

[1] 円錐曲線

#7力学演習

- (1) 定直線 LM への距離が定点 F との距離の $1/\varepsilon$ 倍となる点 $P(r, \theta)$ の軌跡が

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

と書けることを示せ。ただし、 $\theta = 90^\circ$ のときの点 P を点 D としたときに $\overline{DF} = l$ とする。

点 P から定直線 LM への垂線の足を Q とすると、

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = \varepsilon \quad \text{であるから} \quad \overline{PQ} = \frac{r}{\varepsilon}$$

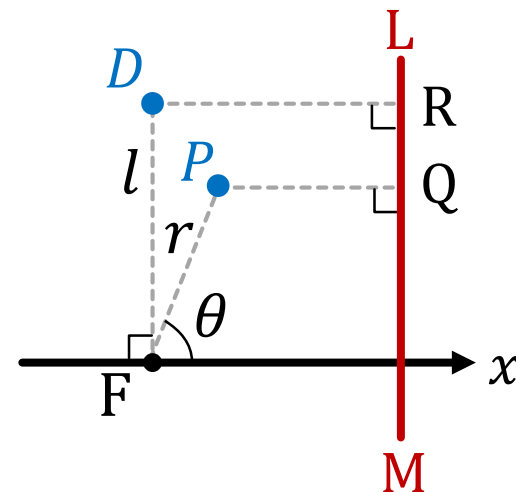
同様に、点 D から定直線 LM への垂線の足を R とすると、

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DR}} = \varepsilon \quad \text{であるから} \quad \overline{DR} = \frac{l}{\varepsilon}$$

よって、図より $r \cos \theta + \overline{PQ} = \overline{DR}$

$$r \cos \theta + \frac{r}{\varepsilon} = \frac{l}{\varepsilon}$$

$$\therefore r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$



- (2) $\varepsilon < 1$ のとき点 $P(r, \theta)$ は楕円軌道を、 $\varepsilon > 1$ のとき双曲線軌道を、 $\varepsilon = 1$ のとき放物線軌道を描くことを示せ。

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad \text{において} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{を代入すると}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x = l$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l - \varepsilon x$$

$$x^2 + y^2 = (l - \varepsilon x)^2$$

$$x^2 + y^2 = l^2 - 2l\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$$

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2l\varepsilon x + y^2 = l^2$$

(i) $1 - \varepsilon^2 > 0$ のとき、
すなわち、 $1 > \varepsilon > 0$ のとき

$$(1 - \varepsilon^2) \left\{ x + \frac{l\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right\}^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - \varepsilon^2}$$

[1] 円錐曲線

#7力学演習

(i) $1 - \varepsilon^2 > 0$ のとき、すなわち、 $1 > \varepsilon > 0$ のとき

$$(1 - \varepsilon^2) \left\{ x + \frac{l\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right\}^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - \varepsilon^2}$$

これは焦点の一つを
原点とする**楕円**となる

(ii) $1 - \varepsilon^2 < 0$ のとき、すなわち、 $1 < \varepsilon$ のとき

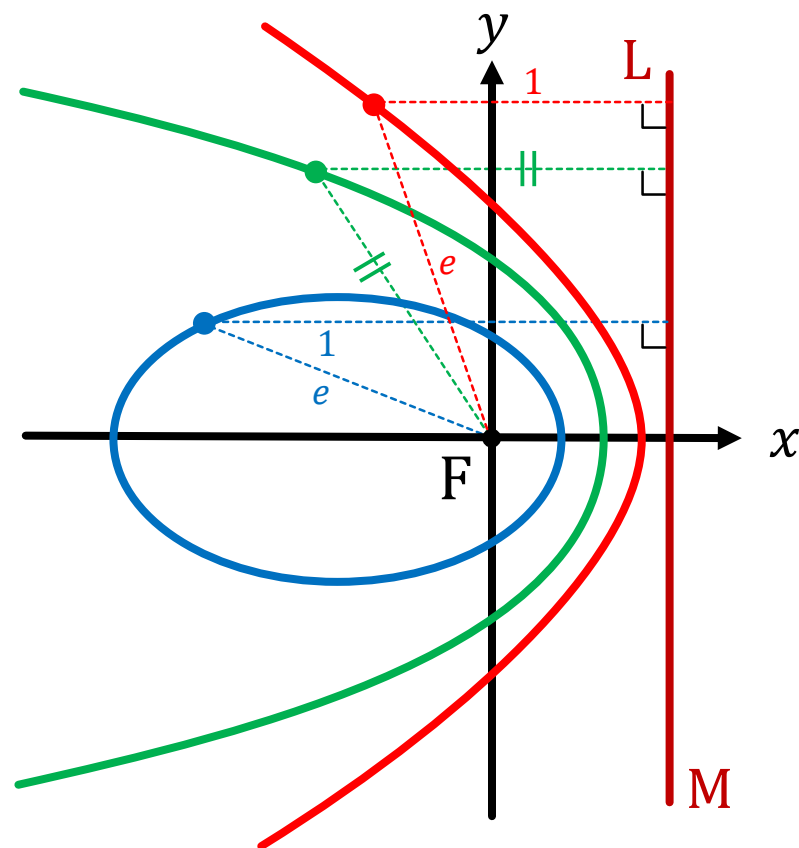
$$(\varepsilon^2 - 1) \left\{ x + \frac{l\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right\}^2 - y^2 = \frac{l^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

