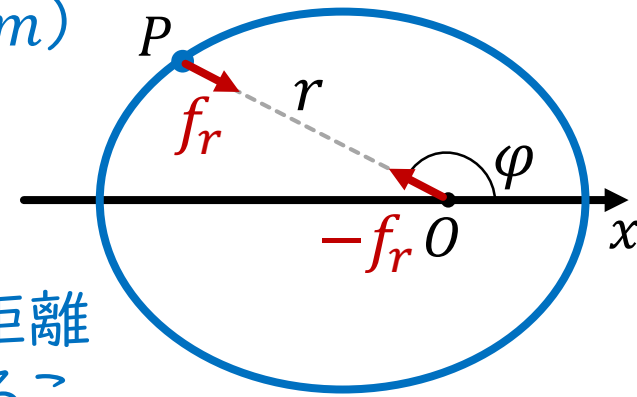


[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

右図のように太陽O (質量: M) が惑星P (質量: m) に及ぼす力 f_r は、万有引力の法則から

$$f_r = -G \frac{Mm}{r^2}$$

となる。ただし、 G は万有引力定数、 r はOP間の距離である。以下に従ってこの軌道が楕円軌道となることを導け。



(1) Pの位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とするとき、速度ベクトルおよび、加速度ベクトルを $\mathbf{a} = [a_r, a_\varphi]$ を r, φ で表わせ。 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$ の微分は既知としてよい

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \underline{\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi$$

[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\mathbf{e}_r)$$

$$\mathbf{a} = \underline{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi}$$

(2) $r^2\dot{\varphi} = K$, $u = 1/r$ とおいたとき、 $\dot{r}$ および $\ddot{r}$ を $du/d\varphi$ および $d^2u/d\varphi^2$ などを用いて表せ。

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \boxed{\frac{dr}{d\varphi}} \boxed{\frac{d\varphi}{dt}} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{red}} r^2\dot{\varphi} = K \text{ より } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{K}{r^2} \\ \xrightarrow{\text{blue}} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \end{array} \quad = -K \frac{du}{d\varphi}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} &= -K \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) = -K \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) = -K \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} \right) \\ &= \underline{-\frac{K^2}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)} \end{aligned}$$

[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

(3) 動径方向の運動方程式から u に関する2階微分方程式を解くことで軌道を求めよ。

動径方向の運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$r^2\ddot{r} - \frac{(r^2\dot{\phi})^2}{r} = -GM$$

$$r^2\ddot{r} - \frac{K^2}{r} = -GM$$

(2) より

$$-K^2 \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) - \frac{K^2}{r} = -GM$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{K^2}$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) + u = \frac{GM}{K^2}$$

$$u = C \text{ (定数) とおくと } C = \frac{GM}{K^2}$$

$$\text{同伴方程式は } \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) + u = 0$$

$$u = e^{\lambda\phi} \text{ とおくと特性方程式は}$$
$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

よって同伴方程式の一般解は

$$u = C_1 \cos \phi + C_2 \sin \phi$$
$$= A \cos(\phi - \phi_0)$$

[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

以上より

$$u = \frac{GM}{K^2} + C \cos(\varphi - \varphi_0)$$

よって

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{K^2} + C \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$r = \frac{1}{\frac{GM}{K^2} + C \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$r = \frac{\frac{K^2}{GM}}{1 + \frac{CK^2}{GM} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$l = \frac{K^2}{GM} \quad \varepsilon = \frac{CK^2}{GM} \text{ (離心率)}$$

φ_0 : 初期位相

の楕円軌道となる。

[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

- (4) 近日点距離 r_0 、近日点でのPの速さを v_0 とするとき、
遠日点距離 r_1 と遠日点での速さを v_1 を求めよ。

面積速度一定より、

$$\frac{1}{2} r_0 v_0 = \frac{1}{2} r_1 v_1 \quad \therefore v_1 = \frac{r_0 v_0}{r_1}$$

また、両点において
力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{r_0} = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{Mm}{r_1}$$

