

# 力学 I

## (第11回) 剛体 (I)

### 【今日の内容】

- 多体系の角運動量
- 剛体
- 固定軸をもつ剛体の運動
- 物理振り子

# 【前回の復習】

2

## 2体問題

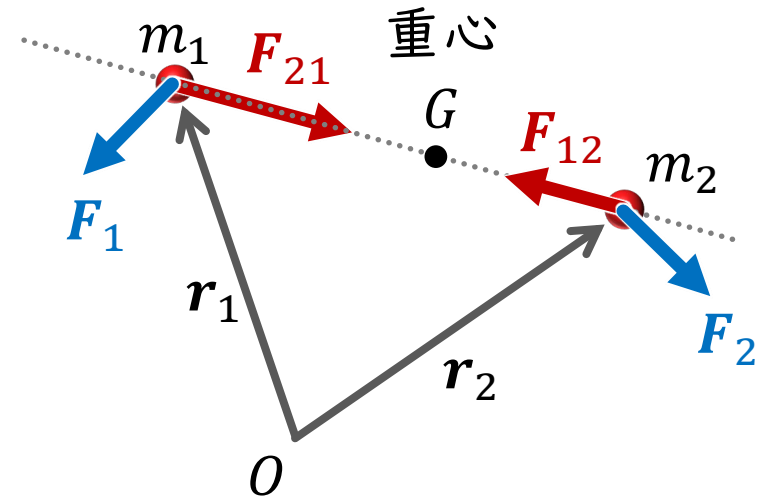
$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2$$

質量中心の運動方程式

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

相対運動の運動方程式

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$



外力がない  
または一様な力が  
はたらく場合

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

## 多体問題

質量中心に対する  
運動方程式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2$$



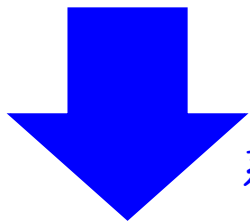


# 多体系 (回転運動)

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ji}$$

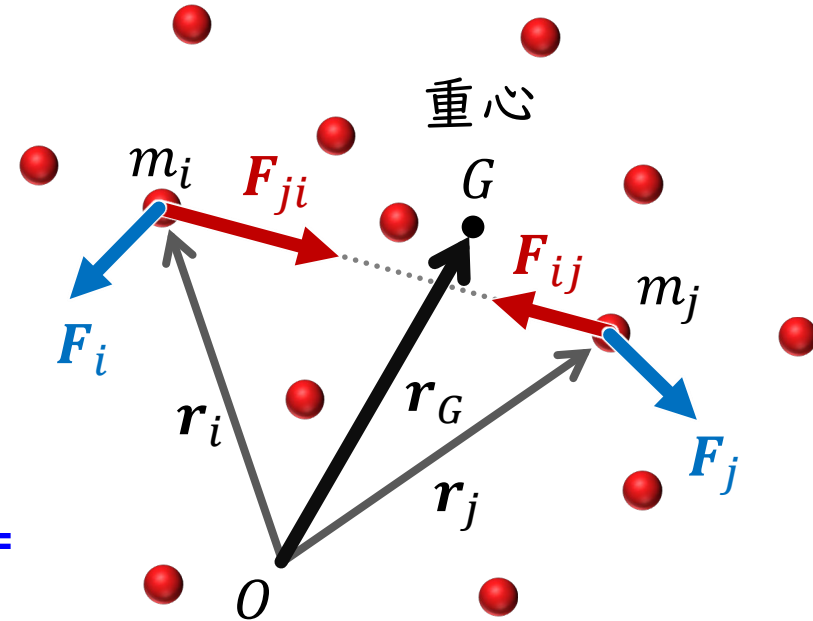
$\mathbf{r}_i \times$  を左から作用させると

$$\underbrace{\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i}_{\text{質点}i\text{の角運動量}} = \underbrace{\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i}_{\text{質点}i\text{に対する外力のモーメント}} + \underbrace{\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}}_{\text{相互作用のモーメント}}$$



系全体の和をとる

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}$$



(右辺第二項) =

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_j \times (-\mathbf{F}_{ji}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1(j \neq i)}^n -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$$

