

[1] 微分方程式 (変数分離形)

#4力学演習

$$(1) \frac{dx}{dt} = 2t(2x + 1)$$

$x \neq -\frac{1}{2}$ のとき $\frac{dx}{2x + 1} = 2t dt$

$$\int \frac{1}{2x + 1} dx = \int 2t dt$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1)'}{2x + 1} dx = \int 2t dt$$

$$\log|2x + 1| = 2t^2 + C_1$$

$$|2x + 1| = e^{2t^2 + C_1}$$

$$2x + 1 = C_2 e^{2t^2}$$

$$x = C e^{2t^2} - \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$ のとき $x = -\frac{1}{2}$ も明らかに解

$\Rightarrow C = 0$ で含まれるので特異解ではない

$$\underline{x = C e^{2t^2} - \frac{1}{2}}$$

$y = 2x + 1$ において置換積分すると

$$dy = 2dx \text{ より } dx = \frac{1}{2} dy$$

$$\int \frac{1}{2x + 1} dx = \int \frac{1}{y} \left(\frac{1}{2} dy \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy$$

置換積分せずに
計算できるようになりました

$$(2) \frac{dx}{dt} = \sin t \cdot \cos^2 x$$

$x \neq \frac{n}{2}\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = \sin t \, dt$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sin t \, dt$$

$$\tan x = -\cos t + C$$

$$x = \tan^{-1}\{-\cos t + C\}$$

$x = \frac{n}{2}\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき

$x = \frac{n}{2}\pi$ も明らかに解 $\Rightarrow$ 特異解

$\in$ は要素であるという意味

$x \in \mathbb{N}$ (x は自然数の意)

$x \in \mathbb{Z}$ (x は整数の意)

$x \in \mathbb{Q}$ (x は有理数の意)

$x \in \mathbb{R}$ (x は実数の意)

$x \in \mathbb{C}$ (x は複素数の意)

$$\underline{x = \tan^{-1}\{-\cos t + C\}, \frac{n}{2}\pi (n \in \mathbb{Z})}$$

[1] 微分方程式 (変数分離形)

#4力学演習

$$(3) \frac{dx}{dt} = e^{2t} \cdot \tan x$$

$x \neq n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき

$$\frac{1}{\tan x} dx = e^{2t} dt$$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int e^{2t} dt$$

$$\log|\sin x| = \frac{1}{2}e^{2t} + C$$

このままでもよいが

$$\sin x = Ce^{\frac{1}{2}e^{2t}}$$

$$x = \sin^{-1}\{Ce^{\frac{1}{2}e^{2t}}\}$$

としてもよい

$x = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき

$x = n\pi$ も明らかに解 $\Rightarrow$ 特異解

$$\underline{x = \sin^{-1}\{Ce^{\frac{1}{2}e^{2t}}\}, n\pi \ (n \in \mathbb{Z})}$$


$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\tan x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\ &= \log|\sin x| \end{aligned}$$

[1] 微分方程式 (変数分離形)

#4力学演習

$$(4) \frac{dx}{dt} = (3t^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$x \neq \pm 1$ のとき

$$\frac{1}{x^2 - 1} dx = (3t^2 + 1) dt$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int (3t^2 + 1) dt$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{|x - 1|}{|x + 1|} = t^3 + t + C_1$$

$$\log \frac{|x - 1|}{|x + 1|} = 2t^3 + 2t + C_2$$

$$\frac{x - 1}{x + 1} = Ce^{2t^3 + 2t}$$

$$x = \frac{1 + Ce^{2t^3 + 2t}}{1 - Ce^{2t^3 + 2t}}$$

$x = \pm 1$ のとき

$x = -1$ は明らかに解 $\Rightarrow$ 特異解

$x = +1$ は明らかに解

$\Rightarrow$ 特異解ではない ($C = 0$)

$$x = \frac{1 + Ce^{2t^3 + 2t}}{1 - Ce^{2t^3 + 2t}}, -1$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2 - 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \log|x - 1| - \log|x + 1| \} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|x - 1|}{|x + 1|} \end{aligned}$$

[2] 定数係数2階同次線形常微分方程式 #4力学演習

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 1, 2$$

基本解は

$$X_1 = e^t, X_2 = e^{2t}$$

一般解は

$$X = \underline{C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 0\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

