

【第 3 回】演習問題 学籍番号 _____ 氏名 _____

[1] オイラーの公式

- (1) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて $\tan \theta$ を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ で表せ。
- (2) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて
3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$
 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ を示せ。

[2] 運動の法則

半径 a の円周上を一定の速さで、反時計回りに改訂している物体の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = [a \cos \omega t, a \sin \omega t]$$

と表される。この運動について以下の問に答えよ。

- (1) 速度はつねに円の接線方向を向くことを示せ。
- (2) 加速度(力)はつねに円の中心を向き、速度と直交していることを示せ。

[3] 運動量と力積

- (1) $t = 0$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(t = 0) = [2e^{-1}, 2e]$ をもっていた物体に、
時刻 $0 \leq t \leq 2$ の間に力 $\mathbf{f}(t) = [e^{-\frac{t}{2}}, -e^{\frac{t}{2}}]$ が作用したとき、時刻 $t = 2$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(2)$ を求めよ。
- (2) $t = \frac{\pi}{2}$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(t = \frac{\pi}{2}) = [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3}{2}]$ をもっていた物体に、
時刻 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ の間に力 $\mathbf{f}(t) = [\cos^2 t, \sin^2 t, \sin t \cos t]$ が作用したとき、
時刻 $t = \pi$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(\pi)$ を求めよ。

[4] 運動量保存則 (1 次元)

ほかの天体から十分に離れた宇宙空間における質量 M のロケットの 1 次元の運動について、以下の問いに答えよ。

- (1) 速度 $v_0 = 100$ [m/s] で等速直線運動をしているロケットが、後方に質量 $M/3$ のガスを噴射した。ロケットから見てガスの相対速度が $-u_1 = -1500$ [m/s] であったとき、噴射後のロケットの速度 v_1 [m/s] を求めよ。
- (2) その後、前方に質量 $M/10$ のガスを噴射した。ロケットから見てガスの相対速度が $u_2 = 500$ [m/s] であったとき、噴射後のロケットの速度 v_2 [m/s] を求めよ