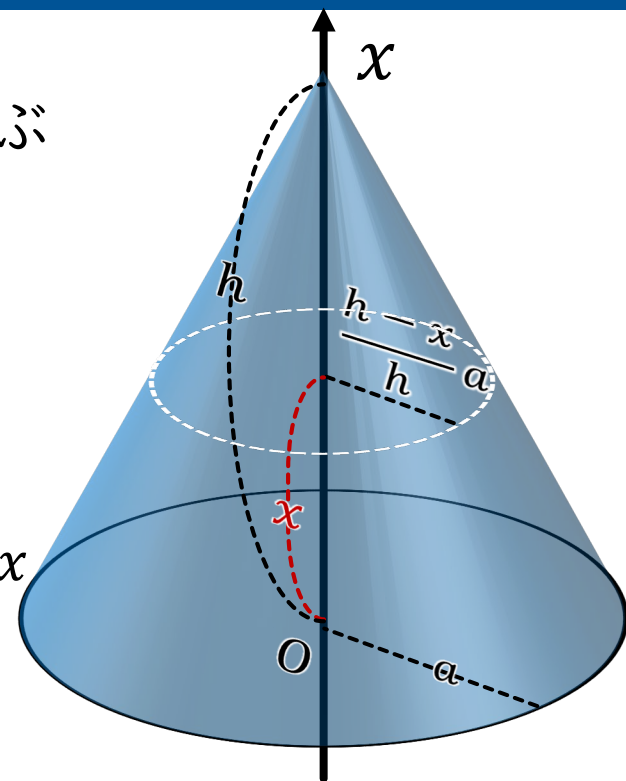
(2)円錐(高さ h)

対称性より、重心は底面の円の中心と頂点を結ぶ線上にある。

底面からの高さ x のところで平行面で切った切り口の円の半径は $(h-x)a/h$ であるから厚さ dx の部分の体積を考えて

$$\therefore OG = \frac{\int_0^h x \cdot \pi \left\{ \frac{h-x}{h} a \right\}^2 dx}{\int_0^h \pi \left\{ \frac{h-x}{h} a \right\}^2 dx} = \frac{\pi \int_0^h x \cdot (h-x)^2 dx}{\pi \int_0^h (h-x)^2 dx}$$

$$= \frac{\pi \left[h^2 \frac{x^2}{2} - 2h \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^h}{\pi \left[h^2 x - hx^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^h} = \frac{\frac{1}{12} \pi h^4}{\frac{1}{3} \pi h^3} = \frac{1}{4} h$$

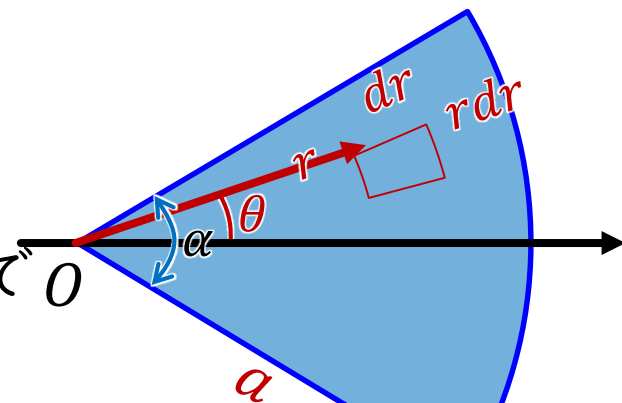


よって、重心は底面の円の中心と頂点を結ぶ線分を1:3に内分する点

(3) 扇形 (中心角 α)

右図のように中心角の二等分線を x 軸とし、
極座標で r, θ をとる。

対称性より重心は x 軸上にあるが $x = r \cos \theta$ で O
面積要素は $rdrd\theta$ であるから



$$\begin{aligned} \therefore OG &= \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^a x r dr d\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^a r dr d\theta} = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^a r^2 \cos \theta dr d\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^a r dr d\theta} = \frac{\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a [\sin \theta]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}}{\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a [\theta]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{\frac{a^3}{3} \cdot \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\frac{a^2}{2} \cdot \alpha} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \alpha} a \end{aligned}$$