基本解は

$$X_1 = \cos t$$

$$X_2 = \sin t$$

一般解は

$$X = \underline{C_1 \cos t + C_2 \sin t}$$

[2] 定数係数2階同次線形常微分方程式 #4力学演習

$$(3) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

基本解は

$$X_1 = e^t, X_2 = te^t$$

一般解は

$$X = \underline{(C_1 + C_2 t)e^t}$$

$$(4) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{3}i$$

基本解は

$$X_1 = e^{-t} \cos \sqrt{3}t$$

$$X_2 = e^{-t} \sin \sqrt{3}t$$

一般解は

$$X = \underline{e^{-t}(C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t)}$$

[3] 自由落下

#4力学演習

地面から高さ h のところから、時刻 $t = 0$ で質量 m のボールAを鉛直上向きに初速 v_0 で投げ上げた。空気の抵抗は無視する。

(1) ボールAが地面に衝突するまでのボールの位置と速度を時刻 t の関数で表せ。

$$\begin{aligned} a &= -g \\ v &= v_0 - gt \\ x &= h + v_0(t - 0) - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{初速度} \\ \text{初期位置} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{積分} \\ \text{積分} \end{array} \quad \therefore \begin{cases} v_A = v_0 - gt \\ x_A = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(2) ボールが最高点に達するまでの時間 T_1 と地面につく時間 T_2 を求めよ。

$$\text{最高点において } v_A(t = T_1) = 0 \text{ であるから } 0 = v_0 - gT_1 \quad \therefore T_1 = \frac{v_0}{g}$$

地面につくときは $x_A(t = T_2) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 0 &= h + v_0T_2 - \frac{1}{2}gT_2^2 \\ 0 &= gT_2^2 - 2v_0T_2 - 2h \end{aligned} \quad \therefore T_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

(3) $t = T_1$ に高さ h から鉛直上向きに質量 m のボールBを $3v_0$ で投げ上げた。
ボールAとBが衝突する高さ H を求めよ。

ボールBの位置と速度は、
$$\begin{cases} v_B = 3v_0 - g(t - T_1) \\ x_B = h + 3v_0(t - T_1) - \frac{1}{2}g(t - T_1)^2 \end{cases}$$

衝突までの時間を $t = T_3$ とすると $x_B(T_3) = x_A(T_3)$ より

$$h + 3v_0(T_3 - T_1) - \frac{1}{2}g(T_3 - T_1)^2 = h + v_0T_3 - \frac{1}{2}gT_3^2$$

$$2v_0T_3 + gT_1T_3 = \frac{1}{2}gT_1^2 + 3v_0T_1$$

$$T_1 = \frac{v_0}{g} \text{ より}$$

$$2v_0T_3 + v_0T_3 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + 3\frac{v_0^2}{g}$$

$$3v_0T_3 = \frac{7}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

$$\therefore T_3 = \frac{7}{6}\frac{v_0}{g}$$

このとき

$$x_B(T_3) = h + 3v_0(T_3 - T_1) - \frac{1}{2}g(T_3 - T_1)^2$$

$$= h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{72}\frac{v_0^2}{g}$$

$$\therefore H = h + \underline{\underline{\frac{35}{72}\frac{v_0^2}{g}}}$$

(4) ボールBの投げ上げる速度を調整して両者が同時に地面につくとなるとボールBの初速を v_0 の何倍にすればよいか。

ボールBの初速を v_0 の X 倍とすると、(3)より

$T = T_2$ においてボールBの位置が0であればよいので

$$h + Xv_0 \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \right)^2 = 0$$

$$h + Xv_0 \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} - \frac{v_0^2 + 2gh}{2g} = 0$$

$$Xv_0 \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$2X\sqrt{v_0^2 + 2gh} = v_0$$

$$\therefore X = \frac{v_0}{2\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \text{ (倍)}$$

別解

$$h + Xv_0(T_4 - T_1) - \frac{1}{2}g(T_4 - T_1)^2 = h + v_0T_4 - \frac{1}{2}gT_4^2$$

$$Xv_0T_4 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + X\frac{v_0^2}{g}$$

$$\therefore T_4 = \frac{1 + 2X}{2X} \frac{v_0}{g}$$

このとき

$$\begin{aligned} x_B(T_3) &= h + Xv_0(T_4 - T_1) - \frac{1}{2}g(T_4 - T_1)^2 \\ &= h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{8X^2}\frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