引数を入れ替え

作用・反作用の法則

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1(j \neq i)}^n -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$$

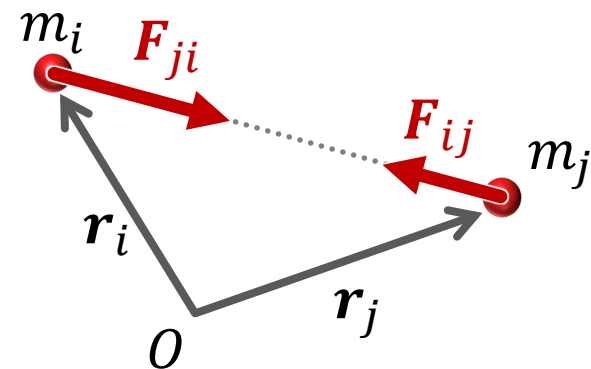
和を取る順番を入れ替え

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\} \times \mathbf{F}_{ji}$$

$\{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\} \parallel \mathbf{F}_{ji}$  より

$$= 0$$







# 多体系 (回転運動)

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i}_{N} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}}_{=0} = 0$$

質点系の全角運動量を

$$L = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad \text{とする}$$

微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \} \\ &\quad \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \end{aligned}$$

$$N = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i : \text{外力のモーメント}$$

$$\frac{dL}{dt} = N = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

質点系の角運動量の  
時間変化は  
外力のモーメントに等しい

# 多体系 (回転運動)

重心まわりの回転と重心運動の分離

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$$

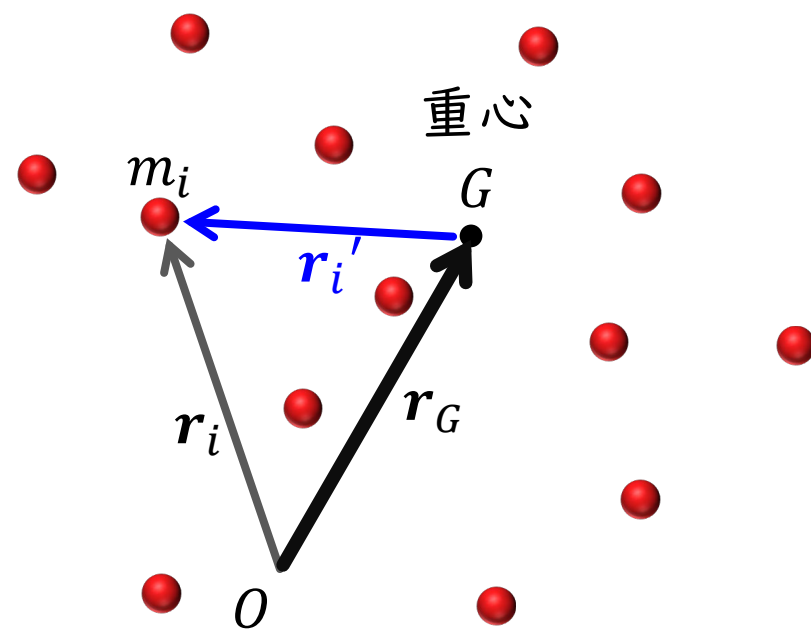
$$\mathbf{p}_i = m_i \left( \frac{d\mathbf{r}_G}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right)$$

全角運動量

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \}$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i$$



# 多体系 (回転運動)

$$L = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i$$





$$= \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G \sum_{i=1}^n m_i = \mathbf{r}_G \times M \dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P} = L_G$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$= \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \dot{\mathbf{r}}_G = 0$$

$$M \mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_G \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i$$

$$= M \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \quad \therefore \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$