よって、重心は頂角から
左記の分だけ平行移動した位置

[1] 重心

#12力学演習

(4) 半円板

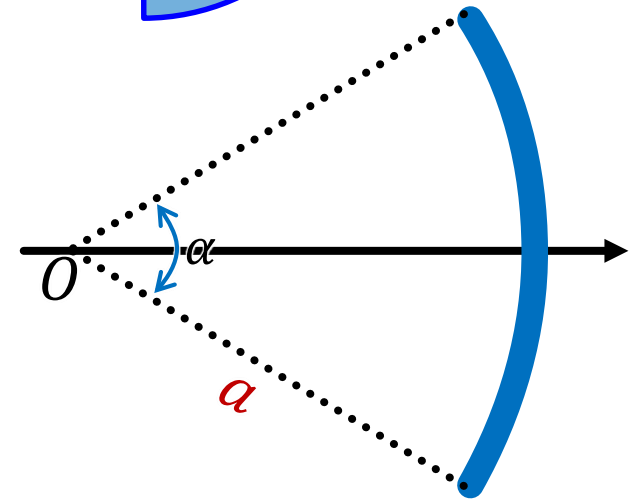
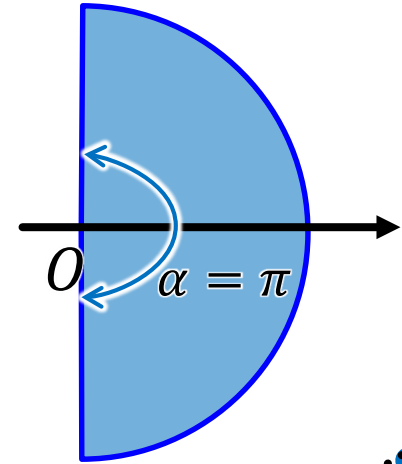
(3)において $\alpha = \pi$ とおいて $OG = \frac{4}{3\pi}a$

(5) 円弧

右図のように中心角の二等分線を x 軸とし、
極座標で r, θ をとる。

対称性より重心は x 軸上にあるが $x = r \cos \theta$ で
面積要素は $ad\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\therefore OG &= \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} x \, ad\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} ad\theta} = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} a^2 \cos \theta \, d\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} ad\theta} \\ &= \frac{a^2 [\sin \theta]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}}{a [\theta]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^2 \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{a\alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} a\end{aligned}$$



[2] 慣性モーメント

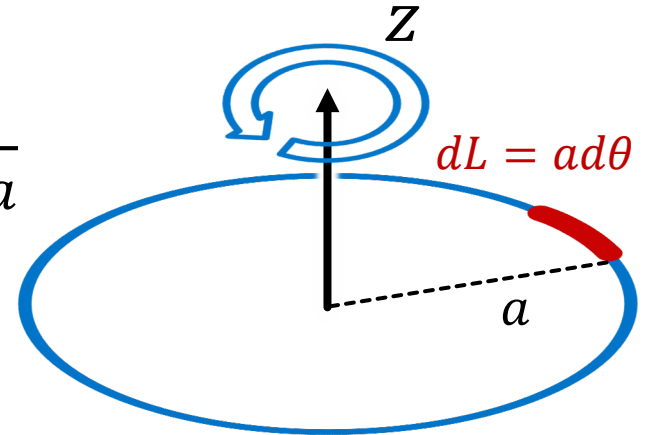
#12力学演習

次の一様な剛体（質量 M ）の中心軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(1) 半径 a の円環（線密度を ρ_L ）

$$M = 2\pi a \cdot \rho_L \quad \therefore \rho_L = \frac{M}{2\pi a}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int \rho_L \xi^2 dL \rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi a} a^2 a d\theta \\ &= \frac{Ma^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{Ma^2} \end{aligned}$$

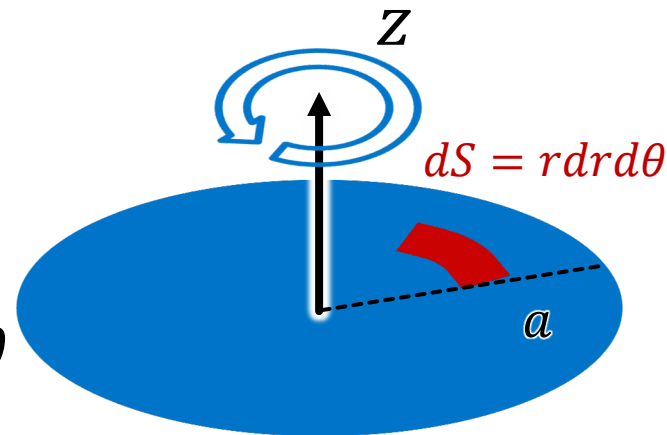


(2) 半径 a の円板（面密度を ρ_S ）

$$M = \pi a^2 \cdot \rho_S \quad \therefore \rho_S = \frac{M}{\pi a^2}$$

$$I_z = \int \rho_S \xi^2 dS \rightarrow \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi a^2} r^2 r dr d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi a^2} \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a [\theta]_0^{2\pi} = \frac{M}{\pi a^2} \frac{a^4}{4} 2\pi = \underline{\frac{1}{2} Ma^2}$$



