

[1] 定数係数 2階 非同次 線形 常微分方程式 #5力学演習

$$(1) \quad \ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 5t + 6$$

同伴方程式は

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 5, -1$$

よって同伴方程式の一般解は

$$\underline{X = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}}$$

また、右辺は2次の多項式であるから
特殊解を $x_0 = At + B$ とおくと

$$\dot{x}_0 = A \quad \ddot{x}_0 = 0$$

であるから

$$(0) - 4A - 5(At + B) = 5t + 6$$

$$-5At + (-4A - 5B) = 5t + 6$$

$$A = -1 \quad B = -\frac{2}{5}$$

$$\underline{x_0 = -t - \frac{2}{5}}$$


$$\therefore \underline{x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} - t - \frac{2}{5}}$$

[1] 定数係数 2階 非同次 線形 常微分方程式 #5力学演習

$$(2) \quad \ddot{x} + 4x = \sin 3t$$

同伴方程式は

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

よって同伴方程式の一般解は

$$X = \underline{C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t}$$

また、右辺は2次の多項式であるから
特殊解を $x_0 = A \cos 3t + B \sin 3t$ とおくと

$$\dot{x}_0 = -3A \sin 3t + 3B \cos 3t$$

$$\ddot{x}_0 = -9A \cos 3t - 9B \sin 3t$$

であるから

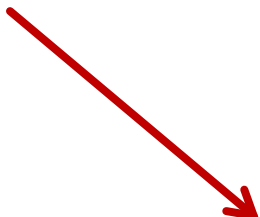
$$(-9A \cos 3t - 9B \sin 3t)$$

$$+ 4(A \cos 3t + B \sin 3t) = \sin 3t$$

$$-5A \cos 3t - 5B \sin 3t = \sin 3t$$

$$A = 0 \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$x_0 = \underline{-\frac{1}{5} \sin 3t}$$


$$\therefore x = \underline{C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t}$$

[1] 定数係数 2階 非同次 線形 常微分方程式 #5力学演習

$$(3) \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{3t}$$

同伴方程式は

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

よって同伴方程式の一般解は

$$\underline{X = (C_1 + C_2 t)e^t}$$

また、右辺は2次の多項式であるから
特殊解を $x_0 = Ae^{3t}$ とおくと

$$\dot{x}_0 = 3Ae^{3t} \quad \ddot{x}_0 = 9Ae^{3t}$$

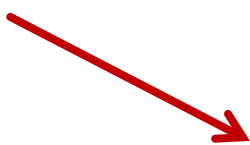
であるから

$$9Ae^{3t} - 2(3Ae^{3t}) + Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$4Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$\underline{x_0 = \frac{1}{4}e^{3t}}$$


$$\therefore \underline{x = (C_1 + C_2 t)e^t + \frac{1}{4}e^{3t}}$$

[2] 斜面の運動

#5力学演習

水平と角度 θ をなす粗い斜面上に質量 m の物体が置いてある。物体と斜面の静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とする。以下の問いに答えよ。