これは焦点の一つを
原点とする**双曲線**となる

(iii) $1 - \varepsilon^2 = 0$ のとき、
すなわち、 $\varepsilon = 1$ のとき

$$2l\varepsilon x + y^2 = l^2$$
$$y^2 = -2l \left(x + \frac{l}{2} \right)$$

これは原点を焦点とする
放物線となる



(3) 長径 a 、短径 b の楕円の面積は $S = \pi ab$ となる。

楕円を極方程式(1)で書かれるとき、楕円の面積を ε と l で表わせ。

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad \text{において}$$

$$\theta = 0 \text{ のときの } r \text{ は } r_0 = \frac{l}{1 + \varepsilon}$$

$$\theta = \pi \text{ のときの } r \text{ は } r_\pi = \frac{l}{1 - \varepsilon}$$

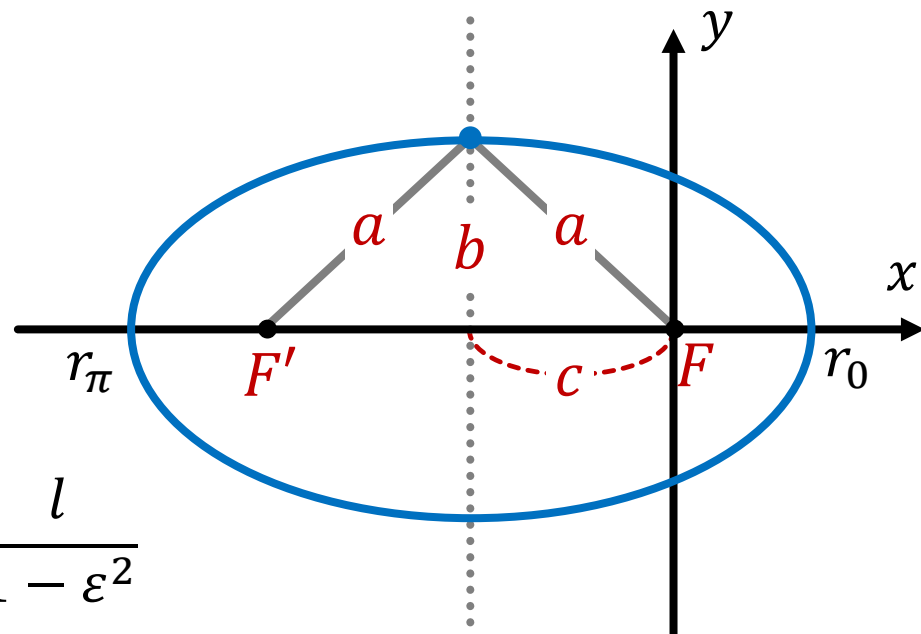
$$\text{よって、長径 } a \text{ は } a = \frac{1}{2}(r_0 + r_\pi) = \frac{l}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\text{短径 } b \text{ は } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (a - r_0)^2 = 2ar_0 - r_0^2$$

$$= 2 \frac{l}{1 - \varepsilon^2} \frac{l}{1 + \varepsilon} - \left(\frac{l}{1 + \varepsilon} \right)^2 = \frac{l^2}{1 - \varepsilon^2} \quad \therefore b = \frac{l}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

以上より、

$$S = \pi ab = \pi \frac{l}{1 - \varepsilon^2} \frac{l}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\pi l^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$



(1) 2次元極座標の単位ベクトルのを時間に対して1階微分すると、

$$\dot{e}_r = \dot{\varphi} e_\varphi \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_r$$

