

ベクトル場 $\mathbf{A} = (y + z, z + x, x + y)$ の次の曲線に沿う線積分を求めよ。

(1) $C: x = t, y = 2t, z = 3t \ (0 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}(x, y, z) d\mathbf{r} &= \int_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz \\&= \int_0^1 \left[(y(t) + z(t)) \frac{dx}{dt} + (z(t) + x(t)) \frac{dy}{dt} + (x(t) + y(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt \\&= \int_0^1 [(2t + 3t) \cdot 1 + (3t + t) \cdot 2 + (t + 2t) \cdot 3] dt \\&= \int_0^1 22t dt \\&= [11t^2]_0^1 \\&= \underline{11}\end{aligned}$$

[1] 線積分

#6力学演習

ベクトル場 $\mathbf{A} = (y + z, z + x, x + y)$ の次の曲線に沿う線積分を求めよ。

(2) $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}(x, y, z) d\mathbf{r} &= \int_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz \\&= \int_0^{2\pi} \left[(y(t) + z(t)) \frac{dx}{dt} + (z(t) + x(t)) \frac{dy}{dt} + (x(t) + y(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt \\&= \int_0^{2\pi} [(\sin t + t)(-\sin t) + (t + \cos t)(\cos t) + (\cos t + \sin t) \cdot 1] dt \\&= \int_0^{2\pi} [\cos 2t + \cos t + \sin t - t \sin t + t \cos t] dt \\&\quad \downarrow \begin{aligned} \int_0^{2\pi} t \sin t dt &= [t(-\cos t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos t) dt = -2\pi \\ \int_0^{2\pi} t \cos t dt &= [t \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0 \end{aligned} \\&= \left[\frac{\sin 2t}{2} + \sin t - \cos t \right]_0^{2\pi} + 2\pi + 0 = \underline{2\pi}\end{aligned}$$

[2] 空気抵抗のある放物運動

#6力学演習

野球のホームランにおけるボールの運動を計算する。ボールは、地上0 mから初速度 v_0 、仰角 θ で打ち上げられ、速度に比例した空気抵抗 $-m\gamma v$ を受けながら放物運動をすると仮定する。水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸とする。

(1) 速度 $v(t)$ 、変位 $x(t)$ の式を文字式で求めよ。

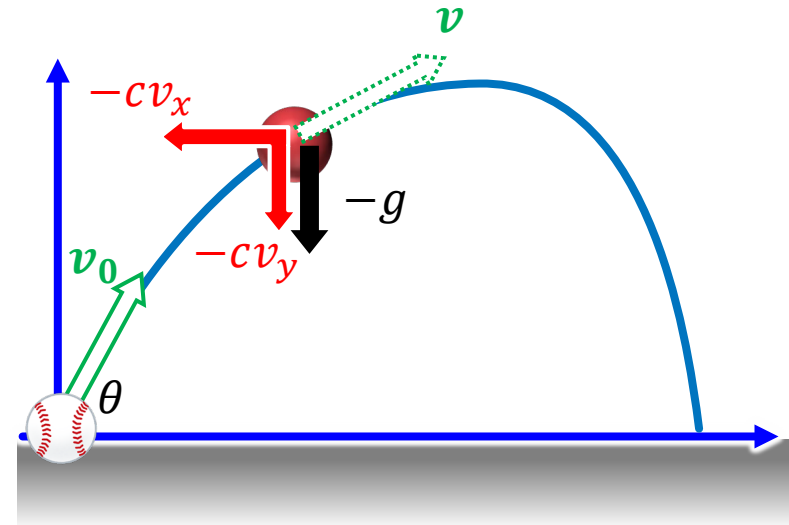
$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= m\mathbf{g} - c\mathbf{v} \\ &= m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - m\gamma \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



x 方向

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -\gamma v_x(t)$$

$$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\gamma dt$$

$$\int \frac{1}{v_x(t)} dv = - \int \gamma dt$$

$$\log|v_x(t)| = -\gamma t + C_1$$

$$v_x(t) = C_x e^{-\gamma t}$$

初期条件より

$$v_x(0) = C_x = v_0 \cos \theta$$

$$\therefore v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t}$$

 y 方向

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -\gamma v_y(t) - g$$

$$\frac{dv}{\gamma v_y(t) + g} = -dt$$

$$\int \frac{1}{\gamma v_y(t) + g} dv = - \int 1 dt$$

$$\frac{1}{\gamma} \log|\gamma v_y(t) + g| = -t + C_2$$

$$\log|\gamma v_y(t) + g| = -\gamma t + \gamma C_2$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\gamma} (C_3 e^{-\gamma t} - g)$$

