

[1] 2質点系の回転の運動方程式 #11 力学演習

2質点系の質点 P_1, P_2 の位置とはたらく外力をそれぞれ、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ と $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ とおく。また、この2質点系の重心 G の位置を $\mathbf{r}_G$ とおき、 G を基準点としたときの P_1, P_2 の相対的な位置を $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$ とおく。次の式が成り立つことを示せ。ただし、 $\mathbf{N}$ は P_1, P_2 にはたらく外力のモーメント、 $\mathbf{N}_G, \mathbf{L}_G$ は重心 G にはたらく外力のモーメントと角運動量、 $\mathbf{N}', \mathbf{L}'$ は重心 G に対する P_1, P_2 の相対的な外力のモーメントと角運動量とする。

$$(1) \mathbf{N} = \mathbf{N}_G + \mathbf{N}'$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_2 = (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}_1') \times \mathbf{f}_1 + (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}_2') \times \mathbf{f}_2$$

$$= \underbrace{\mathbf{r}_G \times (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)}_{\mathbf{N}_G} + \underbrace{(\mathbf{r}_1' \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2' \times \mathbf{f}_2)}_{\mathbf{N}'} = \mathbf{N}_G + \mathbf{N}'$$

(証明終)

$$(2) \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N}_G$$

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G) = \underline{\underline{\dot{\mathbf{r}}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G}} + \mathbf{r}_G \times \frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{r}}_G) = \mathbf{r}_G \times M\ddot{\mathbf{r}}_G = 0$$

ここで $M\dot{\mathbf{r}}_G = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{12} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$

$\because \mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$ (作用・反作用の法則)

よって

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{r}_G \times M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{r}_G \times (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = \mathbf{N}_G \quad (\text{証明終})$$

$$(3) \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}'$$

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d(\mathbf{L} - \mathbf{L}_G)}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_G = \mathbf{N}'$$

(証明終)

[2] 2体問題

#11 力学演習

2質点系の質点 P_1, P_2 について

$$P_1: \text{質量 } m_1 = 3m_0, \quad r_1 = [5 \cos t, 5 \sin t, 10 - 2t^2]$$

$$P_2: \text{質量 } m_2 = 5m_0, \quad r_2 = [-3 \cos t, -3 \sin t, 10 - 2t^2]$$

であるとき、次の問に答えよ。

(1) 重心 G の位置を r_G と G に対する P_1, P_2 の相対位置 r_1', r_2' を求めよ。

$$\begin{aligned} r_G &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_0}{3m_0 + 5m_0} \left\{ 3 \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 5 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 - 16t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{10 - 2t^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$r_1' = r_1 - r_G = \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 5 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 5 \sin t \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$r_2' = r_2 - r_G = \begin{bmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

(2) P_1 と P_2 と G の速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_G$ を求め、 G に対する P_1, P_2 の相対速度 $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$ を求めよ。

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 5 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 \sin t \\ 5 \cos t \\ -4t \end{bmatrix}}}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \sin t \\ -3 \cos t \\ -4t \end{bmatrix}}}$$

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{\boldsymbol{r}}_G = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 - 2t^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4t \end{bmatrix}}}$$

$$\boldsymbol{v}_1' = \dot{\boldsymbol{r}}_1' = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 \cos t \\ 5 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 \sin t \\ 5 \cos t \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \dot{\boldsymbol{r}}_2' = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -3 \cos t \\ -3 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \sin t \\ -3 \cos t \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(3) P_1 と P_2 と G の加速度 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_G$ を求め、 G に対する P_1, P_2 の相対的加速度 $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ を求めよ。また、 P_1, P_2 にはたらく外力の総和 $\mathbf{f}$ を求めよ。

