力学 I

（第12回）剛体（2）

【今日の内容】

- 慣性モーメント
  円板・円柱・球・直方体
- 質量中心を通らない軸まわりの
  慣性モーメント
- （発展）歳差運動

担当教員：西沢望（S-301）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

【前回の復習】

多体系の回転運動の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}') = \boldsymbol{N}_G + \boldsymbol{N}'$$

質量中心の運動　　質量中心のまわりの個々の運動

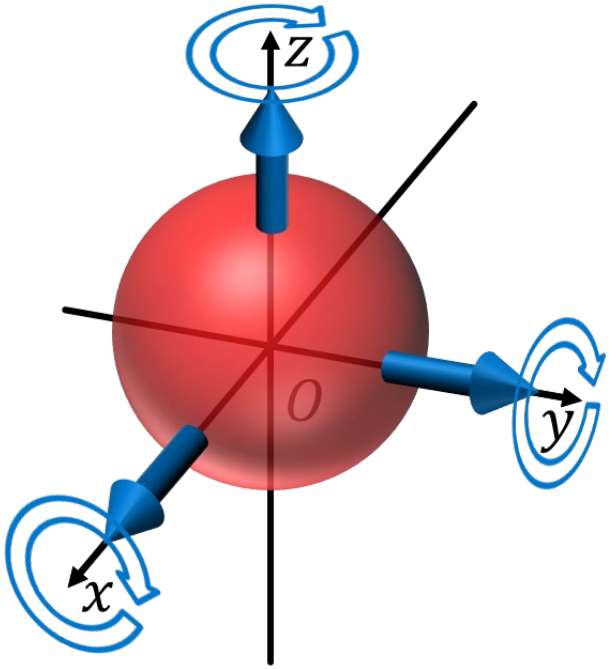
剛体　大きさをもった決して形を変えない硬い理想的な物体

$$\boldsymbol{L} = \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} dV \quad \boldsymbol{r}_G = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$= \omega \times \underline{\underline{\sum_i^n m_i r_i^2}} = I\omega$$

慣性モーメント
(moment of inertia)

$$I \equiv \sum_i^n m_i r_i^2$$



z軸まわりの慣性モーメント

$$I_z = \sum_i m_i\,({x_i}^2 + {y_i}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\,dV$$

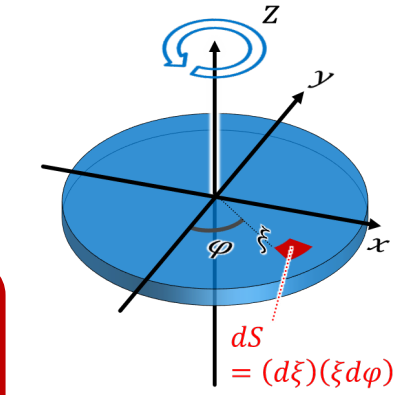
【本日のポイント】

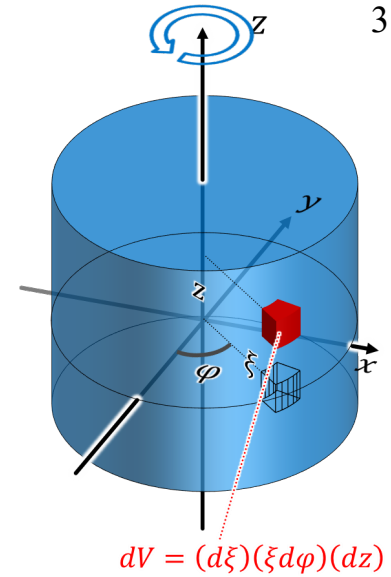
剛体の z 軸まわりの慣性モーメント I_z

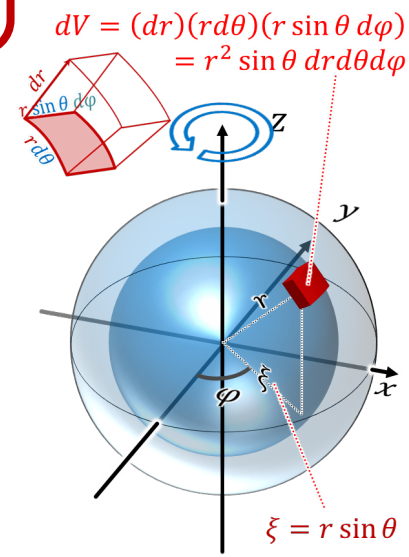
$$I_z = \sum_i m_i\,(x_i{}^2 + y_i{}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\,dV$$

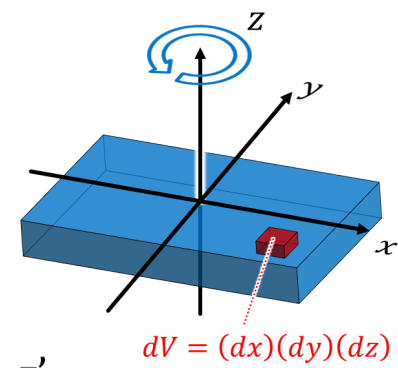
慣性モーメントの求め方

1. (全質量 M) = (密度 ρ) × (体積 V) から密度と体積の関係を求める。
2. 線分要素 (ds)、面積要素 (dS) 、体積要素 (dV) を求める。
3. 回転軸からみた要素までの距離の2乗 ξ^2 または $(x^2 + y^2)$ を求める。
4. 慣性モーメントの式 (↑) に代入して積分を実行する。