と書けることを学んだ。それぞれの2階微分を求めよ。

$$\begin{aligned}\ddot{e}_r &= \frac{d}{dt}(\dot{e}_r) = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} e_\varphi) = \ddot{\varphi} e_\varphi + \dot{\varphi} \dot{e}_\varphi = \ddot{\varphi} e_\varphi + \dot{\varphi}(-\dot{\varphi} e_r) \\ &= \underline{\ddot{\varphi} e_\varphi - \dot{\varphi}^2 e_r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{e}_\varphi &= \frac{d}{dt}(\dot{e}_\varphi) = \frac{d}{dt}(-\dot{\varphi} e_r) = -\ddot{\varphi} e_r - \dot{\varphi} \dot{e}_r = -\ddot{\varphi} e_r - \dot{\varphi}(\dot{\varphi} e_\varphi) \\ &= \underline{-\ddot{\varphi} e_r - \dot{\varphi}^2 e_\varphi}\end{aligned}$$

- (2) 点Pの位置ベクトルが $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ であらわされるとき、速度ベクトル $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ を求めよ。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \underbrace{\dot{r}\mathbf{e}_r}_{\text{動径方向の速度}} + \underbrace{r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi}_{\text{回転方向の速度}}$$

- (3) 半径 R (一定) の円周上を、一定の角速度 $\omega = \dot{\theta}$ で回転する質点の加速度ベクトル $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ を求め、その向きについて考察せよ。

$r = R$ (一定)、 $\dot{r} = 0$ 、 $\dot{\theta} = \omega$ を前問の速度の式を代入すると

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi = 0 \cdot \mathbf{e}_r + R\omega\mathbf{e}_\phi = R\omega\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\mathbf{e}_\phi) = R\omega\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = R\omega\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_r = -\omega\mathbf{e}_r \text{ であるから } \mathbf{a} = \underline{-R\omega^2\mathbf{e}_r}$$

加速度は $-\mathbf{e}_r$ 方向であるから、常に円の中心方向を向く

- (1) ケプラーの第1法則 (惑星は楕円軌道 ((1) 式で $0 < \varepsilon < 1$) を描く) と、第2法則 (面積速度一定) を用いて、惑星の公転周期 T の2乗を面積速度 A と a および l を用いて表わせ。([1] (3) の結果を用いてよい)

第1法則より惑星の楕円軌道が (1) 式で書かれるとき、その面積 S は [1]-(3) より、

$$S = \frac{\pi l^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

第2法則より、面積速度を一定値 A とすると、

惑星運動の周期 T は $T = \frac{S}{A}$ より、

$$T^2 = \frac{S^2}{A^2} = \frac{\pi^2 l^4}{A^2 (1 - \varepsilon^2)^3} = \frac{\pi^2 l}{A^2} \left(\frac{l}{1 - \varepsilon^2} \right)^3 = \frac{\pi^2 l}{A^2} a^3 \quad \because a = \frac{l}{1 - \varepsilon^2}$$

(2) 惑星が太陽から受ける引力は、

$$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$$

と書ける。万有引力の式と比較し、(1)の式から l を消去し、第3法則を示せ。

$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$ と万有引力の式 $f(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$ を比較することにより、

$$\frac{h^2}{l} = GM \quad \therefore l = \frac{h^2}{GM}$$

また、面積速度が $A = \frac{1}{2}h$ であることから

$$T^2 = \frac{\pi^2 l}{A^2} a^3 = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{h^2}{GM} a^3 = \frac{4\pi^2}{\underbrace{GM}_{\text{すべて定数}}} a^3$$

よって、 $T^2 \propto a^3$

- (3) 地球の長半径 ($1\text{AU} = 1.495 \times 10^{11} [\text{m}]$) と公転周期から、 T^3/a^2 の値を求め、太陽の質量を求めよ。ただし、万有引力定数 $G = 6.673 \times 10^{-11} [\text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2]$ を用いてよい。

地球の公転周期は $1 \text{ yr} = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \cong 3.154 \times 10^7 [\text{s}]$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(3.154 \times 10^7)^2}{(1.495 \times 10^{11})^3} = \frac{9.948 \times 10^{14}}{3.341 \times 10^{33}} = 2.978 \times 10^{-19} [\text{s}^2/\text{m}^3]$$

前問より $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ であるから

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi^2}{G \left(\frac{T^2}{a^3} \right)} = \frac{4(3.141)^2}{(6.673 \times 10^{-11})(2.978 \times 10^{-19})} \left[\frac{1}{\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}} \right] \\ &= \underline{1.978 \times 10^{30} [\text{kg}]} \end{aligned}$$