

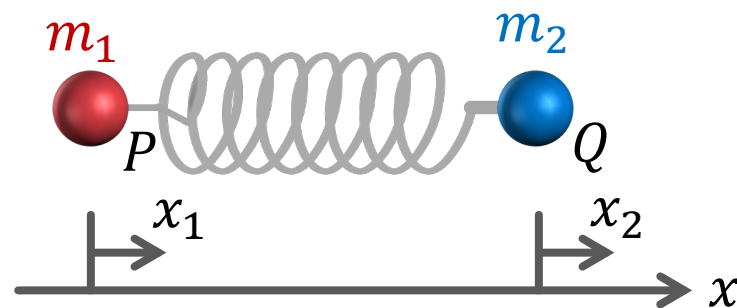
[1] 2体問題 (外力なし)

#10力学演習

質量 m_1, m_2 の2個の質点 P と Q が、バネ定数 k のバネで結ばれている系を考える。両端の質点の変位を x_1, x_2 とする。

(1) 2個の質点 P と Q の運動方程式を書け。

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = -k(x_1 - x_2) \end{cases}$$



符号の確認方法:

$x_2 - x_1 > 0$ のとき、バネは伸びる

→ P は右向き、 Q は左向きに力を受ける

(2) バネの伸びを $x = x_2 - x_1$ とするとき、 x_1, x_2 を m_1, m_2, x を用いて表わせ。

重心系では $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ がなりたつ

$x = x_2 - x_1$ をもちいると

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} x$$

$$x_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

(3) 個々の質点の運動方程式に変位を代入し、 x に対する運動方程式を導け。ただし、換算質量を μ とせよ。

(2)の x_1 を(1)の第一式に代入すると

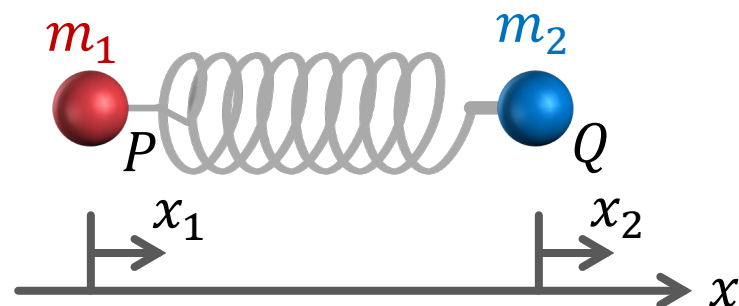
$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} x \right) = kx$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

$$\frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\underline{\mu \frac{d^2}{dt^2} x = -kx}$$



(4) 振幅を A 初期位相を δ とし、 x および x_1, x_2 を求めよ。

重心の運動方程式を解く

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{k}{\mu} x$$

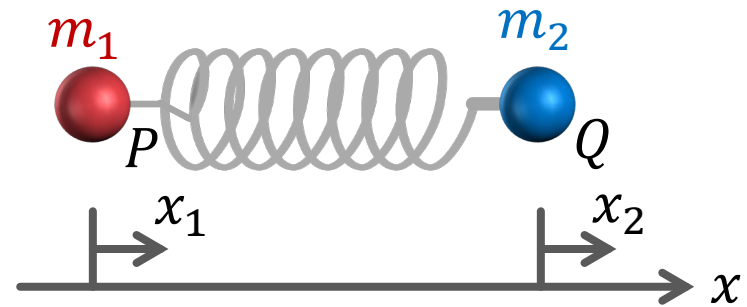
$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu} x$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{k}{\mu} = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{\mu}} i$$

よって一般解は

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{\mu}} t$$



$$\therefore x = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t + \delta \right)$$

よって、

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t + \delta \right)$$

$$x_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t + \delta \right)$$

[2] 2体問題 (制限三体問題)

#10力学演習

質量 M の恒星が宇宙空間に固定されているとする。その周りを、質量がそれぞれ m_1, m_2 の2個の惑星 P と Q が運動している。各惑星の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とし、万有引力定数を G とする。ここで、2つの重心座標 $\mathbf{r}_G$ と、相対座標 $\mathbf{r}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

(1) $\mathbf{r}_G$ が常に原点 O に一致するとき $|\mathbf{r}_1|:|\mathbf{r}_2|$ を求めよ。また、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を $\mathbf{r}$ を用いて表わせ。

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \text{より}$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$$

$$\therefore \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{m_2}{m_1}$$

これと $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ より

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

(2) 惑星 P の運動方程式を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を用いてそれぞれ表せ。
ただし、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1/\|\mathbf{r}_1\|, \mathbf{r}_2/\|\mathbf{r}_2\|$ とする。

