

平面上の線分ABを1:2に内分する点をPとおく。

A, B, Pの位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ とする。 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で表せ。

また、

$$\|\mathbf{a}\| = 2, \|\mathbf{b}\| = 1, \|\mathbf{p}\| = \frac{\sqrt{19}}{3} \text{ であるとき、}$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 θ の余弦を求めよ。

$$\mathbf{p} = \frac{2\mathbf{a} + 1\mathbf{b}}{1 + 2} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$$

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \left\| \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} \right\|^2 = \frac{4}{9}\|\mathbf{a}\|^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{9}\|\mathbf{b}\|^2$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$

$$\left(\frac{\sqrt{19}}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \theta + \frac{1}{9} \cdot 1^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{9}{8} \left(\frac{19}{9} - \frac{16}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

[2] 球面座標と円筒座標

#1 力学演習

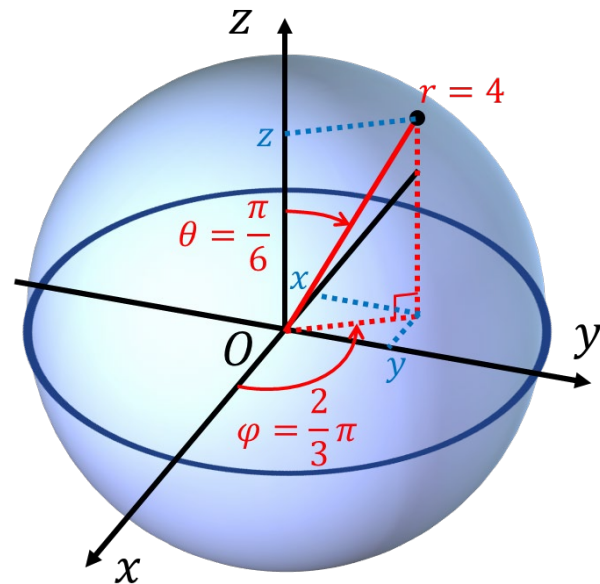
(1) 球面座標系において $(r, \theta, \varphi) = \left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ である点の直交座標を求めよ。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi = 4 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi = 4 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$z = r \cos \theta = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (x, y, z) = \underline{(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})}$$



(2) 円筒座標系において $(r, \theta, \varphi) = \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6}, 3\right)$ である点の直交座標を求めよ。

$$x = 2\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{6} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{6}$$

$$y = 2\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{6} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$z = 3$$

$$\therefore (x, y, z) = \underline{(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 3)}$$

[2] 球面座標と円筒座標

#1 力学演習

(3) 直交座標系において $(x, y, z) = (-1, \sqrt{3}, 2)$ である点の球面座標を求めよ。

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore (r, \theta, \varphi) = \underline{\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)}$$

(4) 直交座標系において $(x, y, z) = (-1, \sqrt{3}, 2)$ である点の円筒座標を求めよ。

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2$$

$$\therefore (r, \theta, \varphi) = \underline{\left(2, \frac{2\pi}{3}, 2\right)}$$

[3] 微分の復習

#1 力学演習

次の時刻 t における関数 r の1階微分 $\dot{r}$ および2階微分 $\ddot{r}$ を求めよ。

$$(1) r = t^2 + 1 \quad \dot{r} = \underline{2t} \quad \ddot{r} = \underline{2}$$

$$(2) r = \sin 2t \quad 2t = u \text{ とおくと } r = \sin u \text{ より}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(\sin u)}{du} \frac{d(2t)}{dt} = \cos u \cdot 2 = \underline{2 \cos 2t}$$

合成関数
の微分

中の微分

外の微分

同様に

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(2 \cos u)}{du} \frac{d(2t)}{dt} = 2(-\sin u) \cdot 2 = \underline{-4 \sin 2t}$$

$$(3) r = \cos \pi t \quad \pi t = u \text{ とおくと } r = \cos u \text{ より}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(\cos u)}{du} \frac{d(\pi t)}{dt} = (-\sin u) \cdot \pi = \underline{-\pi \sin \pi t}$$

同様に

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(-\pi \sin u)}{du} \frac{d(\pi t)}{dt} = -\pi \cos u \cdot \pi = \underline{-\pi^2 \cos \pi t}$$

[3] 微分の復習

#1 力学演習

次の時刻 t における関数 r の1階微分 $\dot{r}$ および2階微分 $\ddot{r}$ を求めよ。

(4) $r = e^{it}$ $it = u$ とおくと $r = e^u$ より

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(e^u)}{du} \frac{d(it)}{dt} = e^u \cdot i = \underline{ie^{it}}$$