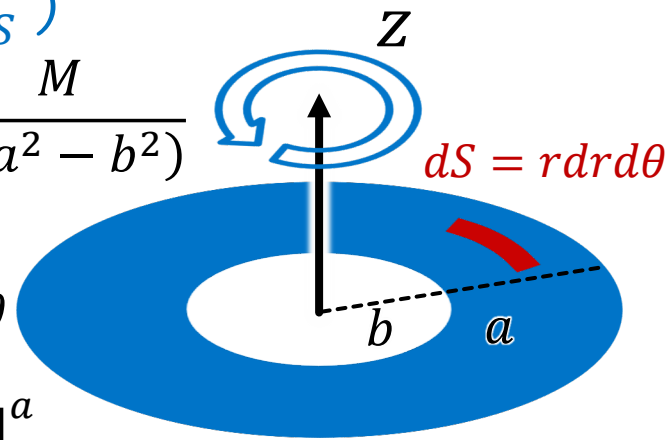
(3) 外半径 a 、内半径 b 、円環 (面密度を ρ_S)

$$M = \rho_S \int_b^a \int_0^{2\pi} r \, dr d\theta = \rho_S \frac{a^2 - b^2}{2} 2\pi \quad \therefore \rho_L = \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)}$$

$$I_z = \int \rho_S \xi^2 \, dS \rightarrow \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)} r^2 \, r dr d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)} \int_b^a r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)} \left[\frac{r^4}{4} \right]_b^a [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{M(a^4 - b^4)}{2(a^2 - b^2)} = \frac{M(a^2 + b^2)}{2}$$

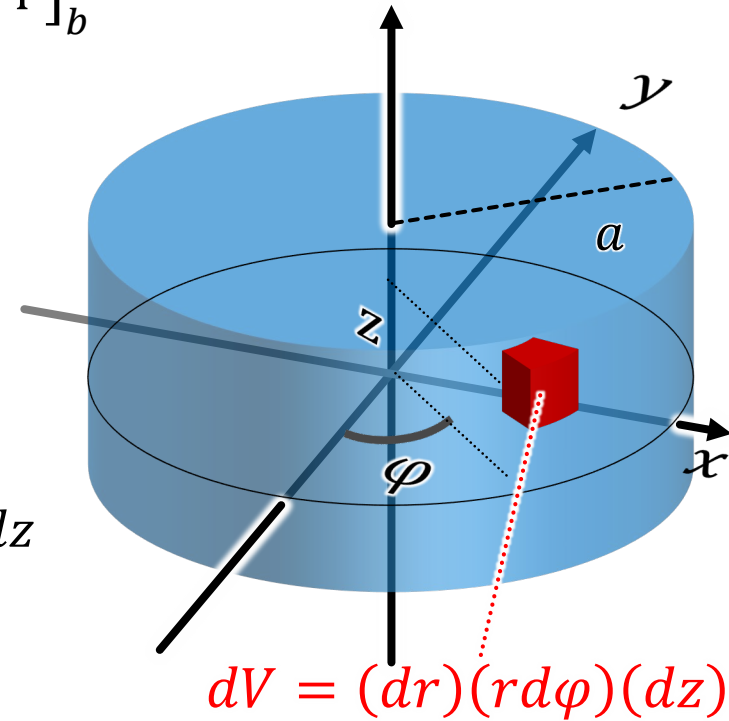


(4) 半径 a 、高さ h の円柱 (密度を ρ)

$$M = \pi a^2 h \cdot \rho \quad \therefore \rho = \frac{M}{\pi a^2 h}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 \, dV \rightarrow \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho r^2 \, dr r d\varphi dz$$

$$= \frac{M}{\pi a^2 h} \int_0^a r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$



$$= \frac{M}{\pi a^2 h} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{M}{\pi a^2 h} \frac{a^4}{4} 2\pi h = \underline{\underline{\frac{1}{2} M a^2}} \quad (2) \text{と同じ}$$

(5) 半径 a 、高さ h の薄い中空円柱 (密度を ρ)

$$M = 2\pi a h \cdot \rho_s \quad \therefore \rho_s = \frac{M}{2\pi a h}$$

$$I_z = \int \rho_s \xi^2 dS \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_s a^2 a d\varphi dz$$