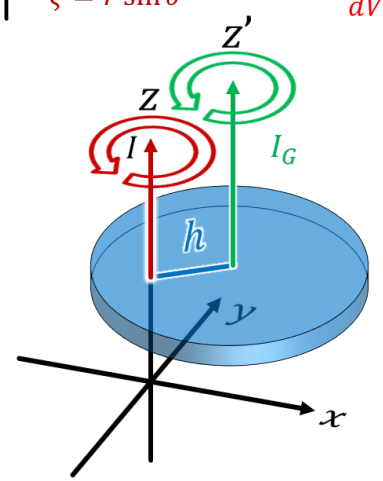






質量中心を通らない軸の慣性モーメント

$$I_z = Mh^2 + I_G$$

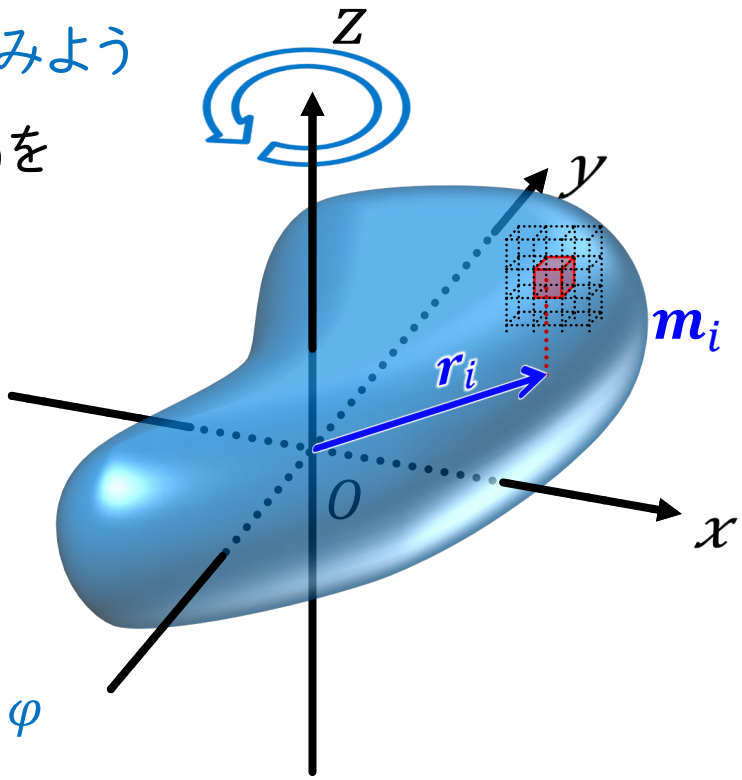


慣性モーメントを求める

剛体の z 軸まわりの慣性モーメント I_z を求めてみよう

剛体を細分化した i 番目の微小体積(質量 m_i)を考える

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (\rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i)\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i$$



z 軸まわりの角運動量は

$$L_z = \sum_i m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right)$$

同様に円柱座標に変換すると

$$x_i = r_i \cos\varphi \qquad y = y_i \sin\varphi$$

$$\dot{x}_i = -r_i\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \dot{y}_i = r_i\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$L_z = \sum_i m_i\ (r_i{}^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + r_i{}^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi) = \sum_i m_i\,(x_i{}^2 + y_i{}^2)\dot{\varphi}$$

$$= \omega \sum_i m_i\,(x_i{}^2 + y_i{}^2)$$

$$\boxed{I_z = \sum_i m_i\,(x_i{}^2 + y_i{}^2)}$$

慣性モーメント

z 軸まわりの慣性モーメント I_z

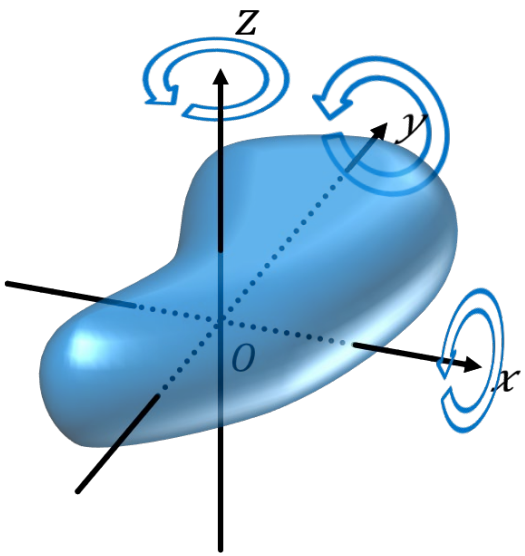
$$I_z = \sum_i m_i\,({x_i}^2 + {y_i}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\,dV$$

x 軸まわりの慣性モーメント I_x

$$I_x = \sum_i m_i\,({y_i}^2 + {z_i}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(y^2 + z^2)\,dV$$

y 軸まわりの慣性モーメント I_y

$$I_y = \sum_i m_i\,({z_i}^2 + {x_i}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(z^2 + x^2)\,dV$$



慣性モーメントの求め方

1. (全質量 M) = (密度 ρ) × (体積 V)
   から密度と体積の関係を求める。
2. 線分要素 (ds)、面積要素 (dS) 、体積要素 (dV) を求める。
3. 回転軸からみた要素までの距離の2乗 ξ^2 または $(x^2 + y^2)$ を求める。
4. 慣性モーメントの式 (↑) に代入して積分を実行する。

慣性モーメントの例：円板

質量 M で半径 a の薄い<u>**円板**</u>の
中心を通る z 軸のまわりの慣性モーメント

$$\boxed{\text{面密度：}\ \sigma = \frac{M}{\pi a^2}}$$

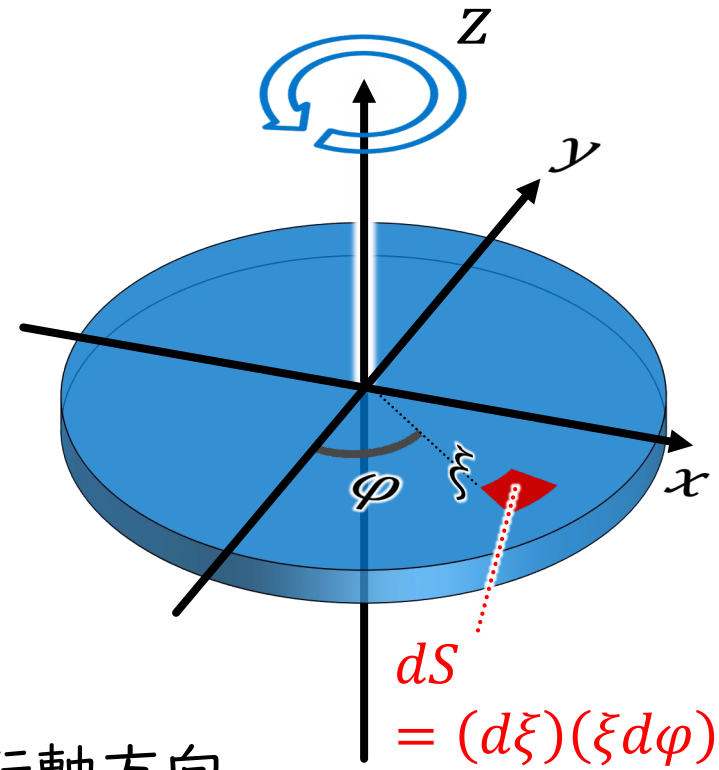
$$dS = \xi d\xi d\varphi$$

$$I_z = \int \sigma\xi^2\, dS = \int_S (\sigma\xi^2)\, d\xi\, \xi d\varphi$$

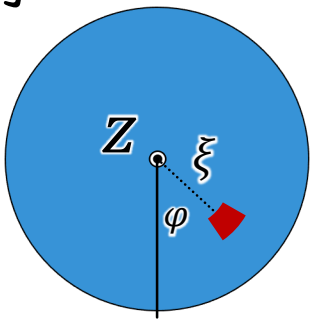
$$= \int_0^a d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi\, (\sigma\xi^3)$$

$$= \sigma \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \sigma \left[\frac{1}{4}\xi^4\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sigma}{2} a^4 = \frac{1}{2} M a^2 \quad I_z = \frac{1}{2} M a^2$$