[2] 空気抵抗のある放物運動

#6力学演習

初期条件より

$$v_y(0) = \frac{1}{\gamma}(C_3 - g) = v_0 \sin \theta \quad \therefore v_z(t) = -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t}$$

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} \\ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

それぞれ積分して

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} dt & y(t) &= \int \left\{ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \right\} dt \\ &= -\frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} e^{-\gamma t} & &= -\frac{g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

初期条件 ($x(0) = y(0) = 0$) より
積分定数を求めると

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ -\frac{g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) (e^{-\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

(2) 水平方向の最大値を着地点とみなすと、ホームランの飛距離を文字式で表せ。

$$t \rightarrow \infty \text{ とすると } \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\gamma} \end{pmatrix}$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} \\ -\infty \end{pmatrix} \quad \text{よって、飛距離 } l \text{ は } l = \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma}$$

(3) 2026年3月のWBC韓国戦で鈴木誠也選手の打った2本目のホームランは飛距離117 m, 打球角度 30° であった。打球の初速度を求めよ。
ただし、 $\gamma = 0.34$ とする。

$$l = \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} \text{ より } v_0 = \frac{\gamma l}{\cos \theta} = \frac{0.34 \times 117}{\cos 30^\circ}$$
$$\cong \underline{\underline{45.93[\text{m/s}]}} \cong \underline{\underline{165.4[\text{km/h}]}}$$



1点を追う3回だった。大谷翔平の2試合連発となる同点ソロが飛び出し、その熱気も冷めやらぬ中、鈴木がまた打った。甘く入ったカーブを左翼席に運んだ。104.4マイル（約168.02メートル）、385フィート（約117.35メートル）、角度30度の確信弾だった。

[3] 円運動

#6力学演習

- (1) 右図のように円錐の滑らかな内面を、質量 m [kg] の質点 P が抵抗なく、水平に半径 $r = 0.8$ [m] の等速円運動している。この円運動の角速度を求めよ。

右図のように質点には重力 mg と垂直抗力 N がはたらく

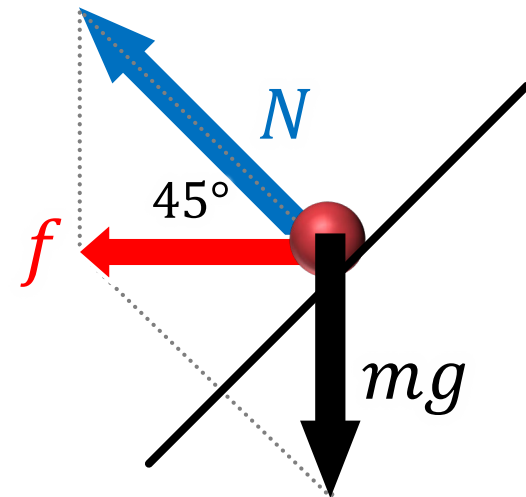
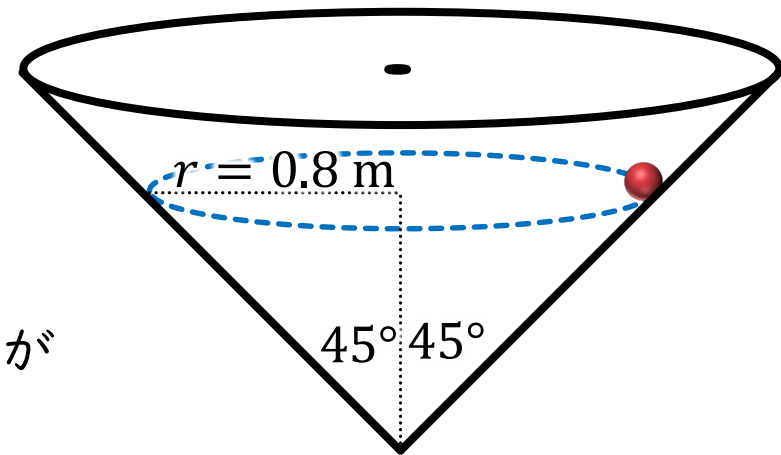
$$\text{鉛直方向: } 0 = N \sin 45^\circ - mg$$

$$N = \sqrt{2}mg$$

$$\begin{aligned} \text{水平方向: } mr\omega^2 &= N \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}N = mg \end{aligned}$$

