

[1] 積分の復習

#2 力学演習

次の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 (2t + 3) dt = [t^2 + 3t]_0^1 = (1 + 3) - (0 + 0) = \underline{4}$$

$$(2) \int_1^2 (2t - 1)^3 dt \quad 2t - 1 = u \text{ とおくと } 2dt = du \quad \begin{array}{l} t: 1 \rightarrow 2 \\ u: 1 \rightarrow 3 \end{array}$$

置換積分

$$(\text{与式}) = \int_1^3 u^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_1^3 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \underline{10}$$

または、合成関数の微分が被積分関数になるように考えて

$$\{(2t - 1)^4\}' = 4(2t - 1)^3 \cdot 2 \text{ より } (2t - 1)^3 = \frac{1}{8} \{(2t - 1)^4\}'$$

$$(\text{与式}) = \frac{1}{8} [(2t - 1)^4]_1^2 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \underline{10}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3t dt = -\frac{1}{3} [\cos 3t]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right\} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi t dt = \frac{1}{\pi} [\sin \pi t]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right\} = \underline{\frac{1}{\pi}}$$

$$(5) \int_{-1}^1 e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} [e^{-2t}]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \{e^{-2} - e^2\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})}}$$

$$(6) \int_0^1 \frac{1}{2t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{2t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2t+1)'}{2t+1} dt$$

$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log|f(t)| + C$

$$= \frac{1}{2} [\log(2t+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \{\log(3) - \log(1)\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log 3}}$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\sin t)' dt$$
$$= \frac{1}{3} [\sin^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left\{ \sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right\} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\begin{aligned}(8) \int_1^e \frac{\log t}{t} dt &= \int_1^e \left(\frac{1}{t}\right) \log t dt = \int_1^e (\log t)' \log t dt \\ &= \frac{1}{2} [(\log t)^2]_1^e = \frac{1}{2} \{(\log e)^2 - (\log 1)^2\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$(9) \int_0^1 t \cdot (2t^2 + 1)^3 dt \quad (2t^2 + 1)' = 4t \text{ より } t = \frac{1}{4} (2t^2 + 1)'$$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1}{4} \int_0^1 (2t^2 + 1)' \cdot (2t^2 + 1)^3 dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} (2t^2 + 1)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{16} \{3^4 - 1^4\} = \underline{\underline{5}}\end{aligned}$$

(1) $f(t) = [2t - 1, 3t^2]$ の定積分 $\int_0^2 f(t) dt$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 [2t - 1, 3t^2] dt = \left[\int_0^2 (2t - 1) dt, \int_0^2 (3t^2) dt \right] \\ &= [[t^2 - t]_0^2, [t^3]_0^2] = [(4 - 2) - (0 - 0), (2^3) - (0^3)] = \underline{[2, 8]}\end{aligned}$$

(2) $g(t) = [e^{2t}, e^{-t}, e^{t+1}]$ の定積分 $\int_{-1}^1 g(t) dt$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 g(t) dt &= \int_{-1}^1 [e^{2t}, e^{-t}, e^{t+1}] dt = \left[\int_{-1}^1 e^{2t} dt, \int_{-1}^1 e^{-t} dt, \int_{-1}^1 e^{t+1} dt \right] \\ &= \left[\left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-1}^1, [-e^{-t}]_{-1}^1, [e^{t+1}]_{-1}^1 \right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} e^2 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{-2} \right), (-e^{-1}) - (-e^1), (e^2) - (e^0) \right] \\ &= \underline{\left[\frac{1}{2} (e^2 - e^{-2}), e - e^{-1}, e^2 - 1 \right]}\end{aligned}$$

- (1) 気体中の音速 c_s は気体の圧力 $p [L^{-1}MT^{-2}]$ と密度 $\rho [L^{-3}M]$ で与えられる。
音速 c_s の式を求めよ。

