

(1) オイラーの公式 を用いて $\tan \theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ で表せ。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{であるから}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \quad \therefore \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\text{よって} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{\underline{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}}$$

(2) オイラーの公式を用いて3倍角の公式を示せ。

$$\text{オイラーの公式より } e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad \dots \textcircled{3}$$

また、

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3i^2 \cos \theta \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \\ &= \{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)\} + i\{3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta\} \\ &= \{4\cos^3 \theta - 3 \cos \theta\} + i(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③と④の実部と虚部を比較して、

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \qquad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

[2] 運動の法則

#2力学演習

半径 a の円周上を一定の速さで、反時計回りに改訂している物体の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = [a \cos \omega t, a \sin \omega t]$$

と表される。この運動について以下の問に答えよ。

(1) 速度はつねに円の接線方向を向くことを示せ。

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \left[\frac{d}{dt} \{a \cos \omega t\}, \frac{d}{dt} \{a \sin \omega t\} \right] = [-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t]$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \{a \cos \omega t\} \{-a\omega \sin \omega t\} + \{a \sin \omega t\} \{a\omega \cos \omega t\}$$

$$= -a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t + a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 \quad \text{よって直交する。}$$

(2) 加速度(力)はつねに円の中心を向き、速度と直交していることを示せ。

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \left[\frac{d}{dt} \{-a\omega \sin \omega t\}, \frac{d}{dt} \{a\omega \cos \omega t\} \right] = [-a\omega^2 \cos \omega t, -a\omega^2 \sin \omega t]$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \{-a\omega^2 \cos \omega t\} \{-a\omega \sin \omega t\} + \{-a\omega^2 \sin \omega t\} \{a\omega \cos \omega t\}$$

$$= -a^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t + a^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t = 0 \quad \text{よって直交する。}$$

(1) $t = 0$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(t = 0) = [2e^{-1}, 2e]$ をもっていた物体に、
時刻 $0 \leq t \leq 2$ の間に力 $\mathbf{f}(t) = [e^{-\frac{t}{2}}, -e^{\frac{t}{2}}]$ が作用したとき、
時刻 $t = 2$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(2)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(0) &= \int_0^2 \mathbf{f}(t) dt \\ \Rightarrow \mathbf{p}(2) &= \mathbf{p}(0) + \int_0^2 \mathbf{f}(t) dt \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \int_0^2 [e^{-\frac{t}{2}}, -e^{\frac{t}{2}}] dt \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \left[\int_0^2 e^{-\frac{t}{2}} dt, \int_0^2 -e^{\frac{t}{2}} dt \right] \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \left[-2[e^{-\frac{t}{2}}]_0^2, -2[e^{\frac{t}{2}}]_0^2 \right] \\ &= [2e^{-1}, 2e] + [-2e^{-1} + 2, -2e^1 + 2] = \underline{\underline{[2, 2]}}\end{aligned}$$

(2) $t = \frac{\pi}{2}$ の時点で運動量 $\mathbf{p}\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right]$ をもっていた物体に、
時刻 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ の間に力 $\mathbf{f}(t) = [\cos^2 t, \sin^2 t, \sin t \cos t]$ が作用したとき、
時刻 $t = \pi$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(\pi)$ を求めよ。

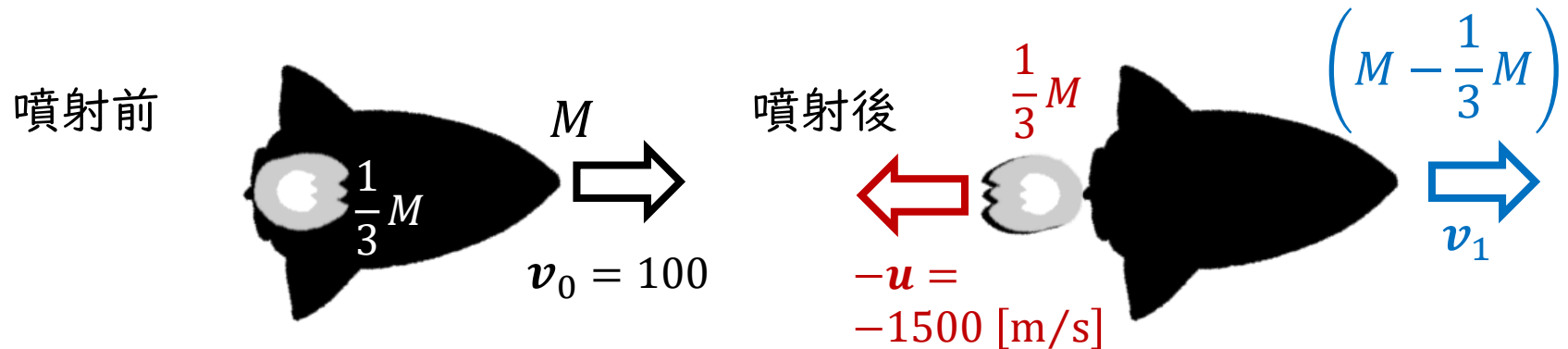
$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\pi) - \mathbf{p}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathbf{f}(t) dt \\ \Rightarrow \mathbf{p}(\pi) &= \mathbf{p}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathbf{f}(t) dt = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos^2 t, \sin^2 t, \sin t \cos t] dt \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right] + \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t dt, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t dt, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \cos t dt \right] \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right] + \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t (\sin t)' dt \right] \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}, \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}, \frac{1}{2} [\sin^2 t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\ &= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2} \right] = \underline{[0, \pi, -2]}\end{aligned}$$