回転軸方向
から見ると



慣性モーメントの例：円柱

質量 M で半径 a 高さ l の<u>円柱</u>の
中心を通る z 軸のまわりの慣性モーメント

$$\boxed{\text{密度}：\rho = \frac{M}{\pi a^2 l}}$$

$$dV = \xi d\xi d\varphi dz$$

$$I_z = \int \rho \xi^2 \, dV$$

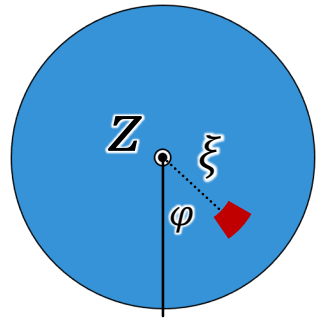
$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho \xi^2 \, d\xi \, \xi d\varphi \, dz$$

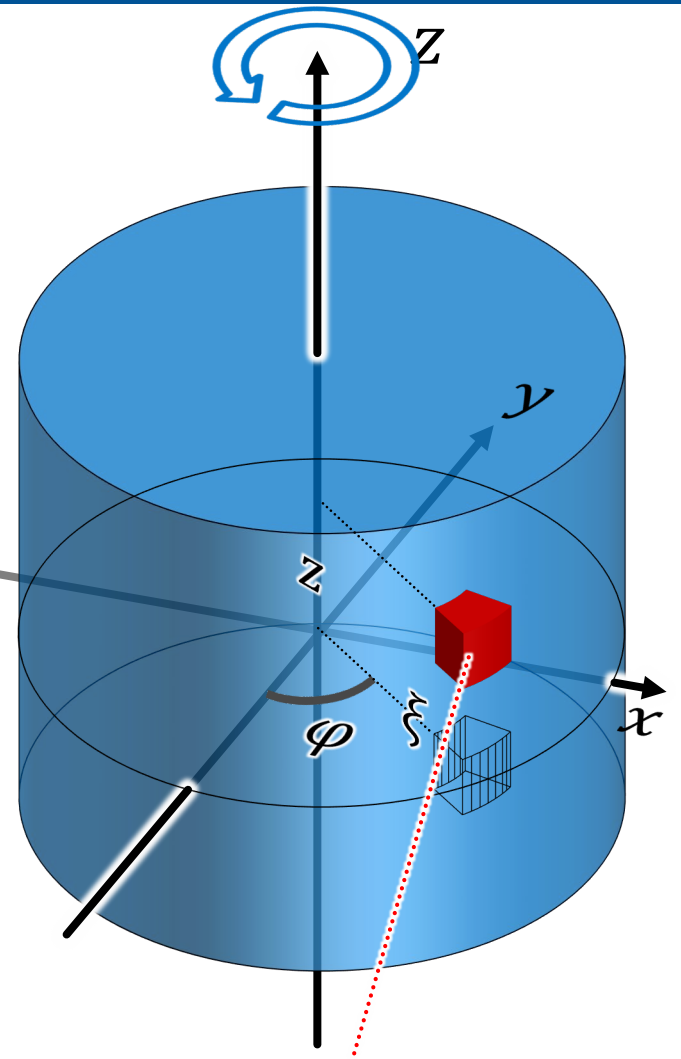
$$= \rho \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz$$

$$= \rho \left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\rho a^4}{4} \times 2\pi \times l$$

$$= \frac{M}{\pi a^2 l} \frac{\pi a^4 l}{2} = \frac{1}{2} M a^2$$

回転軸方向
から見ると





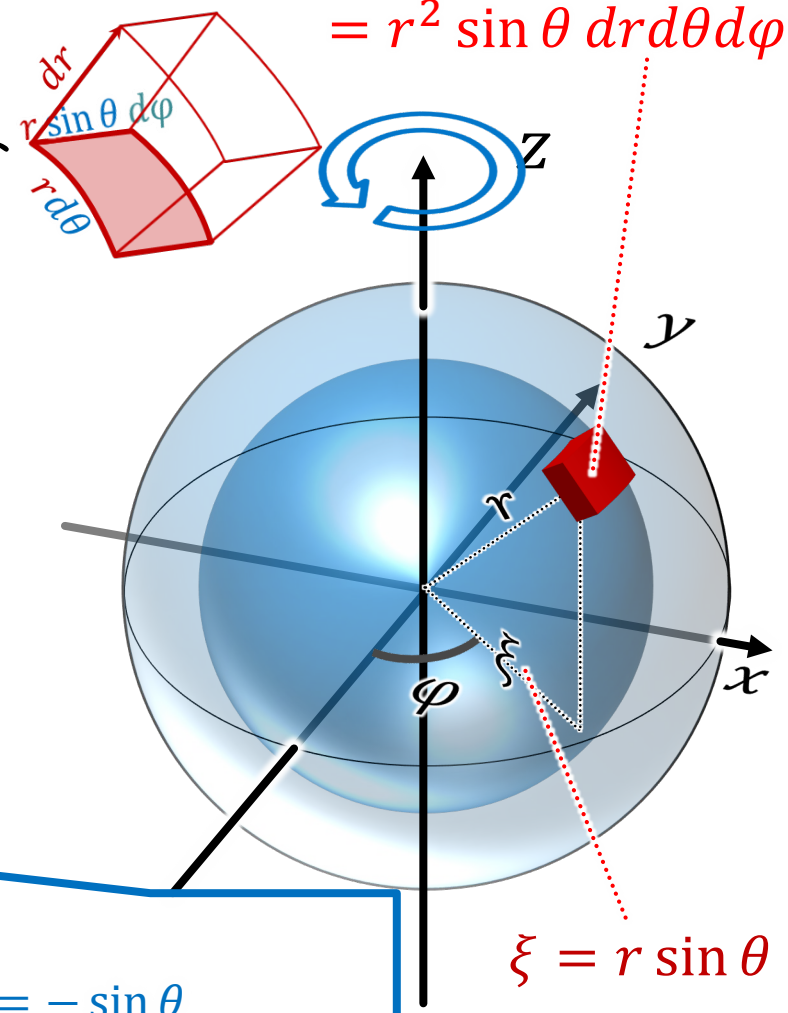
$$dV = (d\xi)(\xi d\varphi)(dz)$$

$$I_z = \frac{1}{2} M a^2$$

慣性モーメントの例：球

$$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi)$$
$$= r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

