

[1] ベクトルの外積の計算

#9力学演習

$\mathbf{A} = [2, -1, 3]$, $\mathbf{B} = [1, 4, 1]$ のとき

(1) $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算しなさい。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

(2) $(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \times (2\mathbf{A} - \mathbf{B})$ を計算しなさい。

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 2\mathbf{A} - \mathbf{B} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \times (2\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 - 5 \cdot (-6) \\ 5 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot (-6) - 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 65 \\ -5 \\ -45 \end{pmatrix}}$$

$A = [2, -1, 3]$, $B = [1, 4, 1]$ のとき

(3) $C = [-3, 1, -2]$ とするとき、 A, B, C を3辺とする平行六面体の体積を求めよ。

スカラー三重積 $C \cdot (A \times B)$ は A, B, C を3辺とする平行六面体の体積を表すから

$$A \times B = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot (A \times B) = (-13) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) = \underline{\underline{22}}$$

(1) ベクトル3重積の式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を証明せよ。

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x) \\ A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_y B_y + A_z B_z)C_x \\ (A_z C_z + A_x C_x)B_y - (A_z B_z + A_x B_x)C_y \\ (A_x C_x + A_y C_y)B_z - (A_x B_x + A_y B_y)C_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_x \\ (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)B_y - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_y \\ (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)B_z - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_z \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

(証明終わり)

(2) ベクトルの外積の微分について次式を証明せよ。

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} \right]_x &= \frac{d}{dt} (A_y B_z - A_z B_y) \\ &= \frac{dA_y}{dt} B_z + A_y \frac{dB_z}{dt} - \frac{dA_z}{dt} B_y - A_z \frac{dB_y}{dt} \\ &= \left(\frac{dA_y}{dt} B_z - A_y \frac{dB_z}{dt} \right) + \left(A_z \frac{dB_y}{dt} - \frac{dA_z}{dt} B_y \right) \\ &= \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]_x \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (\text{証明終わり})$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\textcircled{1} \quad \| \mathbf{A} \times \mathbf{B} \|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2$$

$$\| \mathbf{A} \times \mathbf{B} \|^2 = (AB \sin \theta)^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = (AB \cos \theta)^2 = A^2 B^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore \| \mathbf{A} \times \mathbf{B} \|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 \quad (\text{証明終わり})$$

$$\textcircled{2} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})]_x = (A_y + B_y)(A_z - B_z) - (A_z + B_z)(A_y - B_y)$$

$$= 2A_z B_y - 2A_y B_z$$

$$= 2(A_z B_y - A_y B_z)$$

$$= 2[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x$$

$$\therefore [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})] = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{証明終わり})$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\textcircled{3} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$$

$$[(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C})]_x = (A_y - B_y)(B_z - C_z) - (A_z - B_z)(B_y - C_y)$$

$$= A_y B_z - A_y C_z - \cancel{B_y B_z} + B_y C_z - A_z B_y + \cancel{B_z B_y} + A_z C_y - B_z C_y$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) + (B_y C_z - B_z C_y) + (A_z C_y - A_y C_z)$$

$$= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x + [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]_x + [\mathbf{C} \times \mathbf{A}]_x$$

$$\therefore (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \quad (\text{証明終わり})$$

運動する質点 m の物体 P の変位ベクトル $\mathbf{r}$ が以下で与えられるとき、
角運動量と力のモーメントを求め、回転の運動方程式が成り立つことを示せ。

$$(1) \quad \mathbf{r} = [2t^2, 1 - 2t, t^2] \quad \dot{\mathbf{r}} = [4t, -2, 2t] \quad \ddot{\mathbf{r}} = [4, 0, 2]$$

よって、物体Pの運動量 $\mathbf{p}$ と、これにはたらく力 $\mathbf{f}$ は、

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m[4t, -2, 2t] = [4mt, -2m, 2mt]$$

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m[4, 0, 2] = [4m, 0, 2m]$$

角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2t^2 & 1 - 2t & t^2 \\ 4mt & -2m & 2mt \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2t) \cdot 2mt - t^2 \cdot (-2m) \\ t^2 \cdot 4mt - 2t^2 \cdot 2mt \\ 2t^2 \cdot (-2m) - (1 - 2t) \cdot 4mt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m(t - t^2) \\ 0 \\ -4m(t - t^2) \end{pmatrix}$$

力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2t^2 & 1 - 2t & t^2 \\ 4m & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2t) \cdot 2m - t^2 \cdot 0 \\ t^2 \cdot 4m - 2t^2 \cdot 2m \\ 2t^2 \cdot 0 - (1 - 2t) \cdot 4m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m(1 - 2t) \\ 0 \\ -4m(1 - 2t) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2m(1 - 2t) \\ 0 \\ -4m(1 - 2t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}$$