$$r\omega^2 = g$$

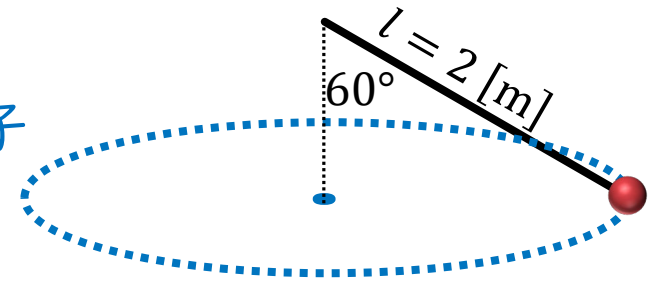
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.8}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ [rad/s]}$$



[3] 円運動

#6力学演習

(2) 質量の無視できる長さ $l = 2 \text{ [m]}$ の軽い糸の先に、質量 $m \text{ [kg]}$ の質点 P をつけて円錐振り子を作ったところ、糸は鉛直線より 60° を保って同一平面内を等速円運動した。このときの角速度 $\omega \text{ [rad/s]}$ を求めよ。



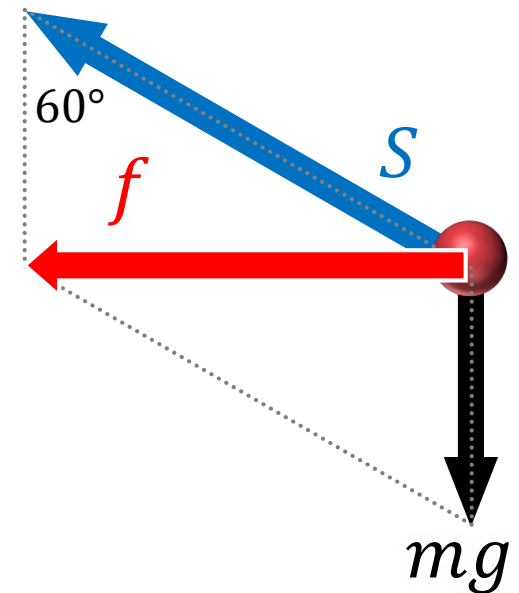
円運動の半径を r とすると、 $r = l \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l \text{ [m]}$

鉛直方向: $0 = S \cos 60^\circ - mg$

$$S = 2mg$$

水平方向: $mr\omega^2 = S \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} S = \sqrt{3}mg$

$$r\omega^2 = \sqrt{3}g$$



$$\begin{aligned} \therefore \omega &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{r}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{\frac{\sqrt{3}}{2}l}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} = \sqrt{9.8} = \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ [rad/s]} \\ &= \underline{\underline{3.1 \text{ [rad/s]}}} \end{aligned}$$

[4] 保存力

#6力学演習

- (1) 2次元保存力 f のポテンシャルが $U(x, y) = -xy$ で与えられる。
このとき点 $P_0(2, 1)$ における等ポテンシャル面 (線) および保存力を
求め、図示せよ。

$P_0(2, 1)$ におけるポテンシャルは $U(2, 1) = -2$

よって、 $P_0(2, 1)$ における等ポテンシャル線は

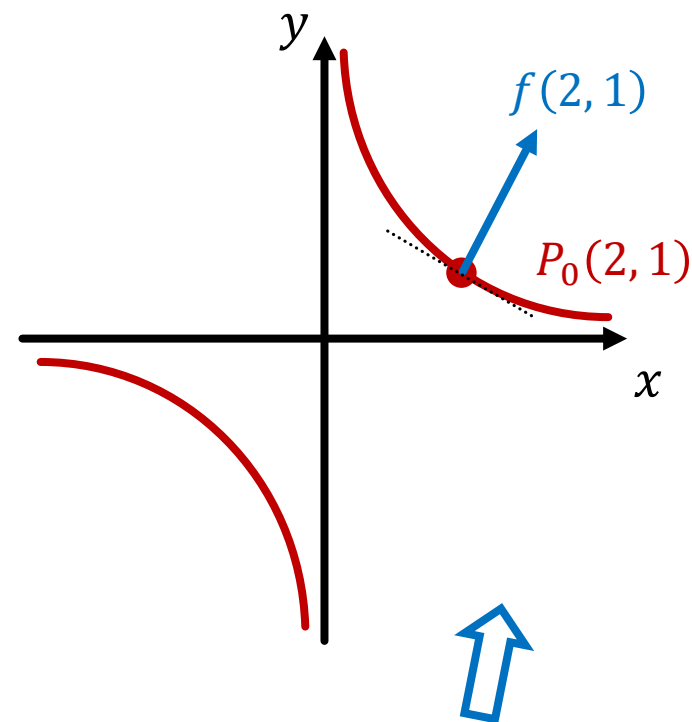
$$U(x, y) = -xy = -2 \quad \therefore xy = 2 \quad \Rightarrow$$

