

【第 8 回】演習問題

学籍番号 _____ 氏名 _____

[1] 万有引力からケプラーの第一法則

右図のように太陽 O (質量: M) が惑星 P (質量: m) に及ぼす力 f_r は

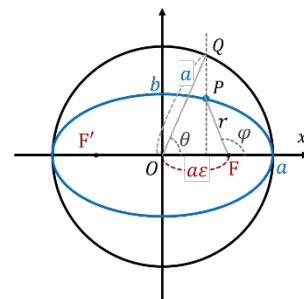
$$f_r = -G \frac{Mm}{r^2}$$

と書ける (万有引力の法則)。ただし、 G は万有引力定数、 r は OP 間の距離である。以下に従ってこの惑星の軌道が楕円軌道となることを導け。

- (1) P の位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とするとき、速度ベクトルおよび、加速度ベクトルを求めよ。 ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ の微分は既知としてよい)
- (2) $r^2\dot{\varphi} = K$, $u = 1/r$ とおいたとき、 $\dot{r}$ および $\ddot{r}$ を $du/d\varphi$ および $d^2u/d\varphi^2$ などを用いて表せ。
- (3) 動径方向の運動方程式から u に関する 2 階微分方程式を解くことで軌道を求めよ。
- (4) 近日点距離 r_0 、近日点での P の速さを v_0 とする。遠日点距離 r_1 と遠日点での速さを v_1 を求めよ。
- (5) 離心率 ε を近日点距離 r_0 と遠日点距離 r_1 を用いて表わせ。

[2] ケプラー方程式

- (1) 万有引力による楕円運動において、その力学的エネルギーを E 、面積速度を K としたとき、 $\dot{r}$ を求めよ。
- (2) 近日点および遠日点では、 $\dot{r} = 0$ であることを用いて、 $\dot{r}$ を r の 2 次方程式を含む式で表せ。
- (3) 右図のように離心角 θ を定義したとき、楕円軌道の式、近日点距離、遠日点距離はどのように書けるか。
- (4) 以上より、微分方程式を解き、ケプラー方程式を導出せよ。



[3] 地球振り子

- (1) 地球の中心を通り、まっすぐに通り抜ける穴を掘ったと仮定する。地球の密度 ρ は一様とし、空気抵抗や摩擦などの一切の抵抗力は働かないものとして、この穴に落とした質量 m の物体 P は単振動することを示し、その角振動数 ω と周期 T を求めよ。
- (2) (1) の穴が中心から y 離れたとき、角振動数 ω と周期 T を求めよ。
- (3) 地球の半径を R とするとき、(i) (1) の中心を通る穴を通して反対側に達するまでの時間と (ii) 同じ出発点から適当な速さで水平投射し、半円運動して反対側に達するまでの時間をそれぞれ求めよ。