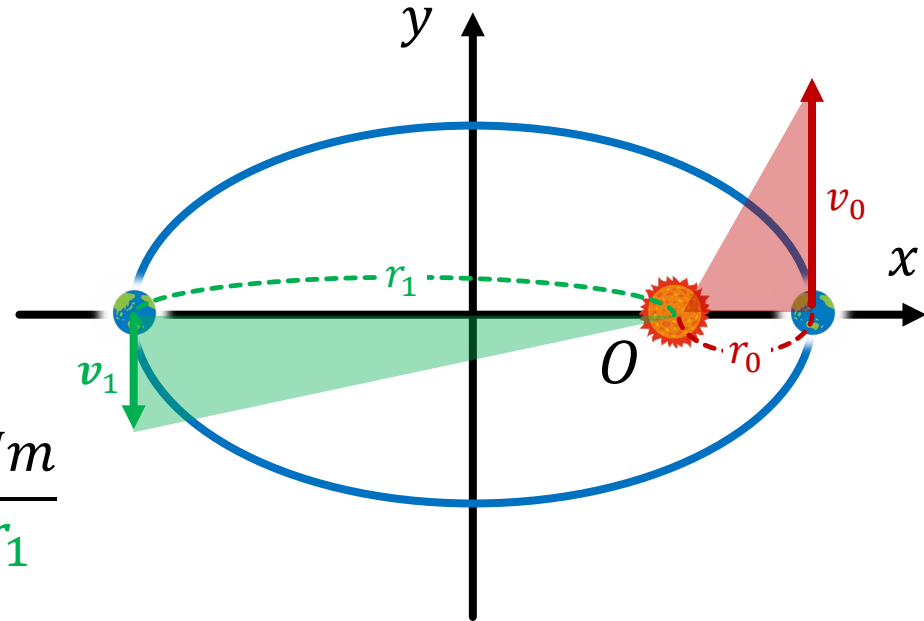
両式より

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{r_0} = \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_0^2}{r_1^2} - G \frac{Mm}{r_0}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} \right) = GMm \left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 r_0} \right)$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 \left(\frac{r_1 + r_0}{r_1} \right) = GM \left(\frac{1}{r_0} \right)$$



[1] 万有引力からケプラーの第一法則 #8力学演習

$$v_0^2 \left(\frac{r_1 + r_0}{r_1} \right) = 2GM \left(\frac{1}{r_0} \right) \quad \therefore r_1 = \frac{r_0^2 v_0^2}{2GM - r_0 v_0^2}$$
$$\therefore v_1 = \frac{r_0 v_0}{r_1} = \frac{2GM - r_0 v_0^2}{r_0 v_0}$$

(5) 離心率 ε を近日点距離 r_0 と遠日点距離 r_1 を用いて表わせ。

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{において}$$

近日点は $\varphi = 0$ 、遠日点は $\varphi = \pi$ のときであるから

$$r_0 = \frac{l}{1 + \varepsilon} \quad r_1 = \frac{l}{1 - \varepsilon}$$

$$l = r_0(1 + \varepsilon) = r_1(1 - \varepsilon) \quad \therefore \varepsilon = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}$$

- (1) 万有引力による楕円運動において、その力学的エネルギーを E 、面積速度を K としたとき、 $\dot{r}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - G\frac{Mm}{r} \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - G\frac{Mm}{r} \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mK^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r} \\
 \therefore \dot{r}^2 &= \frac{2E}{m} - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}
 \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}}$$

- (2) 近日点および遠日点では、 $\dot{r} = 0$ であることを用いて、その解を r_0 、 r_1 として r の2次方程式を含む式で表せ。

題意より r_0 、 r_1 が $\dot{r}$ の分子の解であるので

$$\frac{2E}{m} - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} = \frac{2E}{mr^2}(r - r_0)(r - r_1)$$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{mr^2}(r - r_0)(r - r_1)}$$