$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{v}}_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -5 \sin t \\ 5 \cos t \\ -4t \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -5 \cos t \\ -5 \sin t \\ -4 \end{bmatrix}} \quad \mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{v}}_G = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{v}}_2 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 3 \sin t \\ -3 \cos t \\ -4t \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ -4 \end{bmatrix}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{a}'_1 = \ddot{\mathbf{r}}'_1 = \dot{\mathbf{v}}'_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -5 \sin t \\ 5 \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -5 \cos t \\ -5 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \mathbf{f} = M\ddot{\mathbf{r}}_G$$

$$= (3 + 5)m_0\ddot{\mathbf{r}}_G$$

$$= 8m_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = m_0 \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{f} = m_0\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = m_0(3\ddot{\mathbf{r}}_1 + 5\ddot{\mathbf{r}}_2)$$

$$= m_0 \left(3 \begin{bmatrix} -5 \cos t \\ -5 \sin t \\ -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ -4 \end{bmatrix} \right) = m_0 \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32 \end{bmatrix}}$$

(4) 2質点系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ と重心の運動量 $\boldsymbol{P}_G$ の間に $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_G$ が成り立つことを確認せよ。

$$\boldsymbol{P} = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2 = m_0(3\dot{\boldsymbol{r}}_1 + 5\dot{\boldsymbol{r}}_2)$$

$$= m_0 \left(3 \begin{bmatrix} -5 \sin t \\ 5 \cos t \\ -4t \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \sin t \\ -3 \cos t \\ -4t \end{bmatrix} \right) = m_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_G = M \dot{\boldsymbol{r}}_G = (3 + 5)m_0 \dot{\boldsymbol{r}}_G = 8m_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4t \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32t \end{bmatrix} \quad \text{よって } \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_G$$

(5) 2質点系の全運動エネルギー K と重心の運動エネルギー K_G 、重心 G に対する P_1, P_2 の相対運動の運動エネルギー K' の間に $K = K_G + K'$ が成り立つことを確認せよ。

$$\boldsymbol{v}_1^2 = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 = (-5 \sin t)^2 + (5 \cos t)^2 + (-4t)^2 = 25 + 16t^2$$

$$\boldsymbol{v}_2^2 = \|\boldsymbol{v}_2\|^2 = (3 \sin t)^2 + (-3 \cos t)^2 + (-4t)^2 = 9 + 16t^2$$

$$\boldsymbol{v}_G^2 = \|\boldsymbol{v}_G\|^2 = (0)^2 + (0)^2 + (-4t)^2 = 16t^2$$

$$\boldsymbol{v}_1'^2 = \|\boldsymbol{v}_1'\|^2 = (-5 \cos t)^2 + (-5 \sin t)^2 + (0)^2 = 25$$

$$\boldsymbol{v}_2'^2 = \|\boldsymbol{v}_2'\|^2 = (3 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2 + (0)^2 = 9$$

よって

$$K = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{3}{2}m_0\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{5}{2}m_0\boldsymbol{v}_2^2$$

$$= \frac{3}{2}m_0(25 + 16t^2) + \frac{5}{2}m_0(9 + 16t^2) = \underline{60m_0 + 64m_0t^2}$$

$$K_G = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 = \frac{1}{2}(3 + 5)m_0\boldsymbol{v}_G^2 = 4m_0(16t^2) = \underline{64m_0t^2}$$

$$K' = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2'^2 = \frac{3}{2}m_0\boldsymbol{v}_1'^2 + \frac{5}{2}m_0\boldsymbol{v}_2'^2$$

$$= \frac{3}{2}m_0(25) + \frac{5}{2}m_0(9) = \underline{60m_0}$$

$$\text{よって } K = K_G + K'$$

[3] 多体問題 (外力なし)