質量 M で半径 a の**球**の
中心を通る z 軸のまわりの慣性モーメント



$$\xi = r\sin\theta$$

$$\boxed{\text{密度}: \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3M}{4\pi a^3}}$$

$$I_z = \int \rho \xi^2\, dV$$

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi}$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho (r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

$$= \rho \int_0^a r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta$$

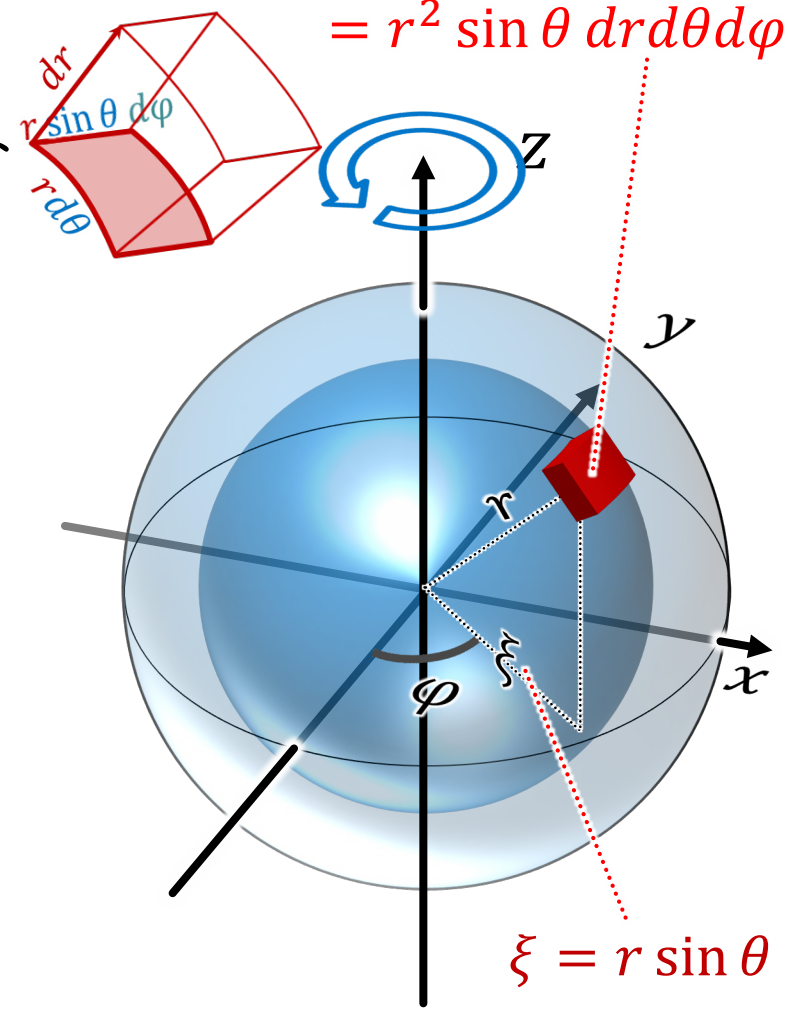
$$d(\cos\theta) = -\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int_{+1}^{-1} (1-\cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = -\left[(\cos\theta) - \frac{(\cos\theta)^3}{3}\right]_1^{-1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

慣性モーメントの例：球

$$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi)$$
$$= r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

質量 M で半径 a の**球**の
中心を通る z 軸のまわりの慣性モーメント



$$\boxed{\text{密度}: \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3M}{4\pi a^3}}$$

$$I_z = \rho \int_0^a r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{=\frac{4}{3}}$$

$$= \rho \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a [\varphi]_0^{2\pi} \times \frac{4}{3}$$

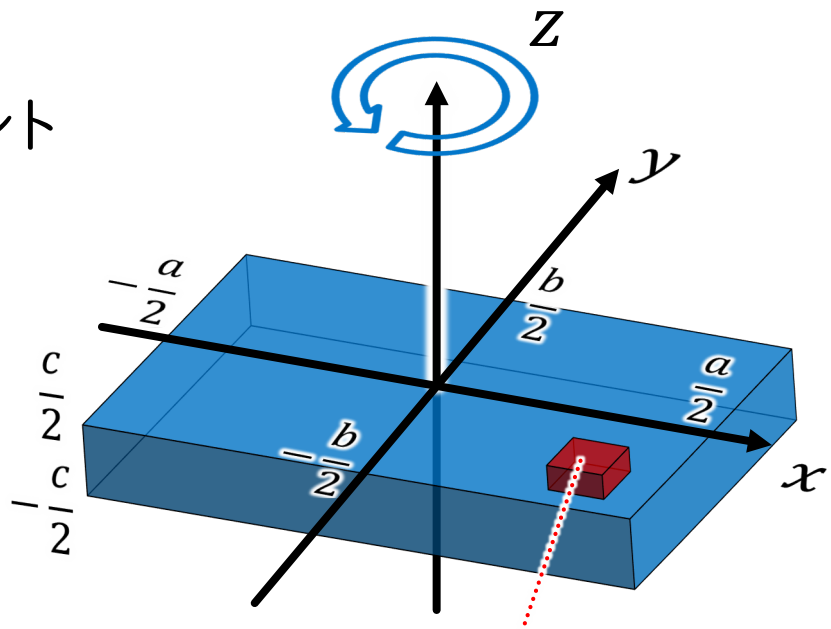
$$= \rho \times \frac{a^5}{5} \times (2\pi) \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \times \frac{a^5}{5} \times (2\pi) \times \frac{4}{3} \quad = \frac{2}{5} M a^2$$

慣性モーメントの例：直方体

3辺がa, b, c、質量Mの**直方体**の
中心を通るz軸のまわりの慣性モーメント

$$\boxed{\text{密度：}\ \rho = \frac{M}{abc}}$$



$dV = (dx)(dy)(dz)$

$$I_z = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2+y^2)\rho dxdydz$$

$$= \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}dz + \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y^2dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}dz$$

$$= \rho\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \times [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \times [z]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} + \rho[x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \times [z]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\rho bc}{12}a^3 + \frac{\rho ac}{12}b^3 \quad = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$

固定軸をもつ剛体の慣性モーメント

質量中心を通らない軸の慣性モーメント

$$I_z = \int \rho(\boldsymbol{r})\underline{\underline{(x^2+y^2)}}dV$$

回転軸からの距離の2乗 $= \|\boldsymbol{r}\|^2$

$$= \int \rho(\boldsymbol{r})\{(x_G+x')^2+(y_G+y')^2\}dV$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}'$