[2] ケプラー方程式

#8力学演習

(3) 右図のように離心角 θ を定義したとき、
楕円軌道の式、近日点距離、遠日点
距離はどのように書けるか。

楕円上の点 $P(x, y)$ に対応する
円上の点 $Q(a, \theta)$ とすると

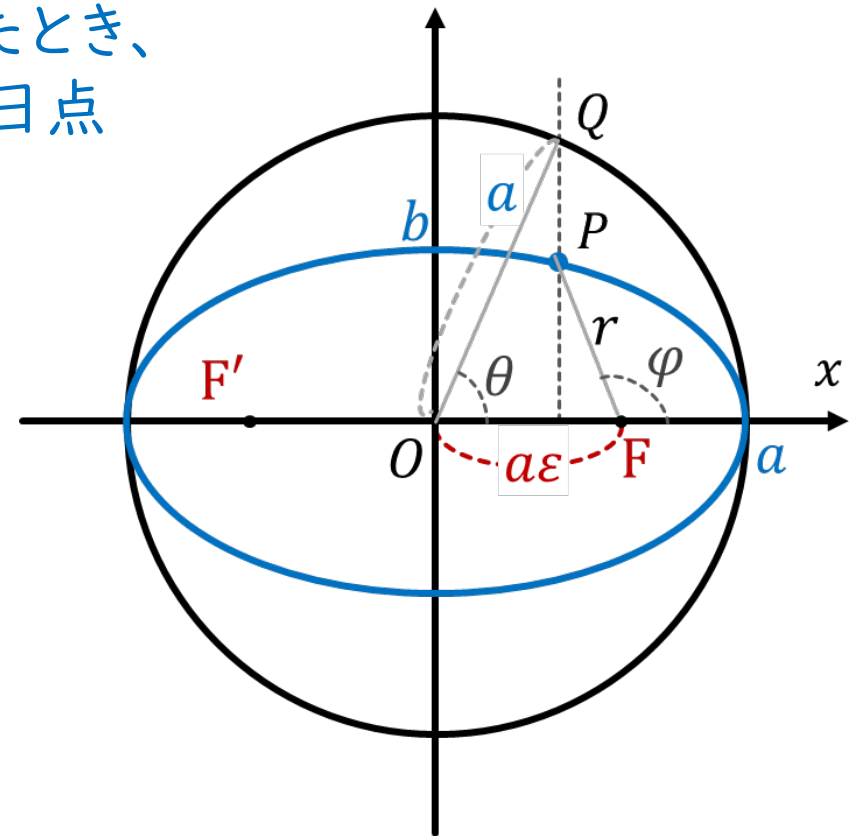
$$x = a \cos \theta$$

$$y = \frac{b}{a} \times a \sin \theta = b \sin \theta$$

$c = a\varepsilon$ を用いれば、

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - c)^2 + y^2 \\ &= (a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2 \\ &= a^2(1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

$$r = \underline{a(1 - \varepsilon \cos \theta)}$$



また、

$$r_0 = a(1 - \varepsilon)$$

$$r_1 = a(1 + \varepsilon)$$

(4) 以上より、微分方程式を解き、ケプラー方程式を導出せよ。

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{mr^2} (r - r_0)(r - r_1)} \quad \text{変数分離して} \quad dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_0)(r - r_1)}}$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \theta) \text{ より}$$

$$dr = a\varepsilon \sin \theta d\theta \text{ をもちいると}$$

右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_0)(r - r_1)}} &= \pm \sqrt{\frac{m}{-2E}} \frac{a(1 - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{m}{-2E}} a(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

両辺積分して

$$t = \frac{\pm a}{\sqrt{-2E/m}} (\theta - \varepsilon \sin \theta) + C$$

$$t = 0 \text{ で } \theta = 0 \text{ とすると}$$

$$t = \frac{\pm a}{\sqrt{-2E/m}} (\theta - \varepsilon \sin \theta) + C$$

$t = 0$ で $\theta = 0$ とすると

$$t = \frac{a}{\sqrt{-2E/m}} (\theta - \varepsilon \sin \theta)$$

ここで $t = T$ のとき $\theta = 2\pi$ であるから

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E/m}} \quad \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{-2E/m}}}$$

以上より、

$$t = \frac{1}{\omega} (\theta - \varepsilon \sin \theta)$$

$$\underline{\omega t = \theta - \varepsilon \sin \theta}$$

[3] 地球振り子

#8力学演習

- (1) 地球の中心を通り、まっすぐに通り抜ける穴を掘ったと仮定する。地球の密度 ρ は一様とし、空気抵抗や摩擦などの一切の抵抗力は働かないものとして、この穴に落とした質量 m の物体Pは単振動することを示し、その角振動数 ω と周期 T を求めよ。