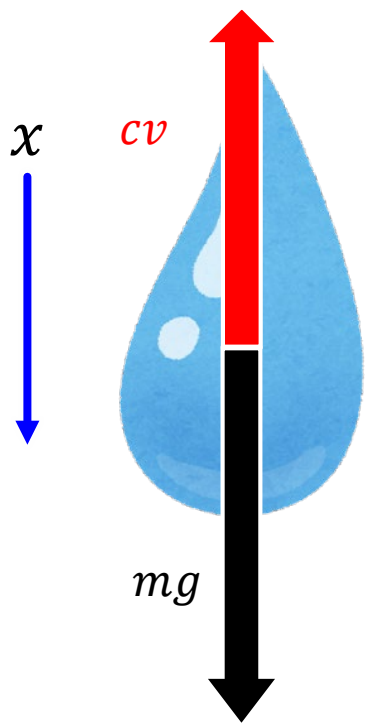
これが0になればよいから

$$\therefore X = \frac{v_0}{2\sqrt{v_0^2 + 2gh}} (\text{倍})$$

[4] 空気抵抗がはたらく運動

#4力学演習

- (1) 風のない空気中を質量 m [kg] の雨滴が落下している。鉛直下向きを x 軸正の向きとすると、雨滴は、速さ v [m/s] に比例する大きさ cv [N] の抵抗力を、 x 軸負の向きに受ける。雨滴の初速度を 0 [m/s] として、速度の式 v と終端速度 v_{term} の表式をもとめよ。



運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - cv$$

m で割ってまとめると

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$

$$\frac{d}{dt} v = -\frac{c}{m} v + g$$

$$\frac{dv}{\frac{c}{m} v - g} = -dt$$

$$\int \frac{1}{\frac{c}{m} v - g} dv = - \int 1 dt$$

$$\frac{m}{c} \log \left| \frac{c}{m} v - g \right| = -t + C_1$$

$$\log \left| \frac{c}{m} v - g \right| = -\frac{c}{m} \{t - C_1\}$$

$$\left| \frac{c}{m} v - g \right| = e^{-\frac{c}{m} \{t - C_1\}} \\ = e^{\frac{c}{m} C_1} e^{-\frac{c}{m} t}$$

$$\frac{c}{m} v - g = \pm e^{\frac{c}{m} C_1} e^{-\frac{c}{m} t}$$

[4] 空気抵抗がはたらく運動

#4力学演習

$$\frac{c}{m}v - g = \underbrace{\pm e^{\frac{c}{m}C_1}}_{=C} e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\frac{c}{m}v - g = Ce^{-\frac{c}{m}t}$$

$$v = \frac{m}{c} \left\{ Ce^{-\frac{c}{m}t} + g \right\}$$

$$v(0) = 0 \text{ より } \therefore C = -g$$

$$\underline{v = -\frac{mg}{c} \{ e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \}}$$

$t \rightarrow \infty$ とすれば

$$v_{term} = \underline{\frac{mg}{c}}$$

(2) 雨滴の空気抵抗係数 c は雨滴の半径 r [m]、
空気の粘性定数 μ [kg/m·s] とすると

$$c = 6\pi\mu r$$

で表される。雨滴の密度を ρ [kg/m³] とすると、
終端速度が半径の2乗に比例することを示せ。

$$v_{term} = \frac{mg}{c} = \frac{\frac{4}{3}\pi gr^3 \cdot \rho}{6\pi\mu r} = \frac{2\rho g}{9\mu} r^2 \propto r^2$$

(3) $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ [kg/m·s], $\rho = 103$ [kg/m³]
としたとき、雲粒 (半径 0.01 mm) の終端速度を
求めよ。

$$\begin{aligned} v_{term} &= \frac{2\rho g}{9\mu} r^2 \\ &= \frac{2 \times 103 \times 9.8}{9 \times 1.8 \times 10^{-5}} (1 \times 10^{-5})^2 \\ &= \underline{1.246 \times 10^{-3} \text{ [m/s]}} \end{aligned}$$