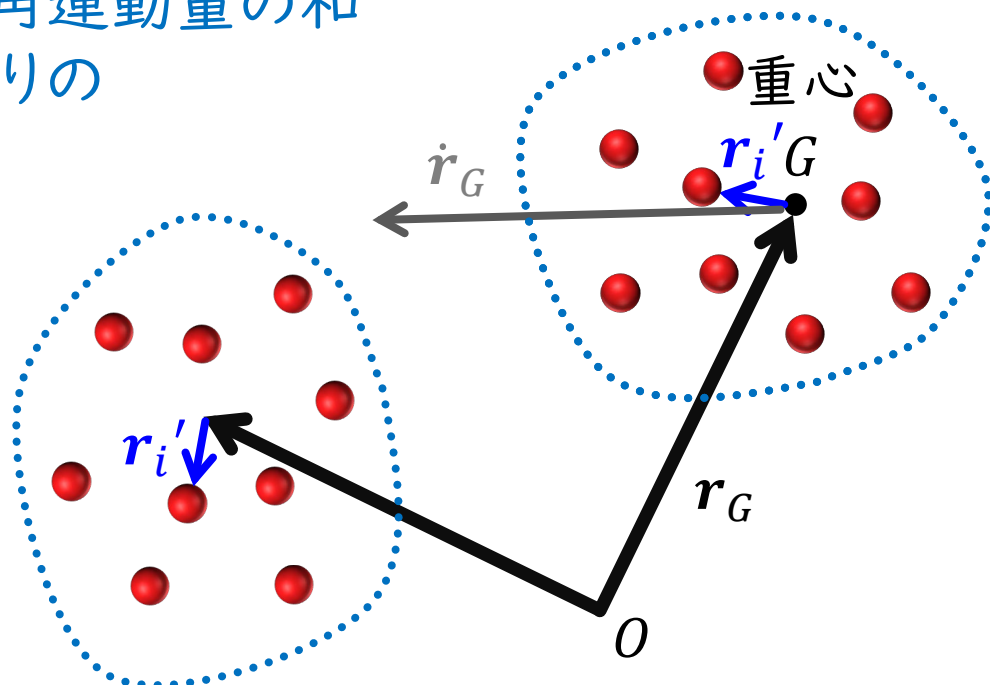
# 多体系 (回転運動)

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_G \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}'$$

質量中心の  
運動による  
(原点まわりの)  
角運動量
質量中心のまわりを  
運動する個々の角運動量の和  
質量中心のまわりの  
角運動量

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i$$



# 多体系 (回転運動)

$$N = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$$

$$= \underbrace{\mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}_{\text{原点まわりの}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i}_{\text{質量中心のまわりの}}$$

原点まわりの  
質量中心にはたらく  
全外力のモーメント

質量中心のまわりの  
個々の外力のモーメント

$$N = \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

$$N' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

# 多体系 (回転運動)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$



$$\frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_G = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P} \\ + \\ \mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i' \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i' \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \mathbf{N}_G = \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \\ + \\ \mathbf{N}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i \end{array}$$

質点系の角運動量は

原点まわりの回転と重心まわりの回転に分離可能



# 剛体

## 剛体(rigid body)

大きさをもった決して形を変えない  
硬い理想的な物体

自由度 (degree of freedom)