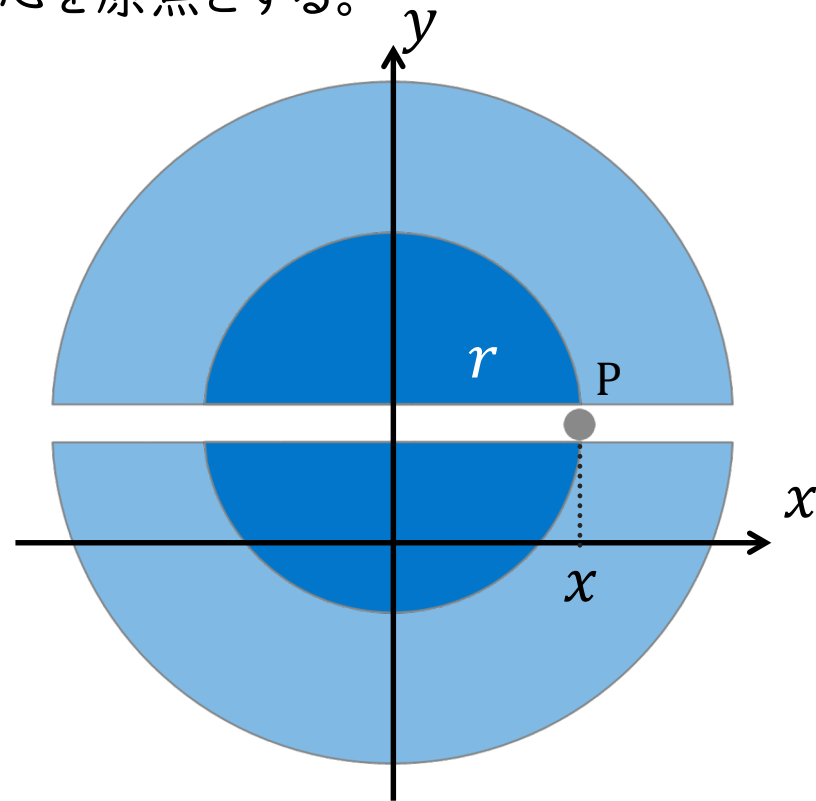
右図のように穴に沿って x 軸をとり、地球の中心を原点とする。

位置 x の一辺ある質点Pにはたらく力 f は
P よりも内側の球体の質量

$$M(x) = \frac{4}{3}\pi\rho x^3$$

によるだけなので、

$$\begin{aligned} f(x) &= -G \frac{M(x)m}{x^2} = -G \frac{m}{x^2} \frac{4}{3}\pi\rho x^3 \\ &= -\frac{4}{3}\pi G m \rho x \end{aligned}$$