中の微分
↓
外の微分

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(ie^u)}{du} \frac{d(it)}{dt} = ie^u \cdot i = \underline{-e^{it}}$$

(5) $r = \log(2t + 1)$ $2t + 1 = u$ とおくと $r = \log u$ より

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(\log u)}{du} \frac{d(2t + 1)}{dt} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \underline{\frac{2}{2t + 1}}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\frac{2}{u}\right)}{du} \frac{d(2t + 1)}{dt} = 2 \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot 2 = \underline{\frac{-4}{(2t + 1)^2}}$$

[3] 微分の復習

#1 力学演習

次の時刻 t における関数 r の1階微分 $\dot{r}$ および2階微分 $\ddot{r}$ を求めよ。

(6) $r = t \sin 2t$

積の微分

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (t \sin 2t)' = (t)' \sin 2t + t(\sin 2t)' \\ &= 1 \cdot \sin 2t + t(2 \cos 2t) = \underline{\sin 2t + 2t \cos 2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= (\sin 2t + 2t \cos 2t)' = (\sin 2t)' + (2t)' \cos 2t + 2t(\cos 2t)' \\ &= 2 \cos 2t + 2 \cos 2t + 2t(-2 \sin 2t) = \underline{4 \cos 2t - 4t \sin 2t}\end{aligned}$$

(7) $r = \log(t^2 + 1)$

商の微分

$$\dot{r} = \frac{(t^2 + 1)'}{t^2 + 1} = \underline{\frac{2t}{t^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{t^2 + 1} \right) = \frac{(2t)'(t^2 + 1) - 2t(t^2 + 1)'}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(t^2 + 1) - 2t(2t)}{(t^2 + 1)^2} = \underline{\frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2}}\end{aligned}$$

(1) $f(t) = [\cos 2t, \sin 2t, t^2]$ の t での1階微分 $\dot{f}$ および2階微分 $\ddot{f}$ を求めよ。

$$\dot{f}(t) = [(\cos 2t)', (\sin 2t)', (t^2)'] = \underline{[-2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 2t]}$$

$$\ddot{f}(t) = [(-2 \sin 2t)', (2 \cos 2t)', (2t)'] = \underline{[-4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 2]}$$

(2) $f(t) = [t^2, 2t]$ と $g(t) = [-t, t^2]$ において $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ が成り立つことを確かめよ。

$$(i) f(t) \cdot g(t) = t^2 \cdot (-t) + 2t \cdot t^2 = -t^3 + 2t^3 = t^3$$

$$\therefore \{f(t) \cdot g(t)\}' = (t^3)' = 3t^2$$

$$(ii) \{f(t)\}' = [(t^2)', (2t)'] = [2t, 2]$$

$$\{g(t)\}' = [(-t)', (t^2)'] = [-1, 2t]$$

$$\therefore \{f(t)\}' g(t) + f(t) \{g(t)\}' = [2t, 2] \cdot [-t, t^2] + [t^2, 2t] \cdot [-1, 2t]$$

$$= -2t^2 + 2t^2 - t^2 + 4t^2 = 3t^2$$

(i)と(ii)より、 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ が成り立つ

(3) $f(t) = [\cos 2t, t \sin 2t, t^2]$ と $g(t) = [t \cos 2t, \sin 2t, 2t]$ において
 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ が成り立つことを確かめよ。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(t) \cdot g(t) &= \cos 2t \cdot t \cos 2t + t \sin 2t \cdot \sin 2t + t^2 \cdot 2t \\ &= t(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + 2t^3 = t + 2t^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \{f(t) \cdot g(t)\}' = (t + 2t^3)' = 1 + 6t^2$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \{f(t)\}' &= [(\cos 2t)', (t \sin 2t)', (t^2)'] = [-2 \sin 2t, \sin 2t + t \cos 2t, 2t] \\ \{g(t)\}' &= [(t \cos 2t)', (\sin 2t)', (2t)'] = [\cos 2t - t \sin 2t, 2 \cos 2t, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \{f(t)\}' g(t) + f(t) \{g(t)\}' &= [-2 \sin 2t, \sin 2t + t \cos 2t, 2t] \cdot [t \cos 2t, \sin 2t, 2t] \\ &\quad + [\cos 2t, t \sin 2t, t^2][\cos 2t - t \sin 2t, 2 \cos 2t, 2] \\ &= -2t \cos 2t \sin 2t + \sin^2 2t + t \cos 2t \sin 2t + 4t^2 \\ &\quad + \cos^2 2t - t \cos 2t \sin 2t + 2t \cos 2t \sin 2t + 2t^2 \\ &= 1 + 6t^2 \end{aligned}$$

(i)と(ii)より、 $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ が成り立つ