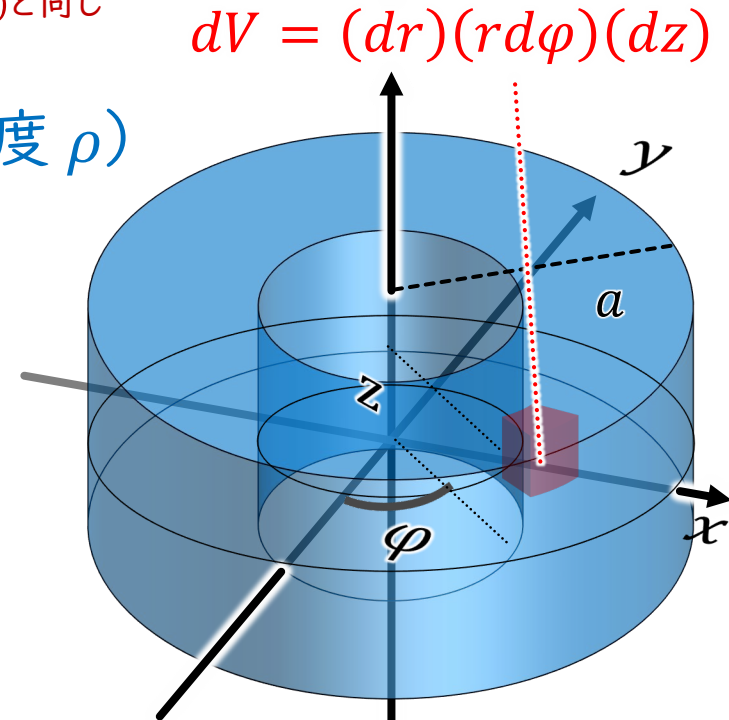
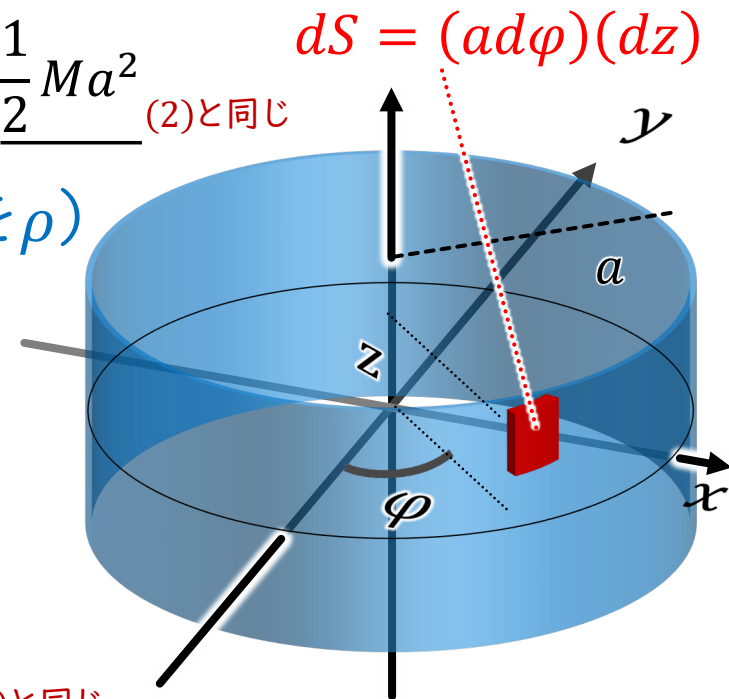
$$= \frac{M a^3}{2\pi a h} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{M a^2}{2\pi h} 2\pi h = \underline{\underline{M a^2}} \quad (1) \text{と同じ}$$

(6) 外半径 a 、内半径 b 、高さ h の円筒 (密度 ρ)

$$M = \rho \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\theta dz$$

$$= \rho \frac{a^2 - b^2}{2} 2\pi h$$

$$\therefore \rho = \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)h}$$



$$I_z = \int \rho \xi^2 dV \rightarrow \rho \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^2 r dr d\theta dz$$

$$= \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)h} \int_b^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)h} \left[\frac{r^4}{4} \right]_b^a [\theta]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)h} \frac{(a^4 - b^4)}{4} 2\pi h = \frac{M(a^2 + b^2)}{2}$$

$$dV = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi) \\ = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