運動する質点 m の物体 P の変位ベクトル $\mathbf{r}$ が以下で与えられるとき、
角運動量と力のモーメントを求め、回転の運動方程式が成り立つことを示せ。

$$(2) \quad \mathbf{r} = [\cos t, \sin t, 2t] \quad \dot{\mathbf{r}} = [-\sin t, \cos t, 2] \quad \ddot{\mathbf{r}} = [-\cos t, -\sin t, 0]$$

よって、物体Pの運動量 $\mathbf{p}$ と、これにはたらく力 $\mathbf{f}$ は、

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m[-\sin t, \cos t, 2] = [-m \sin t, m \cos t, 2m]$$

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m[-\cos t, -\sin t, 0] = [-m \cos t, -m \sin t, 0]$$

角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos t & \sin t & 2t \\ -m \sin t & m \cos t & 2m \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \sin t - 2mt \cos t \\ -2mt \sin t - 2m \cos t \\ m \cos^2 t + m \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m(\sin t - t \cos t) \\ 2m(-\cos t - t \sin t) \\ m \end{pmatrix}$$

力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos t & \sin t & 2t \\ -m \cos t & -m \sin t & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2mt \sin t \\ -2mt \cos t - 0 \\ -m \sin t \cos t + m \sin t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2mt \sin t \\ -2mt \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2m(\cos t - \cos t - t \sin t) \\ 2m(\sin t - \sin t - t \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2mt \sin t \\ -2mt \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}$$

[4] 角運動量

#9 力学演習

てこの支点から 1.0 m のところに質量 200 kg の岩がのっている。
てこは水平から 30° 傾いている。反対側の支点から 2.5 m のところに
力を加えて岩を持ち上げようとする。

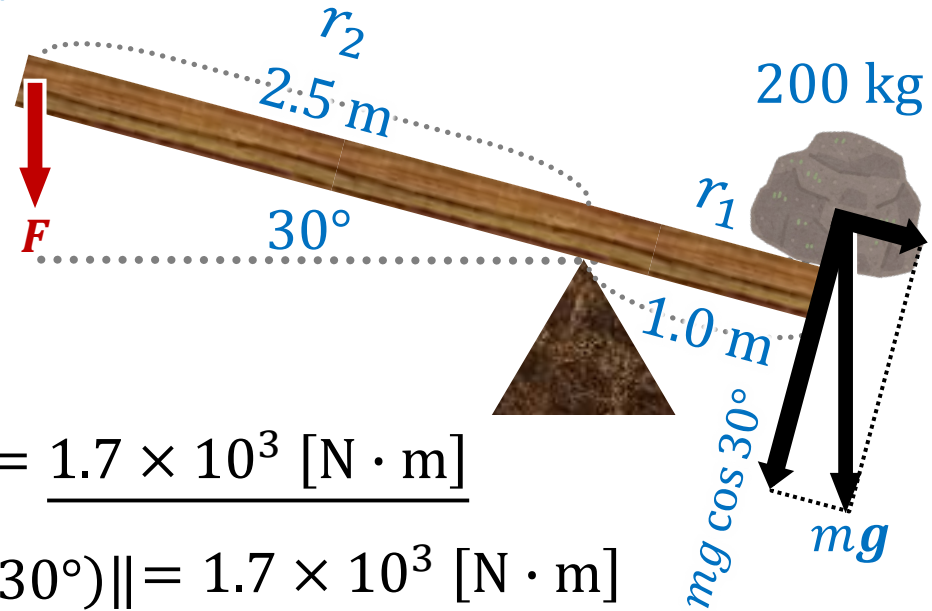
- (1) 持ち上げるのに必要最小限のトルク
(力のモーメント) の大きさはいくらか。

必要なトルク (力のモーメント) は
原点から見た力ベクトル

$$\begin{aligned} N &= r_1 \times f = r_1 \times mg \cos 30^\circ \\ &= 1.0 \times 200 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{1.7 \times 10^3 \text{ [N} \cdot \text{m]}} \end{aligned}$$

または

$$\|N\| = \|r \times f\| = \|rf \sin(90^\circ - 30^\circ)\| = \underline{1.7 \times 10^3 \text{ [N} \cdot \text{m]}}$$