#11 力学演習

xy 平面上に重心 G 、質量 M の剛体が
原点 O を固定軸として、重力により微小
振動するものとする。

$OG = l_0$ 、また、この軸の周りの慣性モーメントを I とし、鉛直軸からの振れ角を θ とおく。次の問に答えよ。

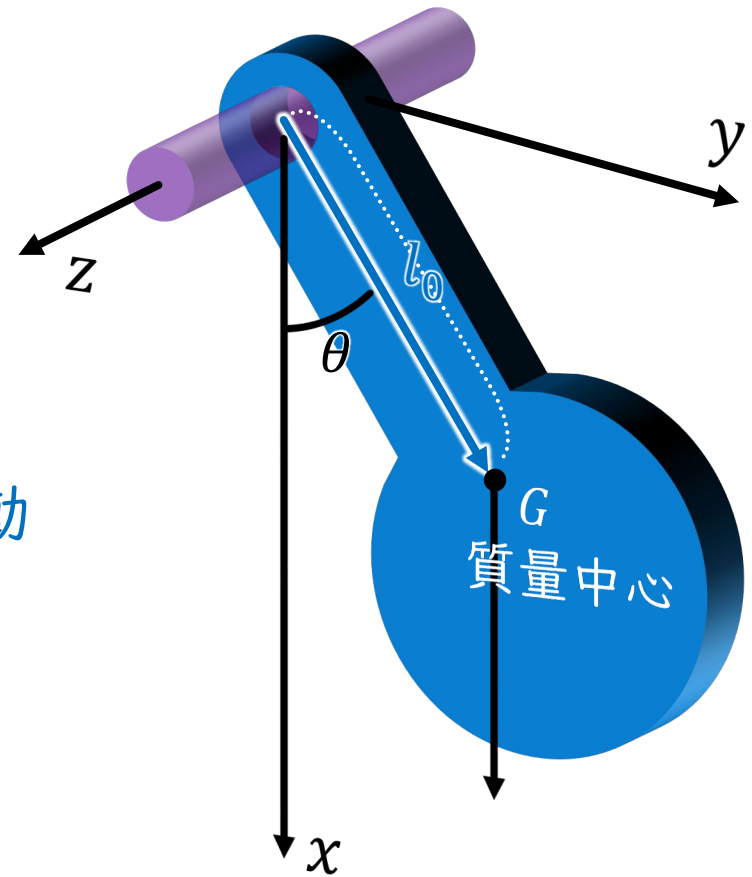
(1) 力のモーメント N を求め、回転の運動方程式をたてよ。

回転の運動方程式は $I\ddot{\theta} = N$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} l_0 \cos \theta \\ l_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$N = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ l_0 \cos \theta & l_0 \sin \theta & 0 \\ Mg & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(l_0 \sin \theta) M g \mathbf{e}_z$$

$$\therefore \underline{I\ddot{\theta} = -Mgl_0 \sin \theta}$$



(2) 微小振動であるとして運動方程式を解き、 θ および $\dot{\theta}$ の式を求めよ。

微小振動であるとして $I\ddot{\theta} = -Mgl_0 \sin \theta \cong -Mgl_0 \theta$

よって
$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgl_0}{I} \theta$$

これを解いて

$$\theta = A \cos \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right)$$

ただし、振幅を A 、
初期位相を θ_0 とした。

$$\omega = \dot{\theta} = -A \sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} \sin \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right)$$

(3) この実体振り子の運動エネルギー K 、位置エネルギー U を求めよ。
ただし重心が鉛直軸と重なるときを位置エネルギーの基準にとること。

運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left(A \sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} \sin \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right) \right)^2$$

$$K = \frac{1}{2} I A^2 \frac{Mgl_0}{I} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right) = \frac{Mgl_0 A^2}{2} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right)$$

位置エネルギー U は

$$U = Mgl_0(1 - \cos \theta) \cong \frac{Mgl_0 A^2}{2} \theta^2$$

$$\because 1 - \cos \theta \cong \frac{1}{2} \theta^2 \quad (\theta \ll 1)$$

$$= \frac{Mgl_0 A^2}{2} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right)$$

(4) 力学的エネルギー $K + U$ が時間に依らない一定値であることを示せ。

$$K + U = \frac{Mgl_0 A^2}{2} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right) + \frac{Mgl_0 A^2}{2} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{Mgl_0}{I}} t + \theta_0 \right)$$

$$= \frac{Mgl_0 A^2}{2}$$

よって時間に依らない一定値である。