質点: 自由度: 3

剛体: 並進自由度: 3  
回転自由度: 3      自由度: 6

質量中心の運動方程式

角運動量の運動方程式

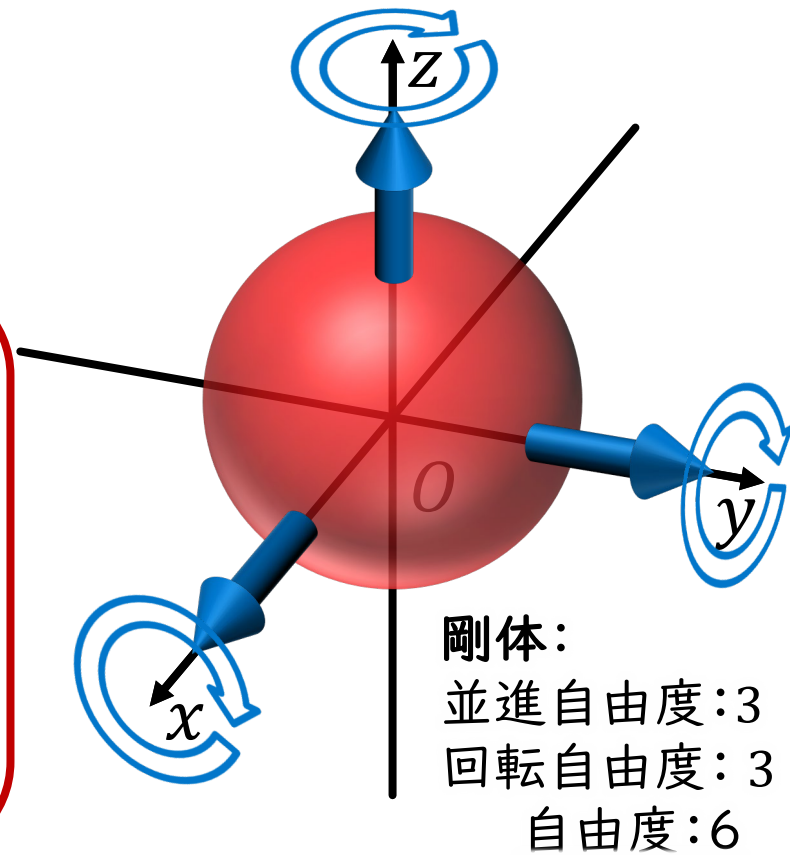
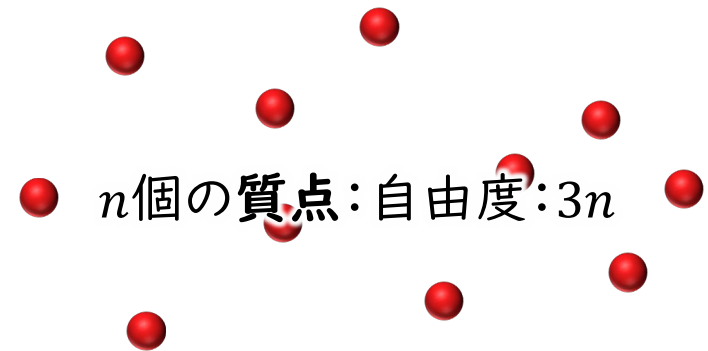
$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N}_G$$

原点に対する  
質量中心の回転

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i$$

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}'$$

質量中心に対する  
各質点の回転



# 固定軸をもつ剛体の運動

剛体中の回転軸から距離 $r_j$ の  
微小領域の回転速度

$$\omega = \frac{d\varphi_i}{dt}$$

剛体中の回転軸からの  
距離 $r_i$  質量 $m_i$

角運動量の大きさ

$$\Delta L_i = r_i \times m_i v_i = r_i \times m_i r_i \omega$$

回転する剛体の全角運動量

$$L_z = \omega \times \sum_i^n m_i r_i^2$$

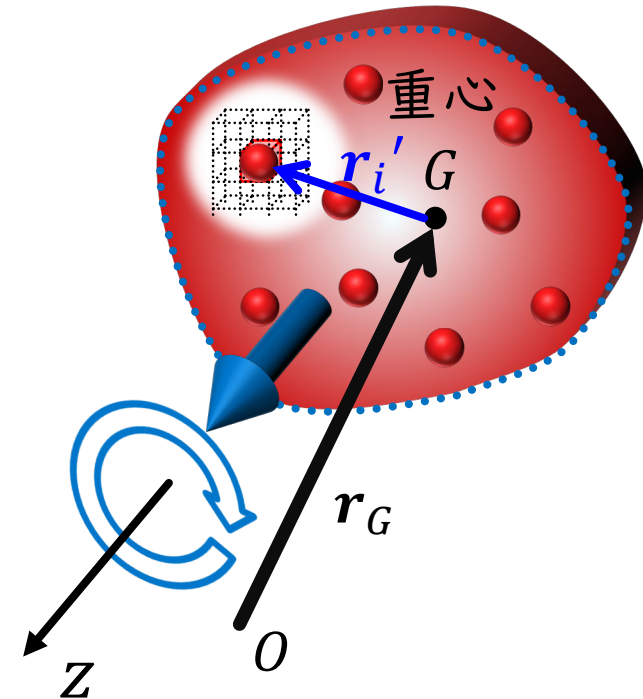
慣性モーメント  
(moment of inertia)

$$L_z = I\omega$$

$$I \equiv \sum_i^n m_i r_i^2$$

角運動量の運動方程式は

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \iff \frac{dL}{dt} = N \iff \frac{dI\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = N \iff I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N$$