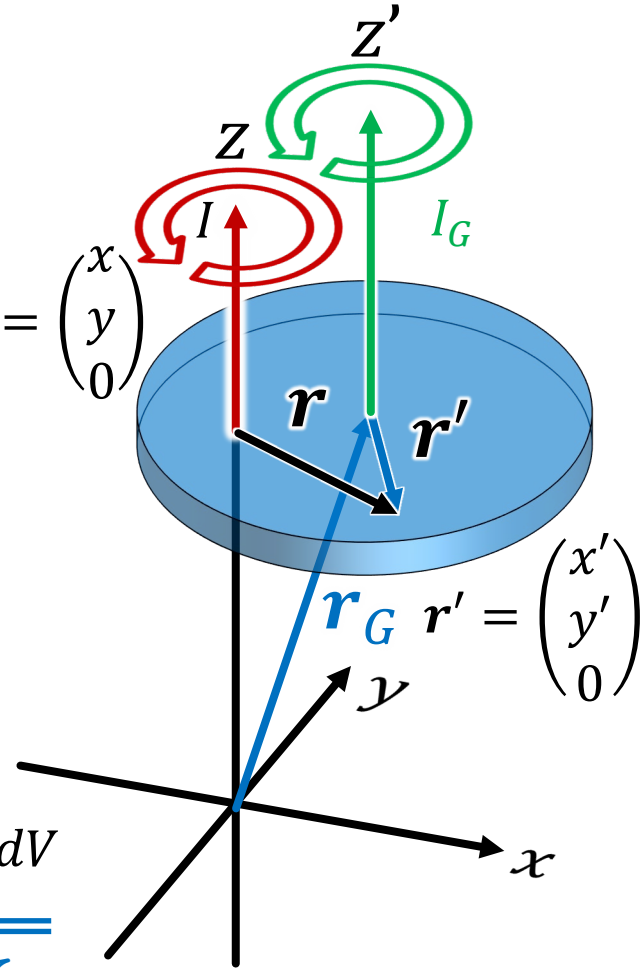
$$= \int \rho(\boldsymbol{r})(x_G^2+2x_Gx'+x'^2+y_G^2+2y_Gy'+y'^2)dV$$

$$= (x_G^2+y_G^2)\int \rho(\boldsymbol{r})dV + \int (x'^2+y'^2)\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$+2x_G\underline{\underline{\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV}} + 2y_G\underline{\underline{\int y'\rho(\boldsymbol{r})dV}}$$

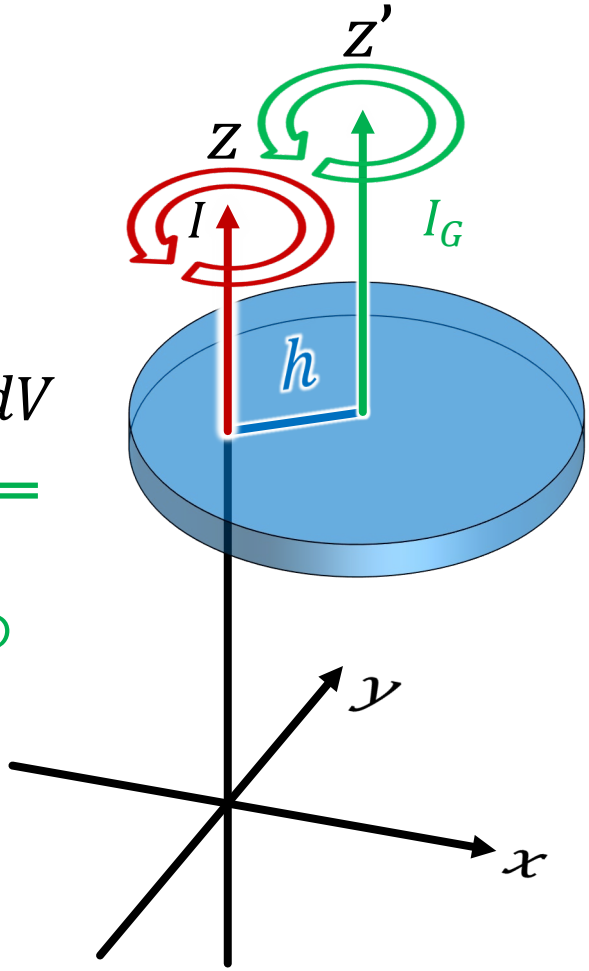
質量中心からの距離に対して

$$\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r})dV = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i' = 0\right)$$ より 0



固定軸をもつ剛体の慣性モーメント

質量中心を通らない軸の慣性モーメント



$$I_z = \underbrace{(x_G^2 + y_G^2)}_{\equiv h^2} \underbrace{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}_{M} + \underbrace{\int (x'^2 + y'^2)\rho(\boldsymbol{r})dV}_{I_G}$$

質量中心軸まわりの
慣性モーメント

$$I_z = Mh^2 + I_G$$

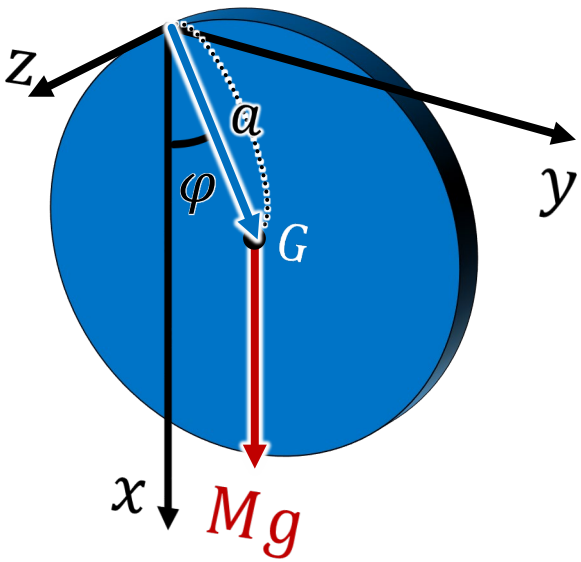
$L_z = I_z\omega$より

$$\boxed{L_z = (Mh^2 + I_G)\omega} \Rightarrow \dot{L}_z = N$$

（$h = 0$ とすれば質量中心周りとなる）

例題：質量中心を通らない軸まわりの慣性モーメント

質量 M 半径 a の厚さも密度も一様な円板の1つの端点を回転軸とする実体振り子がある。
この実体振り子が微小振動するときの角振動数 ω_0 と周期 T を求めよ。



z 軸まわりの回転の運動方程式は　$I_z\ddot{\varphi} = N_z$

$$\boldsymbol{r}_G = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_G = \begin{pmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{f}_G = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \\ Mg & 0 & 0 \end{vmatrix} = -Mga\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_z \cong -Mga\varphi\boldsymbol{e}_z$$

慣性モーメントは　$I_z = Mh^2 + I_G$ より　$I_z = Ma^2 + \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2$

よって　$I_z\ddot{\varphi} = N_z$

$$\frac{3}{2}Ma^2\ddot{\varphi} = Mga\varphi \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3a}\varphi \qquad \therefore \omega_0 = \underline{\sqrt{\frac{2g}{3a}}} \qquad T = \underline{2\pi\sqrt{\frac{3a}{2g}}}$$