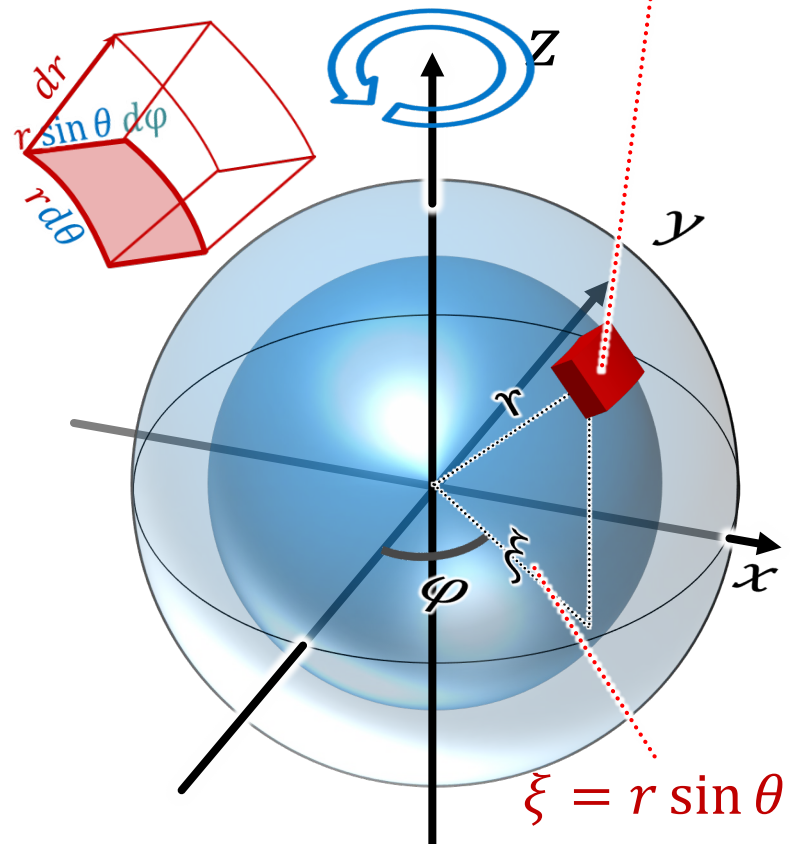
(7) 半径 a の球 (密度を ρ)

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad \therefore \rho = \frac{3M}{4\pi a^3}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 dV$$

$$\rightarrow \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$



$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta &= \int_0^\pi \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 d\theta - \frac{1}{8i} \int_0^\pi (e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}) d\theta \\
 &= -\frac{1}{8i} \left[\frac{e^{i3\theta}}{3i} - 3 \frac{e^{i\theta}}{i} + 3 \frac{e^{-i\theta}}{-i} - \frac{e^{-i3\theta}}{-3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{i3\pi} + e^{-i3\pi}}{3 \cdot 2} - 3 \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} \cos 3\pi - 3 \cos \pi \right\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} \frac{4}{3} = \frac{3M}{4\pi a^3} \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{5} M a^2}}$$

[別解] 中心対称性から x, y, z 軸に対する慣性モーメントは

$$I_z = \int \rho(x^2 + y^2) dV \quad I_x = \int \rho(y^2 + z^2) dV \quad I_y = \int \rho(x^2 + z^2) dV$$

すべて等しいので $I = I_x = I_y = I_z$ であるから、全て加えて3で割り、

$$I = \frac{1}{3} \{I_x + I_y + I_z\} = \frac{2\rho}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{2\rho}{3} \int r^2 dV$$

$dV = 4\pi r^2 dr$ より

$$I = \frac{2\rho}{3} \int 4\pi r^4 dr = \frac{2M}{4\pi a^3} 4\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a = \frac{2M}{a^3} \frac{a^5}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5} M a^2}}$$

(8) 半径 a の薄い球殻 (面密度を ρ_S)

$$M = \rho_S \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi$$

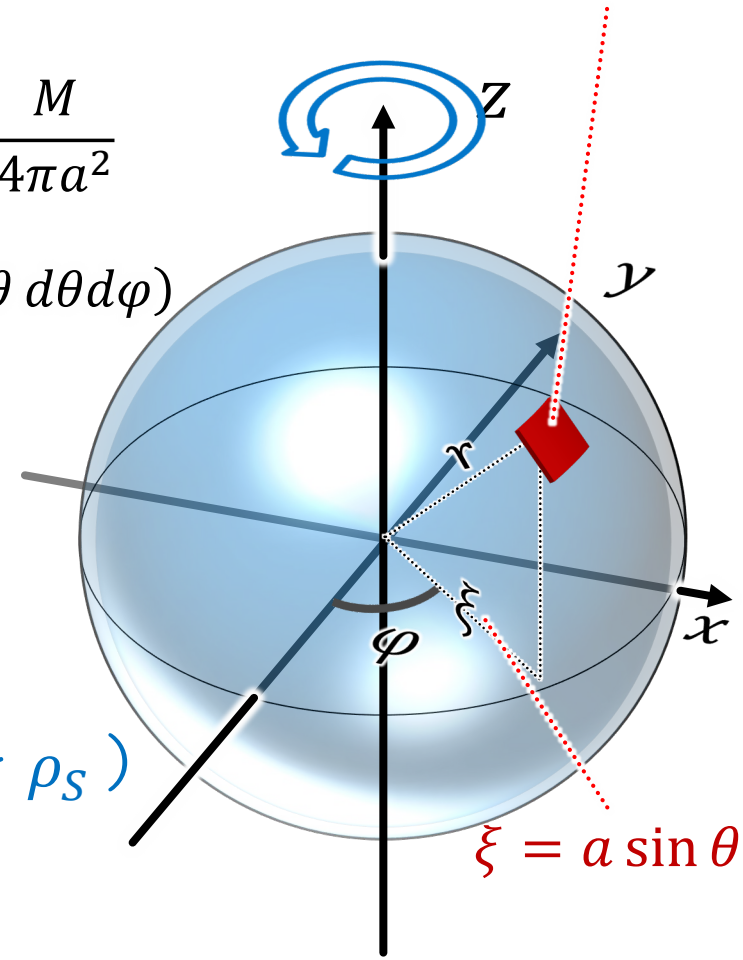
$$= \rho_S a^2 \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot 2\pi = 4\pi a^2 \rho_S \quad \therefore \rho_S = \frac{M}{4\pi a^2}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 \, dS \rightarrow \rho_S \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (a^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi)$$