# 固定軸をもつ剛体の運動

質点系 → 連続体

連続体を $n$ 個の非常に小さい体積に分割

$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ の質量 $\Delta M_i$ をとすると

全体の質量は

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

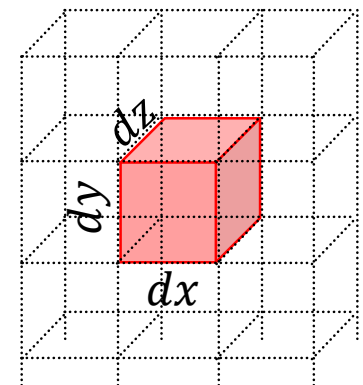
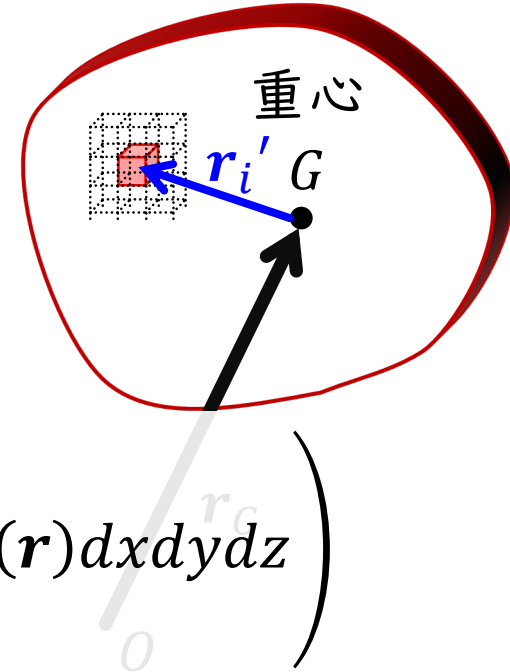
分割を無限にすると

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\Delta V_i} \Delta V_i = \int \rho(\mathbf{r}) dV \quad \left( = \iiint \rho(\mathbf{r}) dx dy dz \right)$$

密度 $\rho(\mathbf{r}_i)$  : 場所 $\mathbf{r}_i$ の密度

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \int dV \quad \left( = \iiint dx dy dz \right)$$

剛体中の回転軸からの  
距離 $r_i$  質量 $m_i$  体積 $\Delta V_i$





# 固定軸をもつ剛体の運動

質点系 → 連続体

質量中心  $\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M}$

$$\rightarrow \mathbf{r}_G = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i}{M}$$

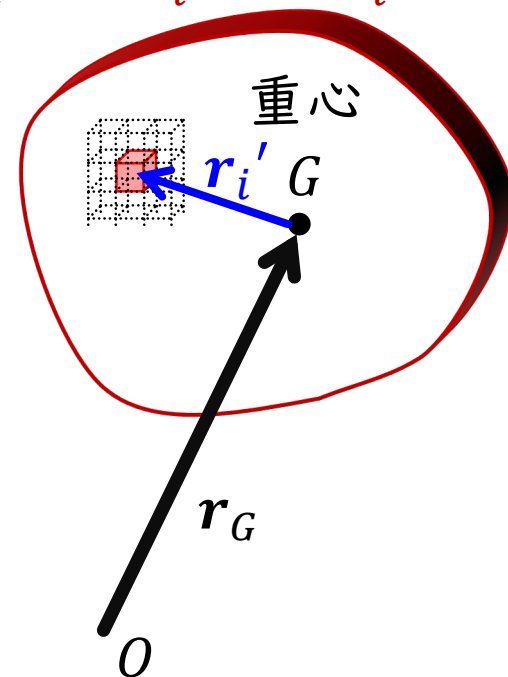
$$\rightarrow \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

原点まわりの角運動量  $\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{N}_G$

$$\rightarrow \mathbf{L}_G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i) \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_G = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV$$