剛体のエネルギー保存則

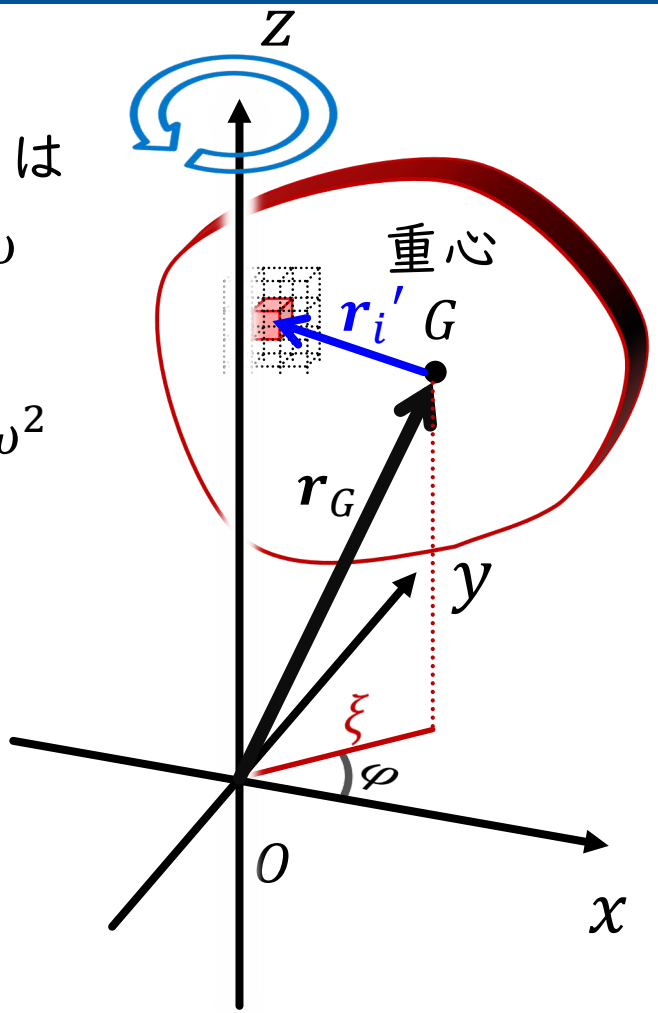
剛体の 運動エネルギーを求める

剛体を細分 i 番目の微小体積(質量 m_i)の速さ v_i は

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}_i\dot{\varphi} = \boldsymbol{r}_i\omega = (\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_i{}')\omega = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{r}_i{}'\omega$$

$$\boldsymbol{v}_i{}^2 = \|\boldsymbol{v}_i\|^2 = \|\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{r}_i{}'\omega\|^2$$

$$= \|\boldsymbol{v}_G\|^2 + 2\boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{r}_i'\omega + \|\boldsymbol{r}_i{}'\|^2\omega^2$$



よって、剛体全体の運動エネルギー K は

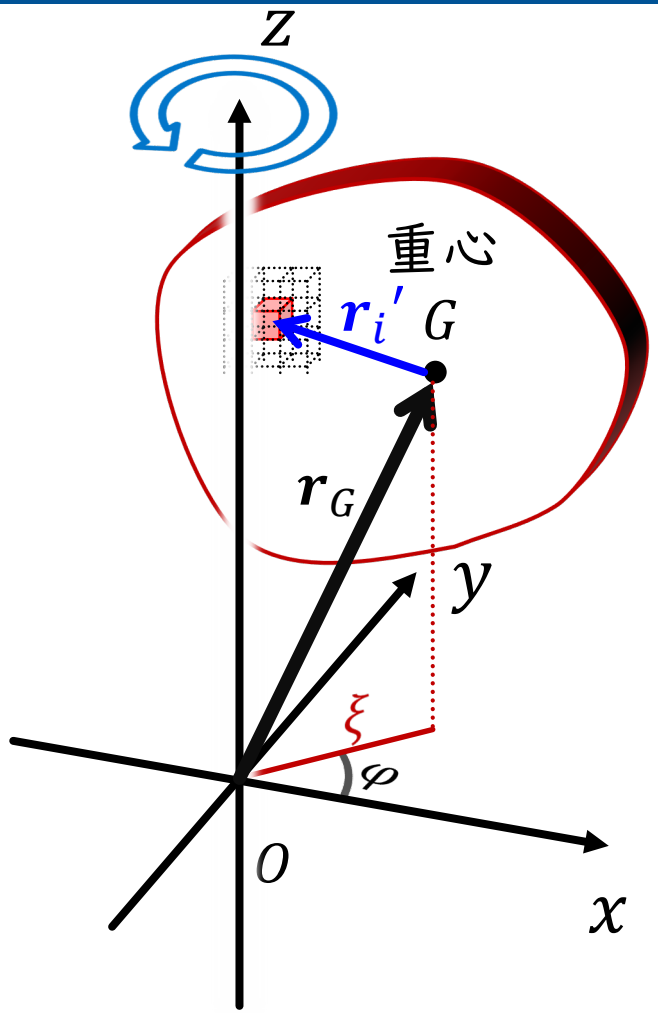
$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i{}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\{\|\boldsymbol{v}_G\|^2 + 2\boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{r}_i'\omega + \|\boldsymbol{r}_i{}'\|^2\omega^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\|\boldsymbol{v}_G\|^2 + \omega\boldsymbol{v}_G \cdot \underbrace{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'}_{=0} + \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum_i m_i\|\boldsymbol{r}_i{}'\|^2}_{=I}$$

剛体のエネルギー保存則

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G{}^2}_{\text{重心の運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{G\text{を通る軸の周りの回転による運動エネルギー}} = K_G + K'$$



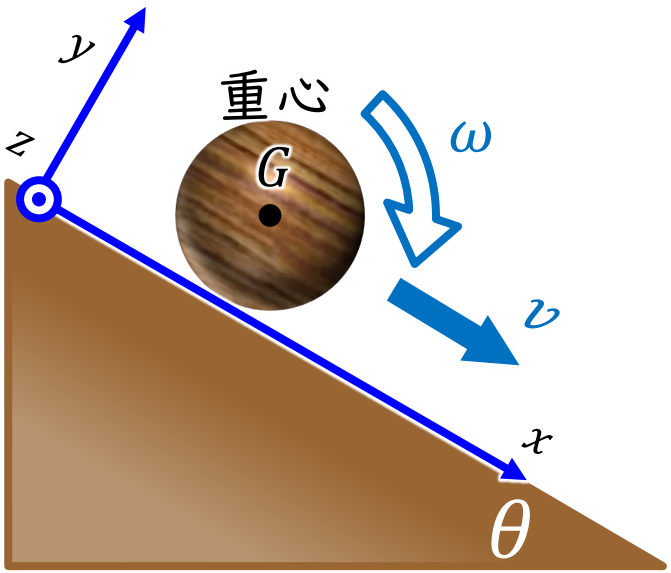
位置エネルギー U を加えた
全力学的エネルギーは

$$\boxed{\begin{aligned} E &= K + U \\ &= (K_G + K') + U \\ &= \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + U \end{aligned}}$$

