

力学 I

(第14回) 剛体(4)

【今日の内容】

- 剛体の空間運動

【前回の復習】

多体系の運動方程式

質量中心の運動方程式

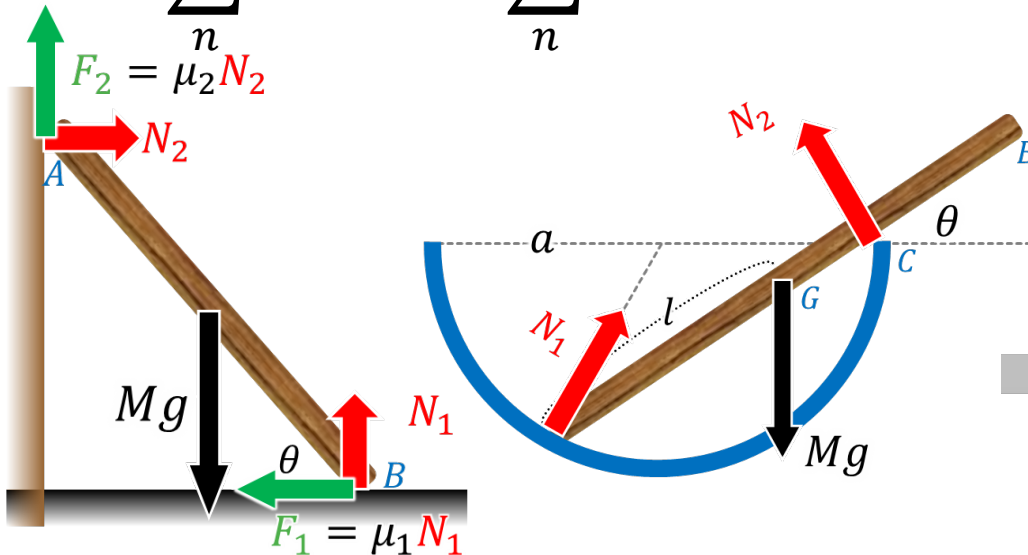
回転の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_n \mathbf{F}_i$$

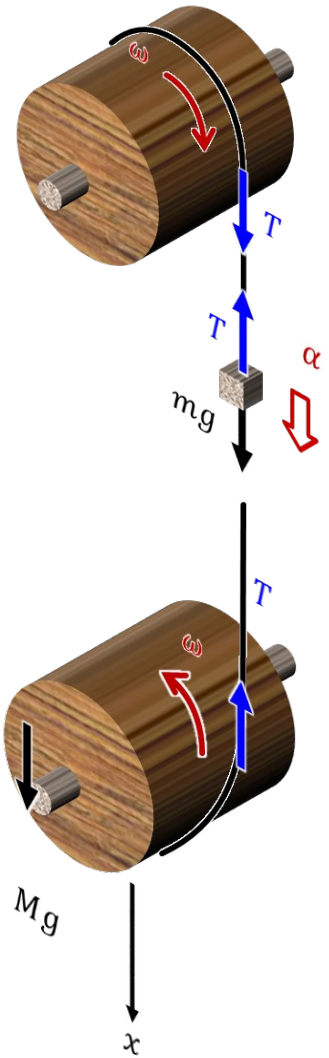
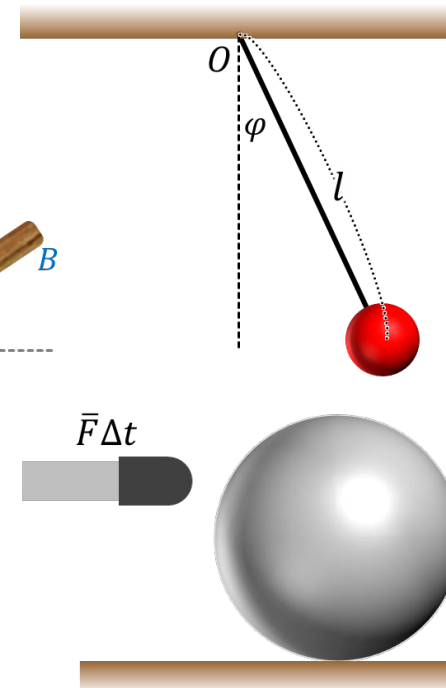
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}$$

剛体の静力学: つり合っている

$$\sum_n \mathbf{F}_i = 0 \quad \sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$