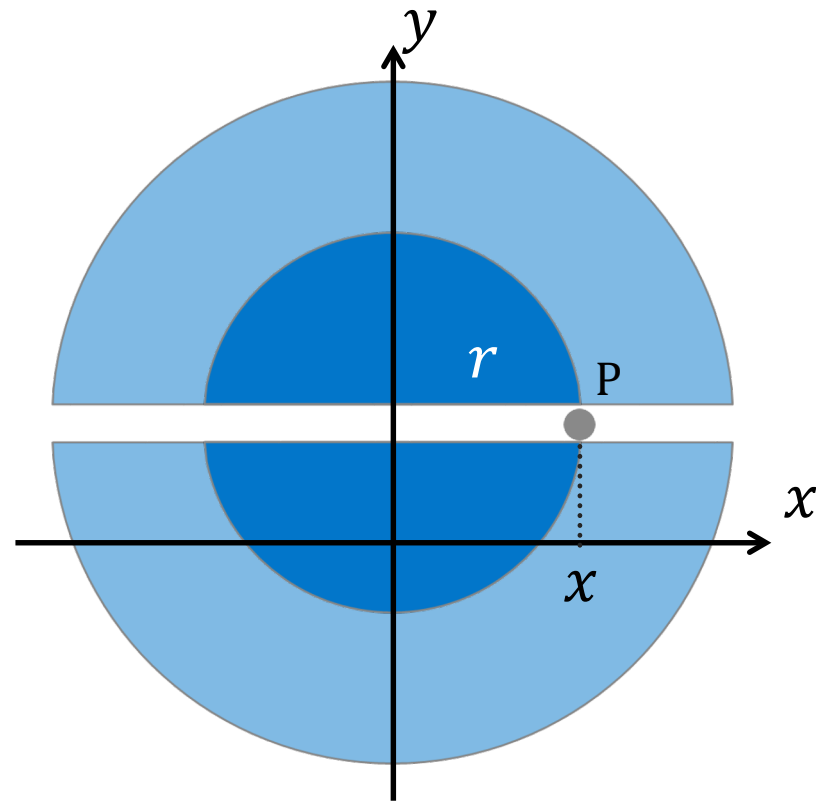
運動方程式をたてると、

$$m\ddot{x} = -\frac{4}{3}\pi G m \rho x \quad \ddot{x} = -\frac{4}{3}\pi G \rho x$$

よって、Pは単振動を行い、
角振動数 ω と周期 T は

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho}}$$
$$= \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}}$$



[3] 地球振り子

#8力学演習

(2) (1)の穴が中心から y 離れたとき、角振動数 ω と周期 T を求めよ。

(1)と同様に位置 x の一辺ある質点Pにはたらく力 f は
P よりも内側の球体の質量

$$M(x) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

によるだけなので、 $f(x) = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r$

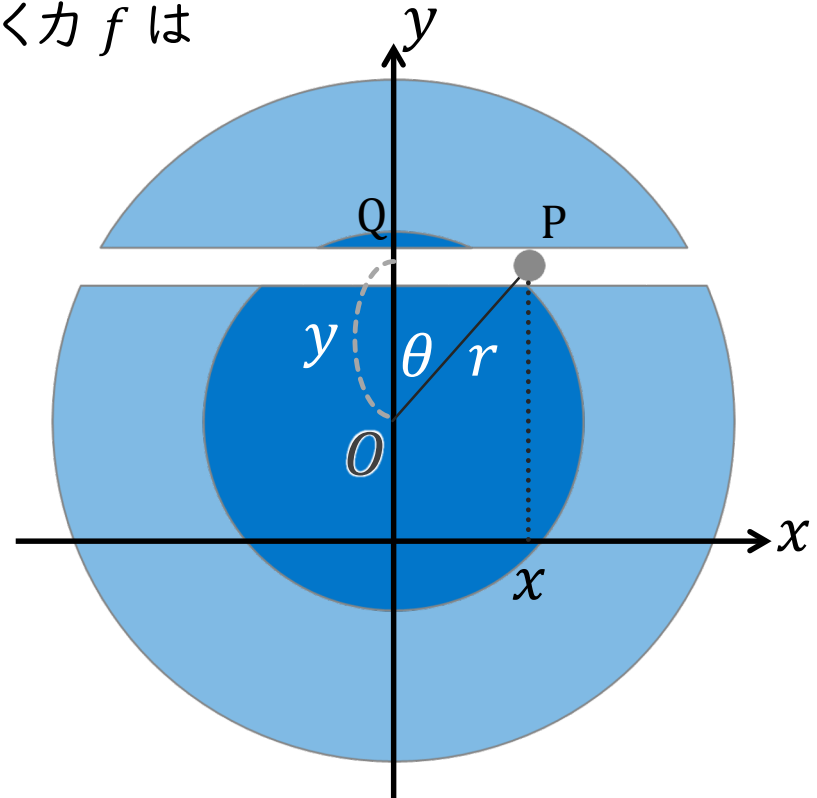
右図で $\angle POQ$ を θ とおくと
運動方向にはたらく力は

$$\begin{aligned} f(x) \sin \theta &= -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r \sin \theta \\ &= -\frac{4}{3}\pi Gm\rho x \end{aligned}$$

運動方程式が同じなので、

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$



(3) 地球の半径を R とするとき、(i) (1)の中心を通る穴を通して反対側に達するまでの時間と(ii) 同じ出発点から適当な速さで水平投射し、半円運動して反対側に達するまでの時間をそれぞれ求めよ。

(i) (1)より反対側に達する時間は周期の半分であるから

$$T_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

(ii) 半円運動で反対側に達するとき、
重力が向心力となる円運動であるから

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{4}{3} \pi G m \rho R \quad v = R \sqrt{\frac{4}{3} \pi G \rho}$$

$$T_2 = \frac{\pi R}{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

よって同じになる。