$c_s = ap^x\rho^y$ (a は定数) とおくと、エネルギーの次元は

$$[c_s] = [(L^{-1}MT^{-2})^x] \times [(L^{-3}M)^y]$$

$$[LT^{-1}] = [(L^{-1}MT^{-2})^x(L^{-3}M)^y] = [L^{-x-3y} \times M^{x+y} \times T^{-2x}]$$

が成り立つはずである。

したがって、

$$-x - 3y = 1, \quad x + y = 0, \quad -2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore c_s = ap^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}} = a \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (a \text{ は定数})$$

- (2) 海の波の速さ v_w は浅いところでは水の深さ h [L] と重力加速度 g [LT^{-2}] の積で与えられる。波の速さ v_w の式を求めよ。

$$v_w \propto h^x \times g^y \quad \text{とおくと、次元は相等しいはずなので、}$$

$$\begin{aligned} [LT^{-1}] &= [L^x] \times [(LT^{-2})^y] \\ &= [L^{x+y} \times T^{-2y}] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} \therefore v_w &\propto h^{\frac{1}{2}} \times g^{\frac{1}{2}} \\ &\propto \sqrt{hg} \end{aligned} \quad \text{よって、}$$

$$\therefore \underline{v_w = A\sqrt{hg}} \quad (A \text{は定数})$$

[4] 運動の記述

#2力学演習

次の各位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ で表される矢点Pの運動の速度 $\mathbf{v}(t)$ と加速度 $\mathbf{a}(t)$ を求めよ。また、この運動がどのような運動か説明し、その軌跡を図示せよ。

(1) $\mathbf{r}(t) = [2t, 1 - t^2]$

$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)] = [2t, 1 - t^2]$ を t で微分すれば、

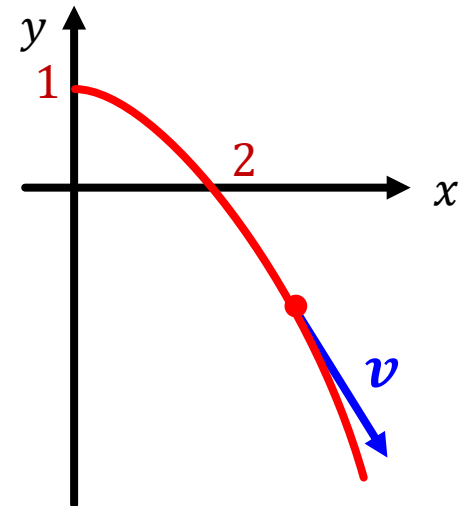
$$\begin{cases} \text{速度 } \mathbf{v}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] = \underline{[2, -2t]} \\ \text{加速度 } \mathbf{a}(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)] = \underline{[0, -2]} \end{cases}$$

この質点は、

x 軸方向には速度 $v_x = 2$ で等速運動し、
 y 軸方向には加速度 $a_y = -2$ で等加速度運動する。
(放物運動)

$x(t), y(t)$ から t を消去すれば、

$$t = \frac{1}{2}x \geq 0 \quad \therefore y = 1 - \frac{1}{4}x^2$$



$$(2) \mathbf{r}(t) = [3 \cos 2t, \sin 2t]$$

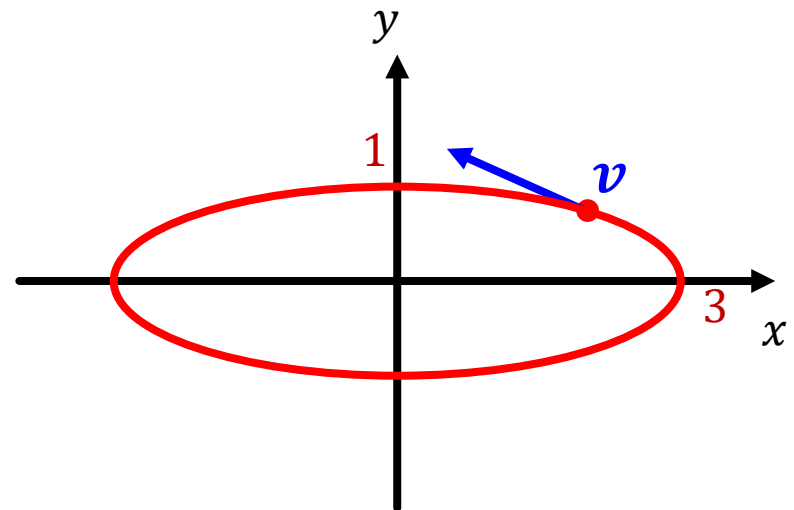
$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)] = [3 \cos 2t, \sin 2t]$ を t で微分すれば、