例題：斜面を転がる球

水平面と θ の角をなす斜面上を、
質量 M 半径 a の一様な球が転がっている。
球は滑ることなく回転するものとする。

このとき、球にはたらく摩擦力は動摩擦力ではなく静止摩擦力であることに注意



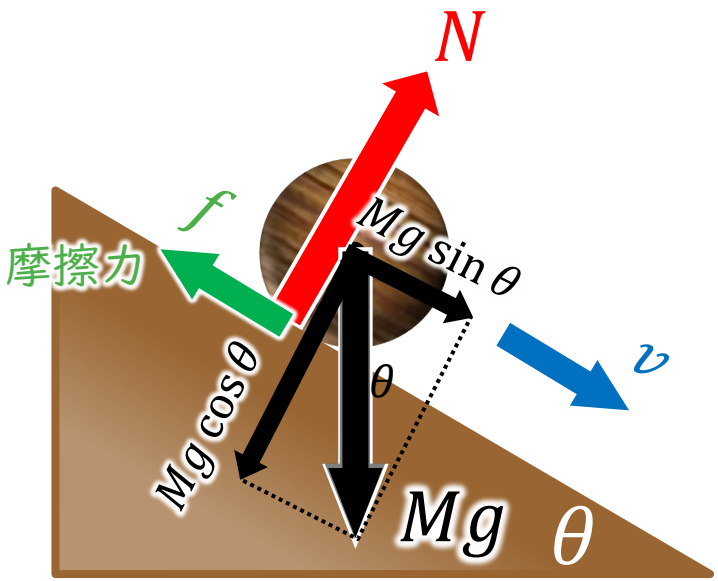
重心の運動

x 軸方向の重心の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - f$$

$$M\dot{v} = Mg\sin\theta - f$$

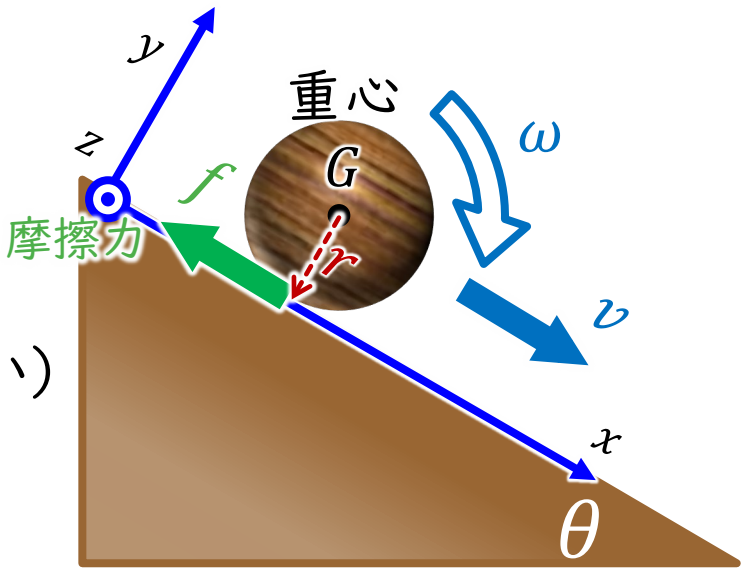
$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - f$$



例題：斜面を転がる球

回転の運動

球に回転を及ぼす力のモーメントは
斜面からの摩擦力である。
（重力の x 軸方向の成分は回転中心に
はたらいているため回転には寄与しない）



$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -a & 0 \\ -f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -af\boldsymbol{e}_z$$

回転の運動方程式 の z 成分は、

$$\frac{d}{dt}L_z = N_z$$

$$-I\frac{d}{dt}\omega = N_z$$

$v = a\omega$ より $I\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{a}\right) = af$

$$\frac{I}{a^2}\frac{dv}{dt} = f$$

球の慣性モーメントは $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$
であるから

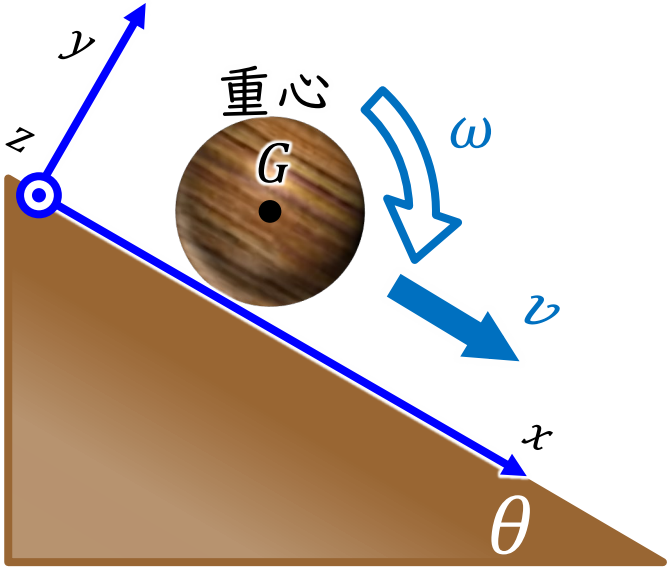
$$\frac{2}{5}M\frac{dv}{dt} = f$$

例題：斜面を転がる球

f を重心の運動方程式に代入すると

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - \frac{2}{5}M\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \underline{\frac{5}{7}g\sin\theta}$$



摩擦力の大きさ f

$$f = \frac{2}{5}M\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right) = \underline{\frac{2}{7}Mg\sin\theta}$$

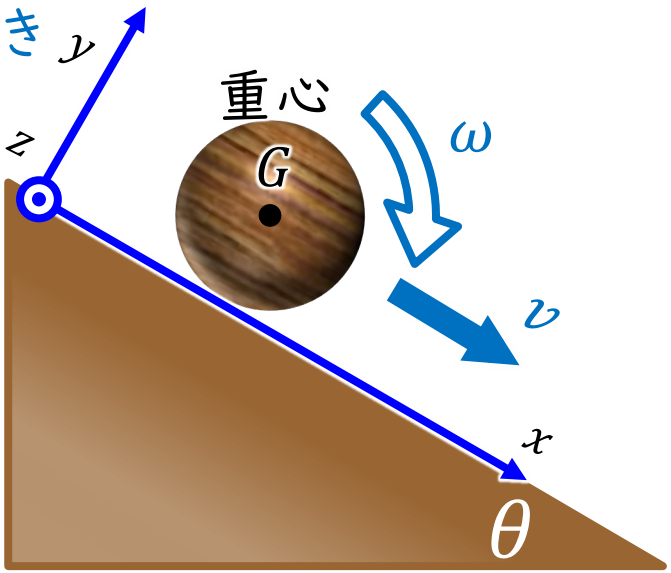
静止摩擦係数を μ とすると、摩擦力 f は $f = \mu Mg\cos\theta$ であるから

$$f = \mu Mg\cos\theta = \frac{2}{7}Mg\sin\theta$$

$$\mu = \underline{\frac{2}{7}\tan\theta}$$

例題：斜面を転がる球

時刻 $t=0$ で $v=\omega=0$ の状態から落ちたとき



$$\frac{dv}{dt}=\frac{5}{7}g\sin\theta$$

積分

$$v=\frac{5}{7}g\sin\theta\cdot t \qquad (t=0\text{で}\ v=0)$$

積分

$$x=\frac{5}{14}g\sin\theta\cdot t^2 \qquad (t=0\text{で}\ x=0)$$

また、$v=a\omega$ より $\omega=\dfrac{5}{7a}g\sin\theta\cdot t$

このとき、運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\cdot t\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}Ma^2\left(\frac{5}{7a}g\sin\theta\cdot t\right)^2$$

$$=\frac{5}{14}Mg^2\sin^2\theta\,t^2=Mg\underbrace{\left(\frac{5}{14}g\sin\theta\cdot t^2\right)}_{=x}\sin\theta$$