(1) 物体が斜面上に止まっているための最小角度 θ_f を求めよ。

このときの運動方程式は

$$x: 0 = mg \sin \theta_f - F$$

$$y: 0 = N - mg \cos \theta_f$$

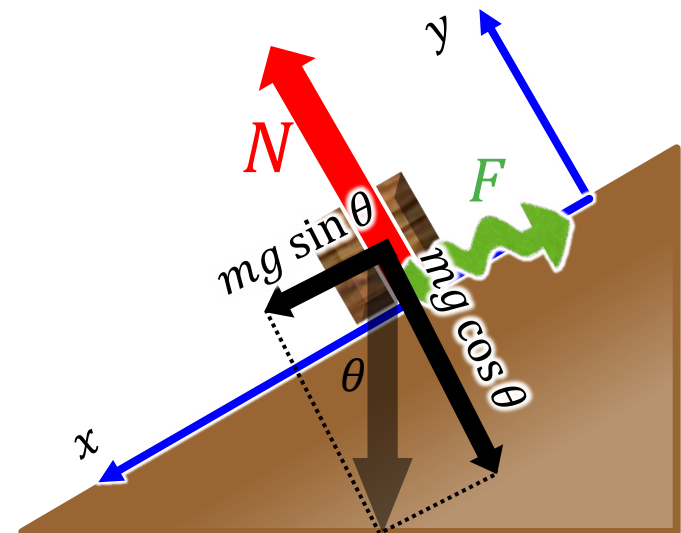
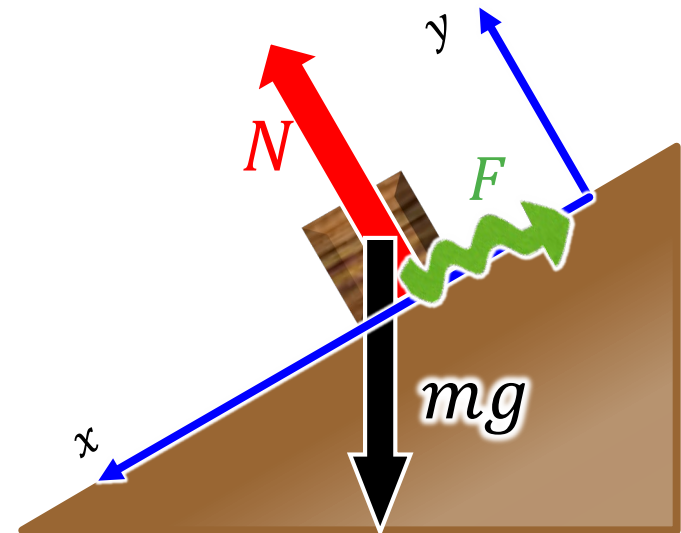
摩擦力が最大静止摩擦力であるから、

$$F = \mu N = \mu mg \cos \theta_f$$

よって、 $0 = mg \sin \theta_f - \mu mg \cos \theta_f$

$$\tan \theta_f = \mu$$

$$\theta_f = \tan^{-1} \mu$$



[2] 斜面の運動

#5力学演習

(2) 角度が $\theta_f > \theta$ のとき、物体を初速 v_0 で斜面上向きに滑り出させる。速度が0になるまでに進む斜面上の距離をもとめよ。

このときの x 軸方向の運動方程式は

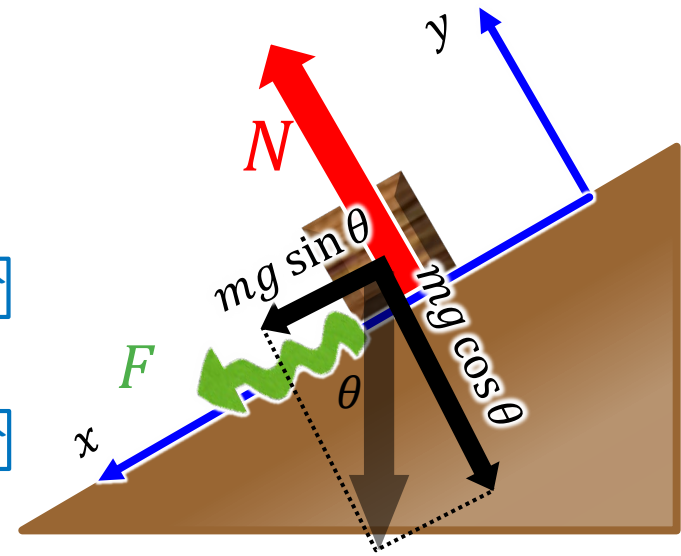
$$m\ddot{x} = mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta$$

$$\ddot{x} = g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

$$\dot{x} = -v_0 + g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)t$$

$$x = -v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta + \mu' \cos \theta) t^2$$

積分
積分



静止までの時間を T_1 とすると $\dot{x}(T_1) = 0$ より $T_1 = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$