保存力 f は

$$f = -\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right]$$

$$= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(-xy), \frac{\partial}{\partial y}(-xy)\right]$$

$$= -[-y, -x] = [y, x]$$



よって、 $P_0(2, 1)$ における保存力は

$$f(2, 1) = \underline{\underline{[1, 2]}}$$

[4] 保存力

#6力学演習

(2) 2次元保存力 f のポテンシャルが $U(x, y) = -x^2 - 2y^2$ で与えられる。
このとき点 $P_0(\sqrt{2}, 1)$ における等ポテンシャル面 (線) および保存力を
求め、図示せよ。

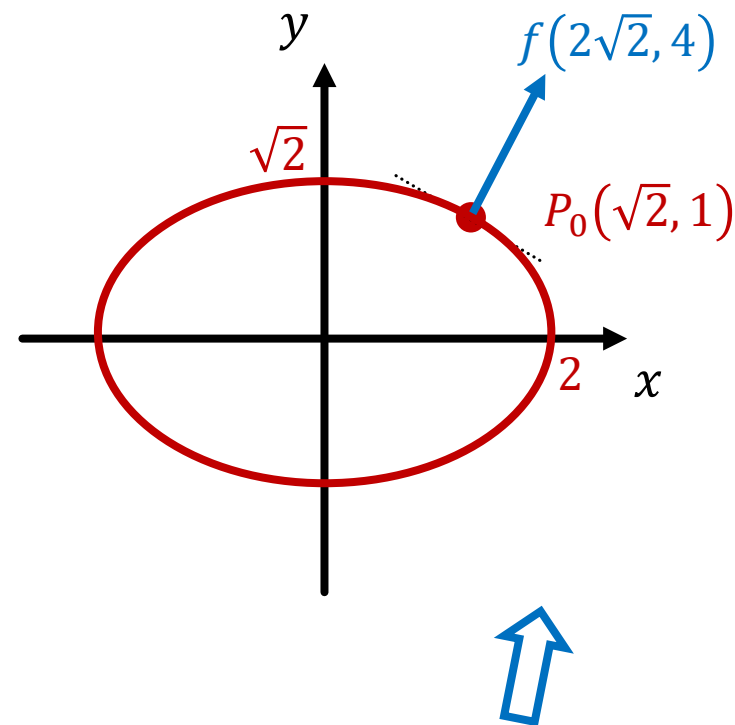
$P_0(2, 1)$ におけるポテンシャルは $U(\sqrt{2}, 1) = -4$

よって、 $P_0(2, 1)$ における等ポテンシャル線は

$$U(x, y) = -x^2 - 2y^2 = -4$$
$$\therefore \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

保存力 f は

$$f = -\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right]$$
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 2y^2), \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 - 2y^2)\right]$$
$$= [2x, 4y]$$



よって、 $P_0(\sqrt{2}, 1)$ における保存力は
 $f(\sqrt{2}, 1) = \underline{[2\sqrt{2}, 4]}$

(3) 次の各2次元のちから f が保存力か否か判定し、保存力ならば、そのポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。ただし、 $U(0, 0) = 0$ とする。

① $f = [x^2y, xy^2 + 1]$ $\frac{\partial F_x}{\partial y} = x^2$ $\frac{\partial F_y}{\partial x} = y^2$ であるから保存力ではない

② $f = [2x - y, -x]$ $\frac{\partial F_x}{\partial y} = -1$ $\frac{\partial F_y}{\partial x} = -1$ であるから保存力である

このとき、原点から x 軸に沿って $(x, 0)$ までゆき、その後 y 軸に沿って (x, y) までゆくときの仕事は原点と (x, y) でのポテンシャルの差に等しい。

$$U(x, y) = - \int_0^x (2x - 0) dx - \int_0^y (-x) dy = \underline{-x^2 + xy}$$

③ $f = [2xy, x^2 - 2]$ $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x$ $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x$ であるから保存力である

同様に $U(x, y) = - \int_0^x (0) dx - \int_0^y (x^2 - 2) dy = \underline{-x^2y + 2y}$