

【第7回】演習問題

学籍番号 _____ 氏名 _____

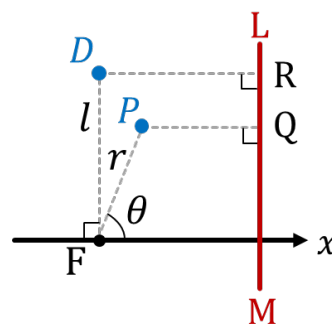
[1] 円錐曲線

- (1) 定直線 LM への距離が定点 F との距離の $1/\varepsilon$ 倍となる点 $P(r, \theta)$ の軌跡が

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

と書けることを示せ。ただし、 $\theta = 90^\circ$ のときの点 P を点 D としたときに $\overline{DF} = l$ とする。

- (2) 点 $P(r, \theta)$ は $\varepsilon < 1$ のとき楕円軌道を、 $\varepsilon > 1$ のとき双曲線軌道を、 $\varepsilon = 1$ のとき放物線軌道を描くことを示せ。
- (3) 長径 a 、短径 b の楕円の面積は $S = \pi ab$ となる。楕円を極方程式 (1) で書かれるとき、楕円の面積を ε と l で表わせ。



[2] 極座標の単位ベクトルの微分

- (1) 2次元極座標の単位ベクトル e_r, e_ϕ の時間微分が、

$$\dot{e}_r = \dot{\phi} e_\phi \quad \dot{e}_\phi = -\dot{\phi} e_r$$

と書けることを学んだ。それぞれの2階微分を求めよ。

- (2) 点 P の位置ベクトルが $r = r e_r$ であらわされるとき、速度ベクトル $v = dr/dt$ を求めよ。
- (3) 半径 R (一定) の円周上を、一定の角速度 $\omega = \dot{\theta}$ で回転する質点の加速度ベクトル $a = dv/dt$ を求め、その向きについて考察せよ。

[3] ケプラーの法則

- (1) ケプラーの第1法則 (惑星は楕円軌道 ((1) 式で $0 < \varepsilon < 1$) を描く) と、第2法則 (面積速度一定) を用いて、惑星の公転周期 T の2乗を面積速度 A と a および l を用いて表わせ。([1] (3) の結果を用いてよい)
- (2) 惑星が太陽から受ける引力は、

$$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$$

と書ける。万有引力の式と比較し、(1) の式から l を消去し、第3法則を示せ。

- (3) 地球の長半径 ($1\text{AU} = 1.495 \times 10^{11} [\text{m}]$) と周期から、 T^2/a^3 の値を求め、太陽の質量を求めよ。ただし、万有引力定数 $G = 6.673 \times 10^{-11} [\text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2]$ を用いてよい。