- (2) 力を鉛直に加えるとき必要最小限の力の大きさはいくらか。

$$N = r_2 \times F \cos 30^\circ$$

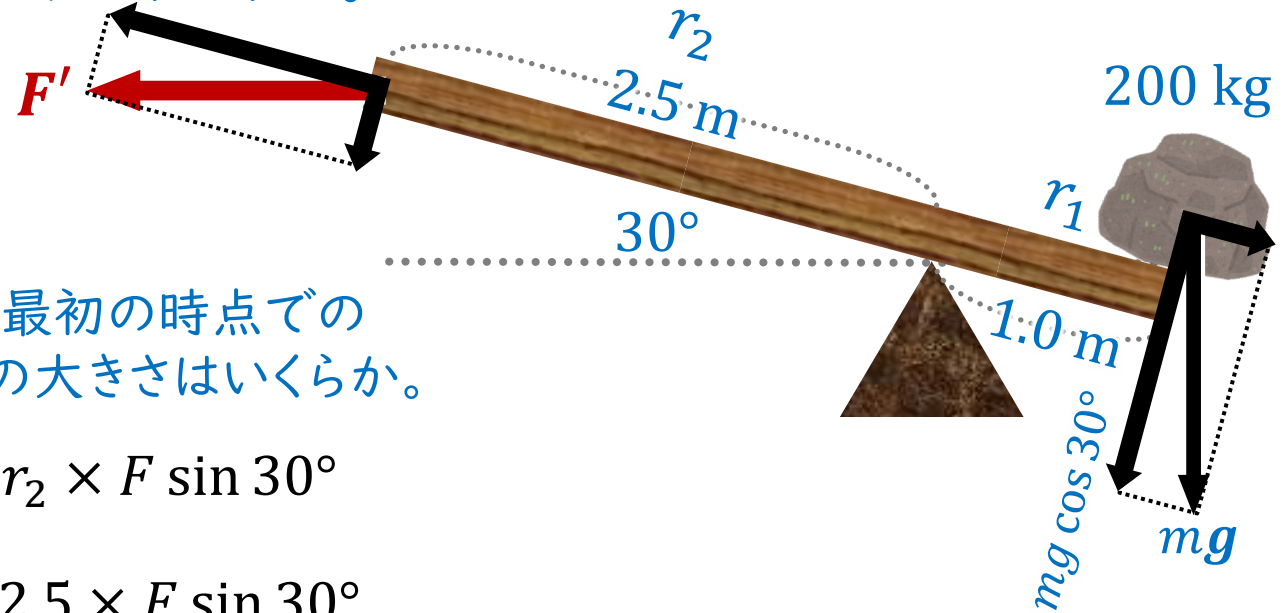
$$r_1 \times mg \cos 30^\circ = 2.5 \times F \cos 30^\circ$$

$$F = \frac{r_1}{r_2} mg = \frac{1.0}{2.5} \times 200 \times 9.8 = \underline{7.8 \times 10^2 \text{ [N]}}$$

[4] 角運動量

#9 力学演習

てこの支点から 1.0 m のところに質量 200 kg の岩がのっている。
てこは水平から 30° 傾いている。反対側の支点から 2.5 m のところに
力を加えて岩を持ち上げようとする。



(3) 力を水平に加えるとき最初の時点での
必要最小限のちからの大きさはいくらか。

$$N = r_2 \times F \sin 30^\circ$$

$$r_1 \times mg \cos 30^\circ = 2.5 \times F \sin 30^\circ$$

$$F = \frac{r_1}{r_2} mg \frac{1}{\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1.0}{2.5} \times 200 \times 9.8 \times \sqrt{3} = \underline{1.4 \times 10^3 \text{ [N]}}$$

[5] 角運動量

#9力学演習

長さ l の糸で支点 A から吊るされた質量 m のおもりが、糸と鉛直方向との間の角度を θ を保ちながら、水平面内で等速円運動をしている円錐振り子がある。円軌道の中心を O とする。おもりは支点側から見て反時計回りに速度 v で進んでいる。

- (1) O のまわりのおもりの角運動量 $L_O(t)$ の大きさを v を使って表わし、向きを図示せよ。

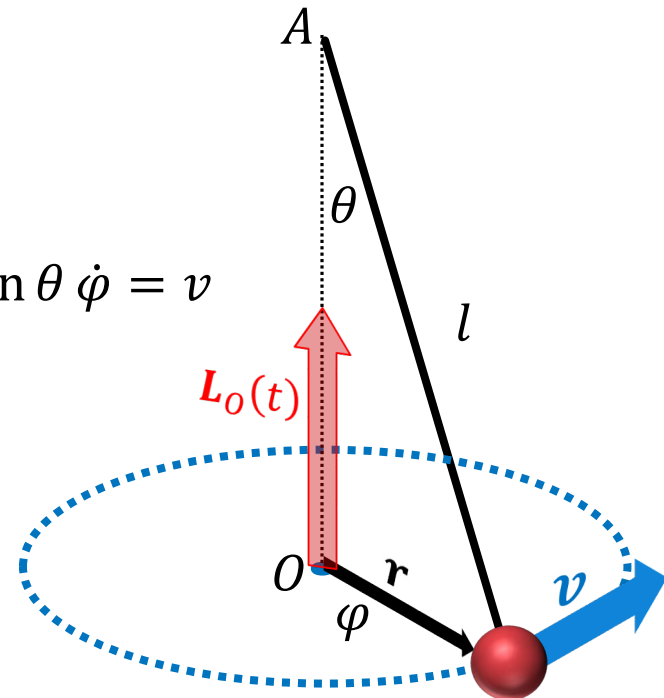
$$\mathbf{r}_O = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \varphi \\ l \sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{微分}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -l \sin \theta \dot{\varphi} \sin \varphi \\ l \sin \theta \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -v \sin \varphi \\ v \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \because l \sin \theta \dot{\varphi} = v$$