惑星 P には、恒星からの引力と惑星 Q からの引力がはたらくので

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_1 &= -G \frac{Mm_1}{\|\mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} - G \frac{m_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \\ m_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_1 &= -G \frac{Mm_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} \mathbf{r}_1 - G \frac{m_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \end{aligned}$$

(3) P の運動方程式に(1)の結果を代入し、 $\mathbf{r}$ のみの運動方程式を導け。
ただし、換算質量 μ を用いてよい。

代入すると

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) = -G \frac{Mm_1}{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^3 \|\mathbf{r}\|^3} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} - G \frac{m_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right) = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \mu \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -G \frac{Mm_1}{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^3 \|\mathbf{r}\|^3} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} - G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \\
&= -G \frac{Mm_1(m_1 + m_2)^2}{m_2^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} - G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \\
&= -G\mu \left\{ \frac{M(m_1 + m_2)^2}{m_2^3} + (m_1 + m_2) \right\} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \\
\mu \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} &= -G\mu \left\{ \frac{M(m_1 + m_2)^3}{m_2^3} + (m_1 + m_2) \right\} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}
\end{aligned}$$

(4) 2つの惑星が、相対距離 $\|\mathbf{r}\| = d$ (一定)を保って等速円運動をするとき、すなわち $\mathbf{r} = d\mathbf{e}_r$, $\ddot{\phi} = 0$ とかけるとき、角速度 ω を求めよ。

半径 d の等速円運動では $\mathbf{r} = d\mathbf{e}_r$

微分すると $\dot{\mathbf{r}} = d\dot{\mathbf{e}}_r = d\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$

再度微分して $\ddot{\mathbf{r}} = d(\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2\mathbf{e}_r)$ ($\because \dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r$)

$\ddot{\mathbf{r}} = -d\dot{\phi}^2\mathbf{e}_r$ ($\because \ddot{\phi} = 0$)

これを代入すると

$$-\mu d\dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r = -G\mu \left\{ \frac{M(m_1 + m_2)^3}{m_2^3} + (m_1 + m_2) \right\} \frac{d\mathbf{e}_r}{d^3}$$

$$\dot{\phi}^2 = G \left\{ \frac{M(m_1 + m_2)^3}{m_2^3} + (m_1 + m_2) \right\} \frac{1}{d^3}$$

$$\omega = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{G}{d^3} \left\{ \frac{M(m_1 + m_2)^3}{m_2^3} + (m_1 + m_2) \right\}}$$

質量 m の等しい3つの質点 A, B, C が xy 平面上の3点 $(2, 0), (-2, 0), (0, 3)$ から速度 v でそれぞれ x 方向、 $-x$ 方向、 y 方向に動き出したとき、

(1) 時刻 t における重心の座標を求めよ。

時刻 t における A, B, C の座標は $(2 + vt, 0), (-2 - vt, 0), (0, 3 + vt)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_G &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{1}{3m} \left\{ m \begin{pmatrix} 2 + vt \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 - vt \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + vt \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + vt \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{v}{3}t \end{pmatrix}}}\end{aligned}$$

(2) 固定座標系における運動エネルギー K を求めよ。

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m \{ v^2 + (-v)^2 + v^2 \} = \underline{\underline{\frac{3}{2} m v^2}}$$

(3) 重心の運動エネルギー K_G を求めよ。

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \frac{v}{3} \end{pmatrix} \quad \text{であるから} \quad K_G = \frac{1}{2} (3m) \left(\frac{v}{3} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{6} m v^2}}$$

(4) 以上より、重心に相対的な運動エネルギー $K' = K - K_G$ を求めよ。

$$K' = K - K_G = \frac{3}{2} m v^2 - \frac{1}{6} m v^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3} m v^2}}$$

(5) 各点の重心に対する相対速度から相対的な運動エネルギーをもとめ、(4)の結果と一致することを示せ。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_G) = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} 2 + vt \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{v}{3}t \end{pmatrix} \right\} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 2 + vt \\ -1 - \frac{v}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{v}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_G) = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} -2 - vt \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{v}{3}t \end{pmatrix} \right\} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -2 - vt \\ -1 - \frac{v}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\frac{v}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_G) = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + vt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{v}{3}t \end{pmatrix} \right\} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \frac{2v}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2v}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m \left[\left\{ (v)^2 + \left(-\frac{v}{3}\right)^2 \right\} + \left\{ (-v)^2 + \left(-\frac{v}{3}\right)^2 \right\} + \left\{ (0)^2 + \left(\frac{2v}{3}\right)^2 \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2}mv^2 \left[\left\{ \frac{10}{9} \right\} + \left\{ \frac{10}{9} \right\} + \left\{ \frac{4}{9} \right\} \right] \\
&= \underline{\underline{\frac{4}{3}mv^2}}
\end{aligned}$$

よって、一致する。