剛体の平面運動



剛体の空間運動：歳差運動

コマの回転軸に力のモーメントを加えるとどうなるか

剛体の回転軸 OA の O を固定し、
 A に $+x$ 軸方向に力 F を加える

$\vec{OA} = \mathbf{r}$ とすると、力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (+y \text{ 方向})$$

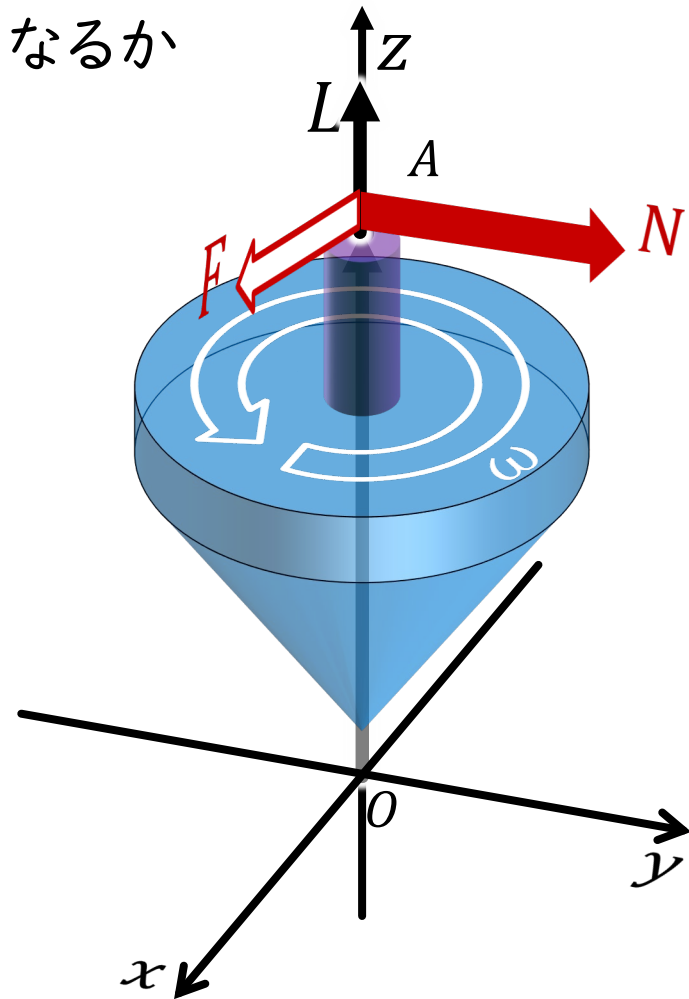
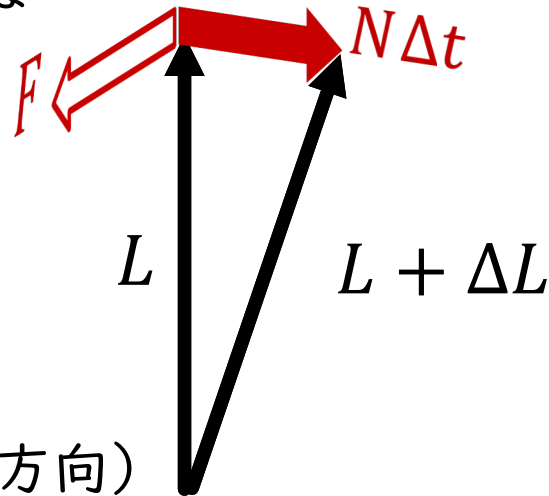
回転の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

近似的に

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{N}$$

$$\therefore \Delta \mathbf{L} = \mathbf{N} \Delta t \quad (+y \text{ 方向})$$



よって、 $+x$ 方向に力を加えると、
 角運動量の軸は $+y$ 方向に変化する

→ 押した方向の 90° ズれた方向に傾く

剛体の空間運動：歳差運動

では、高速回転しているコマが傾いた場合どうなるか
(厳密に解くのは難しいので概略のみ)

大きな角速度 ω で回転するコマが
小さな角速度 Ω で歳差運動 (precession)