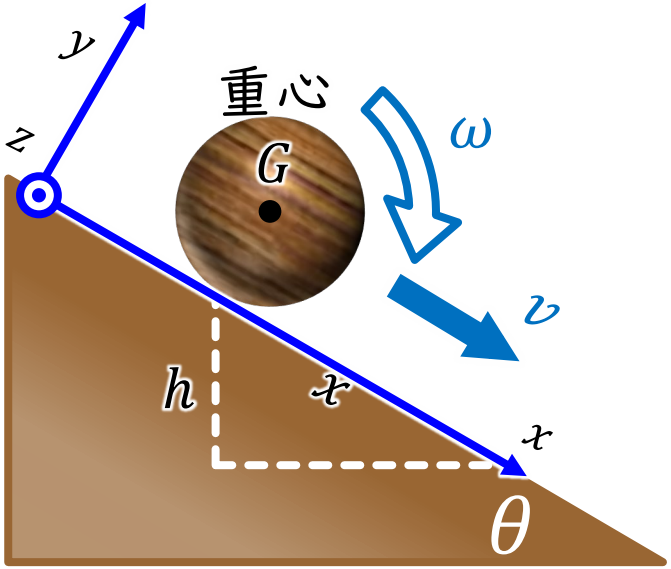
$$=Mg(x\sin\theta)$$

例題：斜面を転がる球

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\underbrace{(x\sin\theta)}_{=h}$$

転がり落ちた高さ

$$\boxed{\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh}$$



摩擦力がはたらいているにも関わらず
エネルギー保存則が成り立つ
＝ 摩擦力自体は仕事をしていない

落ちた高さ h の時の速度 v_h

エネルギー保存則をもちいると

$$\frac{1}{2}M\cdot 0^2 + \frac{1}{2}I\cdot 0^2 + Mgh = \frac{1}{2}M\cdot {v_h}^2 + \frac{1}{2}I\cdot\left(\frac{v_h}{a}\right)^2 + Mg\cdot 0$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M{v_h}^2 + \frac{1}{5}M{v_h}^2 = \frac{7}{10}M\cdot {v_h}^2 \qquad \therefore v_h = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

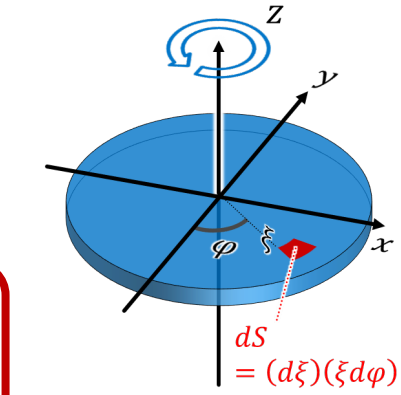
【本日のポイント】

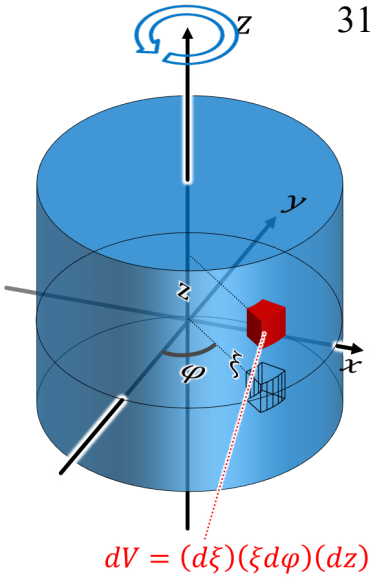
剛体の z 軸まわりの慣性モーメント I_z

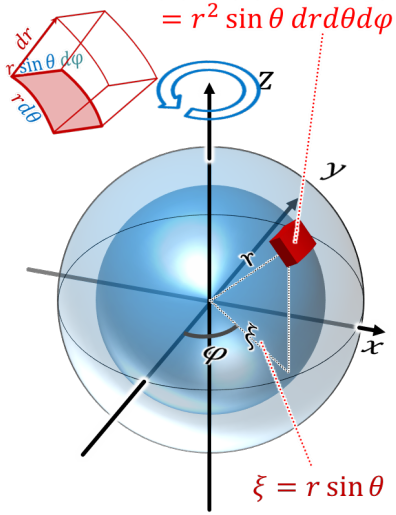
$$I_z = \sum_i m_i\,(x_i{}^2 + y_i{}^2) = \int \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)\,dV$$

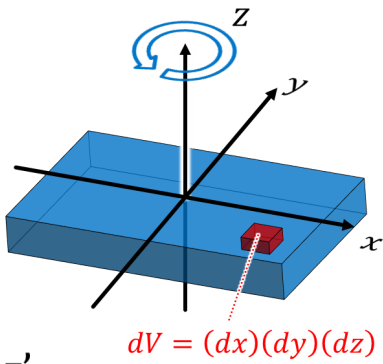
慣性モーメントの求め方

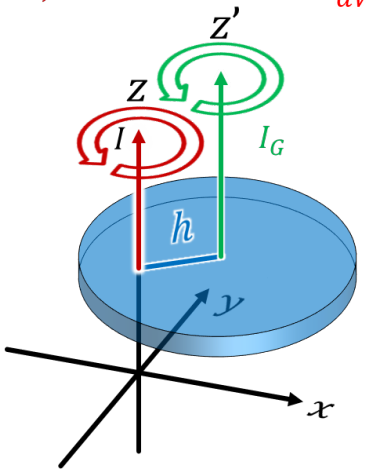
1. (全質量 M) = (密度 ρ) × (体積 V) から密度と体積の関係を求める。
2. 線分要素 (ds)、面積要素 (dS) 、体積要素 (dV) を求める。
3. 回転軸からみた要素までの距離の2乗 ξ^2 または $(x^2 + y^2)$ を求める。
4. 慣性モーメントの式 (↑) に代入して積分を実行する。









質量中心を通らない軸の慣性モーメント

$$I_z = Mh^2 + I_G$$