T_1 までの変位 s は

$$s = -v_0 \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

$$= -\frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

$$\therefore |s| = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

[2] 斜面の運動

#5力学演習

(3) 角度が $\theta_f < \theta$ のとき、物体を初速 v_0 で斜面上向きに滑り出させる。物体が最初の位置に戻るまでの時間はいくらか。

下降のときはの x 軸方向の運動方程式より

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

$$\dot{x} = 0 + g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t$$

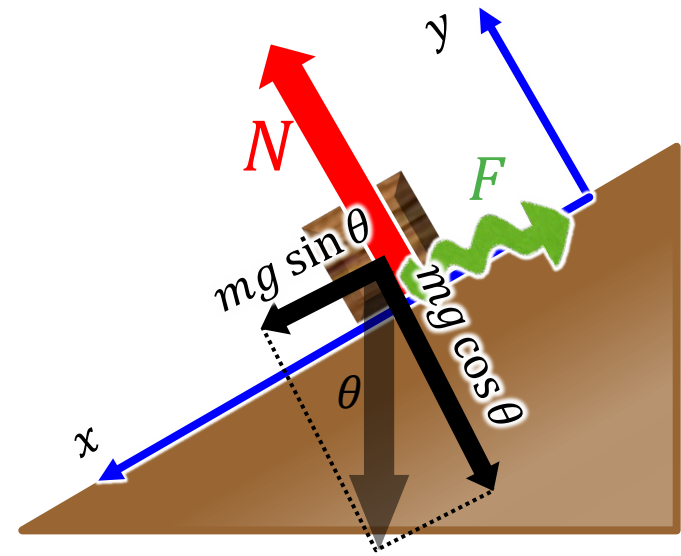
$$x = s + 0 - \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t^2$$

$x = 0$ まで戻るのに時間 T_2 かけるとすると、

$$0 = s - \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)T_2^2$$

$$\frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)T_2^2 \quad \therefore T_2 = \frac{v_0}{g} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \mu'^2 \cos^2 \theta}}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{v_0}{g} \left\{ \frac{1}{\sin \theta + \mu' \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \mu'^2 \cos^2 \theta}} \right\}$$



質量 $m = 9$ [kg] のおもりをばね定数 $k = \pi^2$ [N/m] のバネに取り付けた水平ばね振り子の変位 x が

$$x(t) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されるとき、

(1) この単振動の(i)振幅、(ii)角振動数、(iii)周期、(iv)振動数を求めよ。

(i) 振幅 A $A = \underline{4}$ (ii) 角振動数 ω $\omega = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$

(iii) 周期 T $T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{6}$ (iv) 振動数 ν $\nu = \frac{1}{T} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

(2) この単振動の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求め、 $a(t)$ を $x(t)$ で表せ。

$$v(t) = \dot{x}(t) = 4 \cdot \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{4\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)}} = \underline{\underline{-\frac{\pi^2}{9} x(t)}}$$

(3) 角振動数からばね定数 k [N/m] の値を求めよ。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{9}} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore k = \underline{\pi^2}$$

(4) この単振動の全力学的エネルギー $E (= K + U)$ を求めて、一定であることを示せ。

ただし、 $K = \frac{1}{2}mv^2$ (運動エネルギー)、 $U = \frac{1}{2}kx^2$ (弾性エネルギー) とする。

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}9 \left\{ \frac{4\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \left\{ 4 \sin \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 \\ &= 8\pi^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 = 8\pi^2 \end{aligned}$$

よって E は時刻 t によらず一定である。

- (1) 長さ l [m] の単振り子の周期が T であるとき、長さを Δl だけ増加させたとき、周期の変化はいくらか。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ であるから、長さが } \Delta l \text{ 増加したときの } T \text{ の変化は}$$

$$\Delta T = \frac{dT}{dl} \Delta l = \left\{ \pi \sqrt{\frac{1}{gl}} \right\} \Delta l = \frac{T}{2l} \Delta l \quad \therefore \Delta T = \underline{\frac{T}{2l} \Delta l}$$

- (2) 周期2秒の振り子時計がある。重力加速度を $g = 9.80$ [m/s²] のとき、振り子の長さはいくらか。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ であるから、} 2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9.8}} \quad \therefore l = \underline{0.993 \text{ [m]}}$$

(3) (2)の振り子において、振り子の長さを1 mm 長くすると1日に何秒遅れるか。

(1) より $\Delta T = \frac{T}{2l} \Delta l$ であるから

$$\Delta T = \frac{2}{2 \times (0.9929)} (0.001) = \frac{1}{992.9}$$

1日では、 $\frac{1}{992.9} \times 24 \times 60 \times 60 \times \frac{1}{2} \approx 43.5$ [s] 遅れる。

(4) (2)の振り子において、1日に9秒遅れるとき、
長さをどの様に調整すればよいか。

(1) より $\Delta T = \frac{T}{2l} \Delta l$ であるから

$$\frac{2}{2 \times (0.9929)} \Delta l \times 24 \times 60 \times 60 \times \frac{1}{2} = +9$$

$$\Delta l = \frac{9 \times 2 \times (0.9929)}{24 \times 60 \times 60} \approx +0.2069 \times 10^{-3}$$

$\therefore 0.21$ [mm]短くする