[4] 運動量保存則 (1次元)

#2力学演習 ⁶

ほかの天体から十分に離れた宇宙空間における質量 M のロケットの1次元の運動について、以下の問いに答えよ。

- (1) 速度 $v_0 = 100$ [m/s] で等速直線運動をしているロケットが、後方にロケットから見て相対速度 $-u_1 = -1500$ [m/s] で質量 $M/3$ のガスを噴射した。噴射後のロケットの速度 v_1 [m/s] を求めよ。



噴射前後で外力ははたっていないので、噴射前後の運動量は保存される。

運動量保存則より

$$M \cdot 100 = \left(M - \frac{1}{3}M\right) \cdot v_1 + \frac{1}{3}M \cdot (v_1 - 1500)$$

相対速度であることに注意

$$M \cdot 100 = M \cdot v_1 - M \cdot 500$$

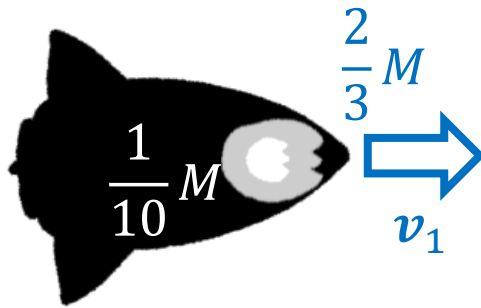
$$\therefore v_1 = \underline{600 \text{ [m/s]}}$$

[4] 運動量保存則 (1次元)

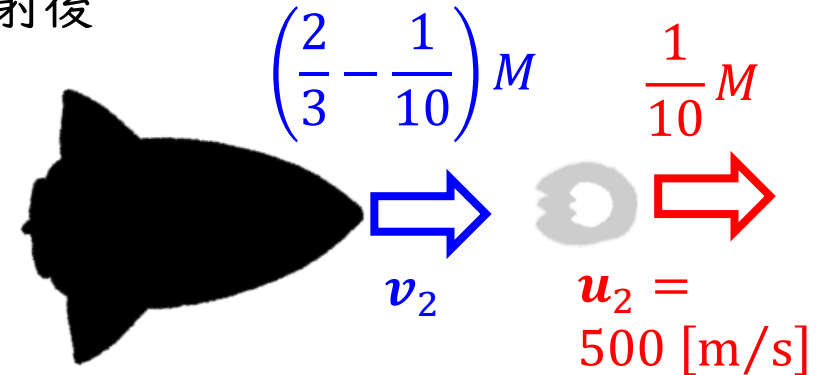
#2力学演習⁷

- (2) その後、前方にロケットから見て相対速度 $u_2 = 500$ [m/s] で質量 $M/10$ のガスを噴射した。噴射後のロケットの速度 v_2 [m/s] を求めよ

噴射前



噴射後



噴射前後で外力ははたらいっていないので、噴射前後の運動量は保存される。

運動量保存則より

$$\frac{2}{3}M \cdot 600 = \left(\frac{2}{3}M - \frac{1}{10}M \right) \cdot v_2 + \frac{1}{10}M \cdot (v_2 + 500)$$

相対速度であることに注意

$$M \cdot 400 = \frac{2}{3}M \cdot v_2 + M \cdot 50$$

$$\therefore v_1 = \underline{525 \text{ [m/s]}}$$