自転の角運動量 L は $L = I\omega$

$\vec{OG} = \mathbf{r}_G$ とすると、
力のモーメントは

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}$$

$$\|\mathbf{N}\| = Mgl \sin \theta$$

$\Delta L = N\Delta t$ より

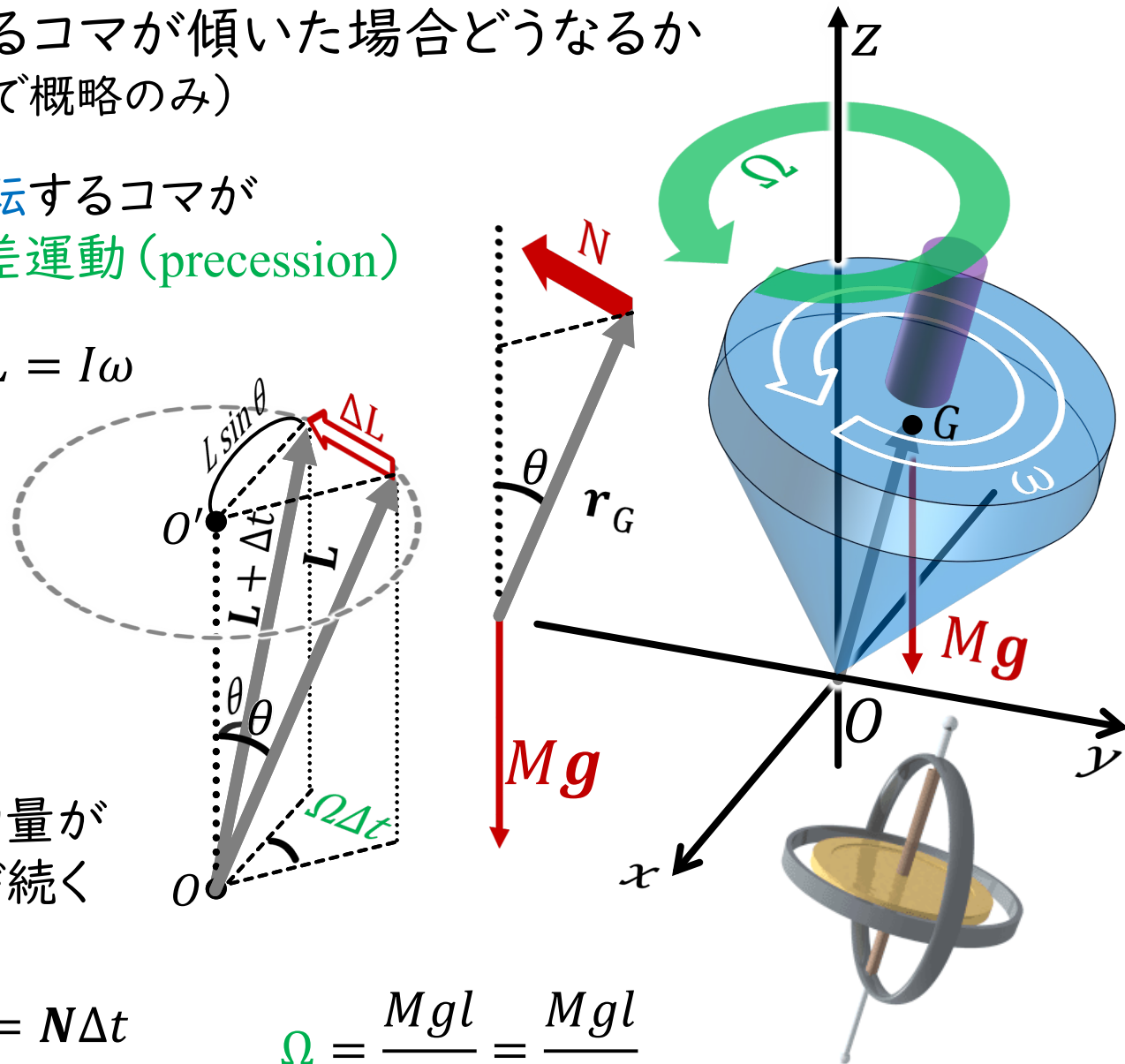
この N により角運動量が
変化し、歳差運動が続く

歳差運動に関して

$$(L \sin \theta) \Omega \Delta t = \Delta L = N \Delta t$$

$$(L \sin \theta) \Omega = N$$

$$\Omega = \frac{Mgl}{L} = \frac{Mgl}{I\omega}$$



【本日のポイント】

多体系の運動方程式

質量中心の運動方程式

回転の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_n \mathbf{F}_i$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}$$

剛体の空間運動