$$= \frac{M}{4\pi a^2} a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta d\varphi$$

$$= \frac{M}{4\pi} a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} M a^2}}$$

$$dS = (a d\theta)(a \sin \theta \, d\varphi) \\ = a^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi$$



$$\xi = a \sin \theta$$

(9) 外半径 a 、内半径 b の球殻 (面密度を ρ_S)

$$M = \rho_S \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$= \rho_S \int_b^a r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta$$

$$= \rho_S \left[\frac{r^3}{3} \right]_b^a [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = \rho_S \frac{a^3 - b^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2$$

$$\rho_S = \frac{3M}{4\pi(a^3 - b^3)}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 dV \rightarrow \rho_S \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi(a^3 - b^3)} \int_b^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{3M}{4\pi(a^3 - b^3)} \cdot \frac{(a^5 - b^5)}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2(a^5 - b^5)}{5(a^3 - b^3)} M}}$$

$b \rightarrow 0$ とすれば(7)
 $b \rightarrow a$ とすれば(8)
 の答えと一致する

(10) 中心から半径 $a/2$ までが密度を ρ_1 、その外側の半径 a までが密度を ρ_2 の球

$$M = M_1 + M_2 = \rho_1 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi + \rho_2 \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \rho_1 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi + \rho_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\frac{a}{2}}^a [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left\{ \rho_1 [r^3]_0^{\frac{a}{2}} + \rho_2 [r^3]_{\frac{a}{2}}^a \right\} = \frac{4\pi}{3} \left\{ \rho_1 \frac{1}{8} a^3 + \rho_2 \frac{7}{8} a^3 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{6} a^3 (\rho_1 + 7\rho_2)$$

$$\therefore \pi a^3 = \frac{6M}{\rho_1 + 7\rho_2}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 dV$$

$$\begin{aligned} I_z &\rightarrow \rho_1 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi + \rho_2 \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \rho_1 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\frac{a}{2}} [\varphi]_0^{2\pi} \frac{4}{3} + \rho_2 \left[\frac{r^5}{5} \right]_{\frac{a}{2}}^a [\varphi]_0^{2\pi} \frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} \left\{ \rho_1 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\frac{a}{2}} + \rho_2 \left[\frac{r^5}{5} \right]_{\frac{a}{2}}^a \right\} = \frac{8\pi}{15} \left\{ \rho_1 \frac{1}{32} a^5 + \rho_2 \frac{31}{32} a^5 \right\} = \frac{\pi a^5}{60} \{ \rho_1 + 31\rho_2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi a^3 = \frac{6M}{\rho_1 + 7\rho_2} \quad \text{を用いると} \quad I_z &= \frac{a^2}{60} \pi a^3 \{ \rho_1 + 31\rho_2 \} = \frac{a^2}{60} \frac{6M}{\rho_1 + 7\rho_2} \{ \rho_1 + 31\rho_2 \} \\ &= \frac{1}{10} M a^2 \frac{(\rho_1 + 31\rho_2)}{(\rho_1 + 7\rho_2)} = \frac{2}{5} M a^2 \frac{(\rho_1 + 31\rho_2)}{4(\rho_1 + 7\rho_2)} \end{aligned}$$


 均一な球の
 慣性モーメント

[3] 斜面を転がる円柱

#12力学演習

水平面と θ の角をなす斜面上を、質量 M 半径 a の一様な円柱が速度 v で転がっている。円柱と斜面の間には摩擦力があり、円柱は滑ることなく回転するものとする。