$$\mathbf{L}_O(t) = \mathbf{r}_O \times m\mathbf{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ l \sin \theta \cos \varphi & l \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -mv \sin \varphi & mv \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mlv \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{L}_O(t)\| = \underline{mlv \sin \theta}$$



[5] 角運動量

#9 力学演習

長さ l の糸で支点 A から吊るされた質量 m のおもりが、糸と鉛直方向との間の角度を θ を保ちながら、水平面内で等速円運動をしている円錐振り子がある。円軌道を中心を O とする。おもりは支点側から見て反時計回りに速度 v で進んでいる。

- (2) 時刻 t における A のまわりのおもりの角運動量 $L_A(t)$ を求め、向きを図示せよ。

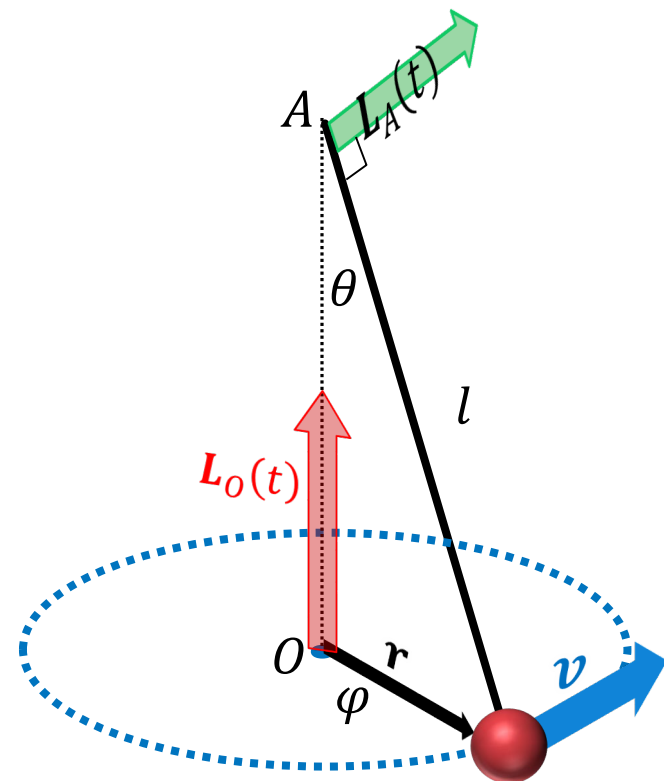
$$\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{A \rightarrow O} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \varphi \\ l \sin \theta \sin \varphi \\ -l \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_A(t) = (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{A \rightarrow O}) \times m\mathbf{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ l \sin \theta \cos \varphi & l \sin \theta \sin \varphi & -l \cos \theta \\ -mv \sin \varphi & mv \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} mlv \cos \theta \cos \varphi \\ mlv \cos \theta \sin \varphi \\ mlv \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{L}_A(t)\| = \underline{mlv}$$



[5] 角運動量

#9 力学演習

長さ l の糸で支点 A から吊るされた質量 m のおもりが、糸と鉛直方向との間の角度を θ を保ちながら、水平面内で等速円運動をしている円錐振り子がある。円軌道を中心を O とする。おもりは支点側から見て反時計回りに速度 v で進んでいる。

(3) $d(L_A(t))/dt$ の向きを図示し、その大きさを求めよ。

おもりにはたらいている力は張力 S と重力 $m\mathbf{g}$ であるから

$$\mathbf{f} = \mathbf{S} + m\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -S \sin \theta \cos \varphi \\ -S \sin \theta \sin \varphi \\ S \cos \theta - mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \tan \theta \cos \varphi \\ -mg \tan \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore S \cos \theta = mg$$

$$\frac{d\mathbf{L}_A(t)}{dt} = \mathbf{N}_A = (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{A \rightarrow O}) \times \mathbf{f}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ l \sin \theta \cos \varphi & l \sin \theta \sin \varphi & -l \cos \theta \\ -mg \tan \theta \cos \varphi & -mg \tan \theta \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} mlg \sin \theta \sin \varphi \\ mlg \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \left\| \frac{d\mathbf{L}_A(t)}{dt} \right\| = \underline{mlg \sin \theta}$$