$$\begin{cases} \text{速度 } \mathbf{v}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t)] &= \underline{[-6 \sin 2t, 2 \cos 2t]} \\ \text{加速度 } \mathbf{a}(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)] &= \underline{[-12 \cos 2t, -4 \sin 2t]} \end{cases}$$

$x(t), y(t)$ から t を消去すれば、

$$\begin{aligned} \cos^2 2t &= \frac{x^2}{3^2} \\ \sin^2 2t &= y^2 \end{aligned} \quad \therefore \frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$$

よって、この質点は、長軸3短軸1の楕円軌道上を回転運動する



$$(3) \quad \mathbf{r}(t) = \left[t, 2t - 1, \frac{1}{2}t^2 \right]$$

$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = \left[t, 2t - 1, \frac{1}{2}t^2 \right]$ を t で微分すれば、

$$\begin{cases} \text{速度 } \mathbf{v}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)] = \underline{[1, 2, t]} \\ \text{加速度 } \mathbf{a}(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)] = \underline{[0, 0, 1]} \end{cases}$$

この質点は、
 x 軸, y 軸方向には等速運動し、
 z 軸方向には加速度 $a_z = 1$ で等加速度運動する。

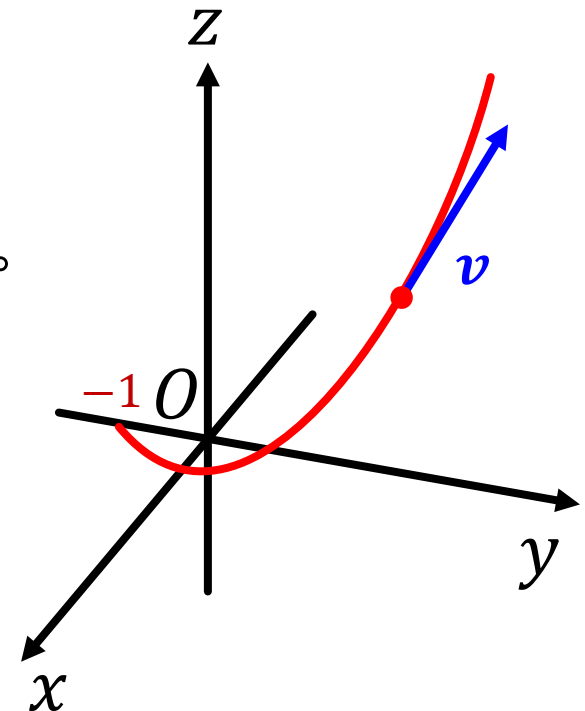
$x(t), y(t), z(t)$ から t を消去すれば、

$$t = x$$

$$t = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = \sqrt{2z}$$

$$t = \sqrt{2z}$$

$t \geq 0$ からのみ



$$(4) \mathbf{r}(t) = [t \cos t, t \sin t, 2\pi - t]$$

$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = [t \cos t, t \sin t, 2\pi - t]$ を t で微分すれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{速度 } \mathbf{v}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)] = [\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, -1] \\ \text{加速度 } \mathbf{a}(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)] = [-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0] \end{array} \right.$$

この質点は、
 z 軸には速度 $v_z = -1$ で等速運動し、
 x, y 面内では等角速度で
 半径が線形に増加する円運動をする。