- (1) 摩擦力の大きさを f とするとき、重心 G の斜面方向の運動方程式と重心 G まわりの運動方程式をたてよ。

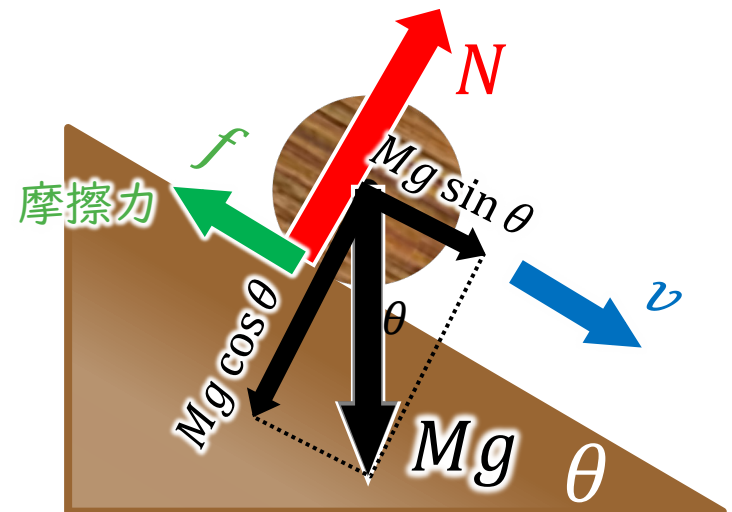
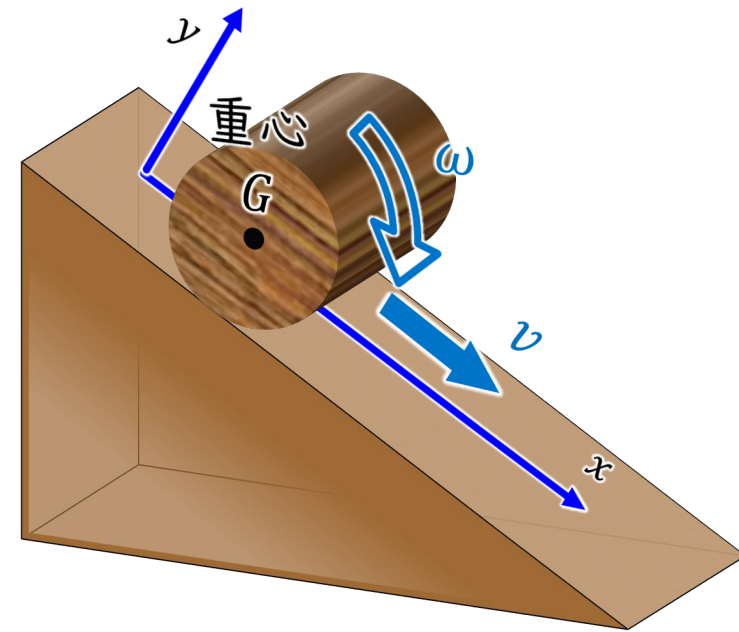
x 軸方向の重心の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta - f$$

x 軸方向の速度で表すと $v = a\omega$ より

$$M\dot{v} = Mg \sin \theta - f$$

$$\underline{M \frac{dv}{dt} = Mg \sin \theta - f}$$



回転の運動方程式をもとめる

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -a & 0 \\ -f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -af\mathbf{e}_z$$

回転の運動方程式の z 成分は、

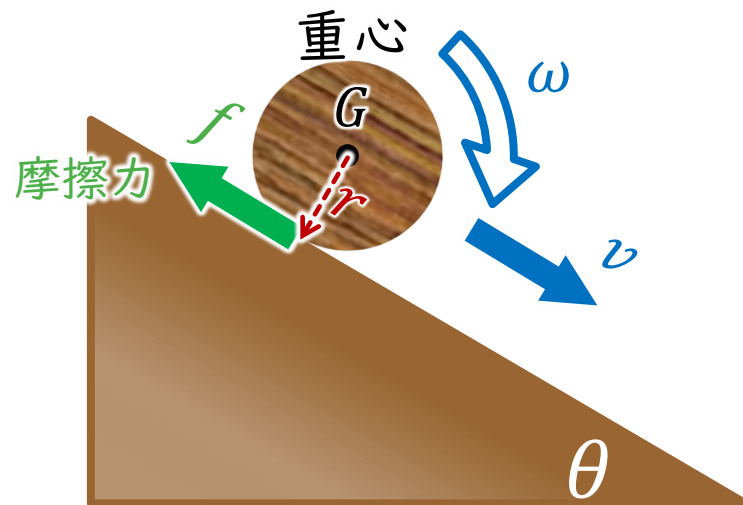
$$\frac{d}{dt}L_z = N_z$$

$$-I \frac{d}{dt}\omega = -af$$

円柱の慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}Ma^2$

であるから

$$\frac{1}{2}Ma^2 \frac{d}{dt}\omega = af$$



$$\underline{\frac{1}{2}Ma \frac{d}{dt}\omega = f}$$

すべらずに転がる場合は

$v = a\omega$ より

$$\frac{1}{2}Ma \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{a}\right) = f$$

$$\underline{\frac{1}{2}M \frac{dv}{dt} = f}$$

となる

(2) (1)の運動方程式を解き、摩擦力の大きさを f と G の加速度 dv/dt を求めよ。

f を重心の運動方程式に代入すると

$$M \frac{dv}{dt} = Mg \sin \theta - \frac{1}{2} M \frac{dv}{dt} \quad \therefore \frac{dv}{dt} = \underline{\frac{2}{3} g \sin \theta}$$

f は

$$f = \frac{1}{2} M \cdot \frac{2}{3} g \sin \theta \quad f = \underline{\frac{1}{3} M g \sin \theta}$$

(3) 重心の運動エネルギーと回転の運動エネルギーを求め、
これが位置エネルギーの大きさに等しいこと
(すなわち、摩擦力が仕事をしないこと)を示せ。

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin \theta \quad \text{より} \quad v = \frac{2}{3} g \sin \theta \cdot t \quad \text{また、} v = a\omega \text{ より}$$

$$\text{また斜面方向の変位 } x \text{ は } x = \frac{1}{3} g \sin \theta \cdot t^2 \quad \omega = \frac{2}{3a} g \sin \theta \cdot t$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{2}{3} g \sin \theta \cdot t \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M a^2 \left(\frac{2}{3a} g \sin \theta \cdot t \right)^2$$

$$= \frac{1}{3} M g^2 \sin^2 \theta t^2 = M g \left(\frac{1}{3} g \sin \theta \cdot t^2 \right) \sin \theta$$

$$= M g \underbrace{x \sin \theta}_{= \text{高さ}(h)} = M g h$$

$= \text{高さ}(h)$ よって位置エネルギーの大きさに等しい、
すなわち、摩擦力が仕事をしないことが示された。

(4) (3)の結果(力学的エネルギー保存則)を用いて、静止した状態から鉛直方向の高さ H 落ちたときの速度 v_H を求めよ。

(3)で示されたエネルギー保存則をもちいると

$$\frac{1}{2} M \cdot 0^2 + \frac{1}{2} I \cdot 0^2 + M g H = \frac{1}{2} M \cdot v_H^2 + \frac{1}{2} I \cdot \left(\frac{v_H}{a} \right)^2 + M g \cdot 0$$

$$M g H = \frac{1}{2} M v_H^2 + \frac{1}{4} M v_H^2 = \frac{3}{4} M \cdot v_H^2$$

$$\therefore v_H = \sqrt{\frac{4}{3} g H}$$

(5) 斜面の静止摩擦係数を μ としたとき、円柱が滑ることなく回転する条件（摩擦力が最大摩擦力以下となる条件）を求めよ。

$$f = \frac{1}{3}Mg \sin \theta \quad \text{が最大摩擦力 } F = \mu N \text{ を超えない条件を求める}$$

$$\frac{1}{3}Mg \sin \theta \leq \mu N = \mu Mg \cos \theta \quad \therefore \underline{\tan \theta \leq 3\mu}$$

(6) 斜面の角度を増加させ角度を θ' にすると(4)の条件に反して円柱が滑り落ちた。このとき、動摩擦力がはたらく。動摩擦係数を μ' とするとき、重心の落下速度 v' と円柱の角速度 ω' を求め、斜面との接触点の速度 $u = v' - a\omega$ を求めよ。

滑りながら転がるとき、 $F = \mu' Mg \cos \theta'$ がはたらく。

よって、重心の運動方程式より

$$M \frac{dv'}{dt} = Mg \sin \theta' - F = Mg \sin \theta' - \mu' Mg \cos \theta'$$

$$\frac{dv'}{dt} = g(\sin \theta' - \mu' \cos \theta') = g \cos \theta' (\tan \theta' - \mu')$$

$\tan \theta' > 3\mu > 3\mu' > \mu'$ より $\frac{dv'}{dt} > 0$ となり、この定加速度で落下する。

$$t = 0 \text{ で } v' = 0 \text{ として積分すると } v' = \underline{g(\sin \theta' - \mu' \cos \theta') \cdot t}$$

次に回転運動の運動方程式より

$$\frac{1}{2}Ma \frac{d}{dt} \omega' = f = \mu' Mg \cos \theta'$$

$$\frac{d}{dt} \omega' = \frac{2\mu' g \cos \theta'}{a}$$

$$t = 0 \text{ で } \omega' = 0 \text{ として積分すると } \omega' = \underline{\frac{2\mu' g \cos \theta'}{a} \cdot t}$$

よって、斜面との接触点の速度は

$$u = v' - a\omega$$

$$= g(\sin \theta' - \mu' \cos \theta') \cdot t - a \frac{2\mu' g \cos \theta'}{a} \cdot t$$

$$= g(\sin \theta' - \mu' \cos \theta') \cdot t - a \frac{2\mu' g \cos \theta'}{a} \cdot t$$

$$= \underline{g(\sin \theta' - 3\mu' \cos \theta') \cdot t}$$