剛体中の回転軸からの  
距離 $r_i$  質量 $m_i$  体積 $\Delta V_i$



# 固定軸をもつ剛体の運動

固定回転軸をz軸

角運動量の運動方程式のz成分  $\frac{d}{dt}L_z = N_z$

$$L_z = \left[ \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV \right]_z = \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z dV$$

$$= \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z dV = \int \rho(\mathbf{r}) (x\dot{y} - y\dot{x}) dV$$

円柱座標への書き換え

$$x = \xi \cos \varphi$$

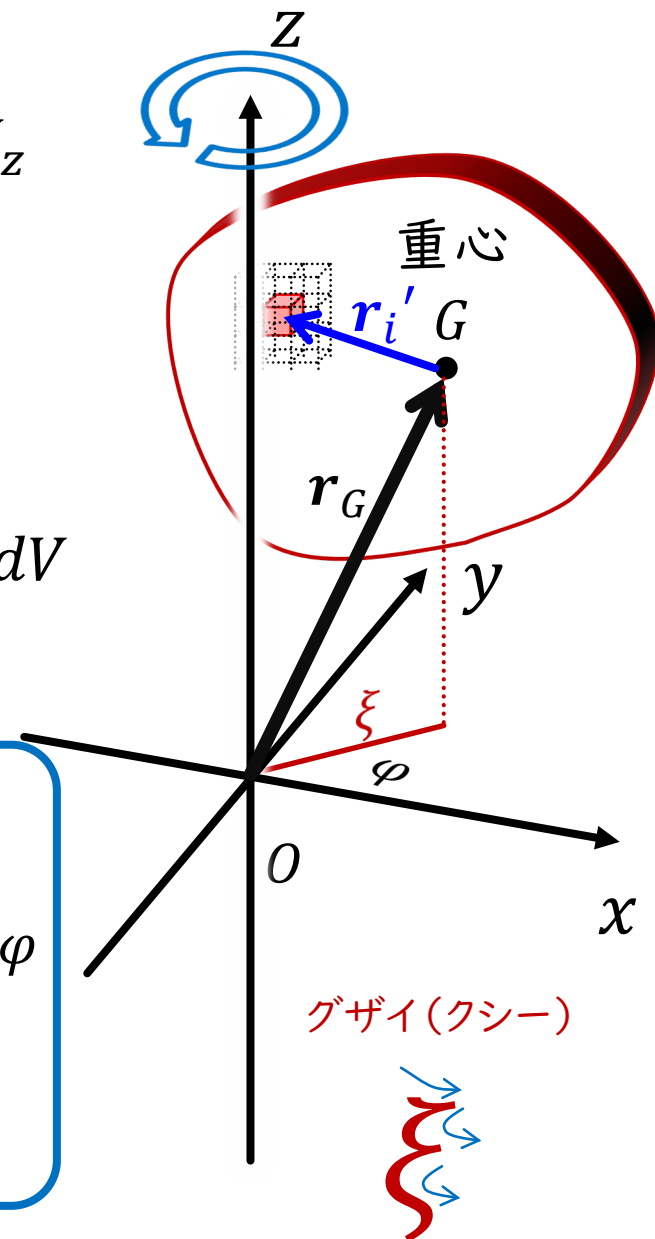
$$y = \xi \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \varphi - \xi \dot{\varphi} \sin \varphi \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin \varphi + \xi \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{\xi} = 0$$

$$\dot{x} = -\xi \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \xi \dot{\varphi} \cos \varphi$$



# 固定軸をもつ剛体の運動

固定回転軸をz軸

角運動量の運動方程式のz成分  $\frac{d}{dt}L_z = N_z$

$$L_z = \int \rho(\mathbf{r})(x\dot{y} - y\dot{x}) dV$$

$$= \int \rho(\mathbf{r})(\xi^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + \xi^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi) dV$$

$$= \int \underbrace{\rho(\mathbf{r})\xi^2}_{\text{剛体の形状特有の物理量 (時間に依らない)}} \dot{\varphi} dV$$

ξは回転軸方向から見た回転半径

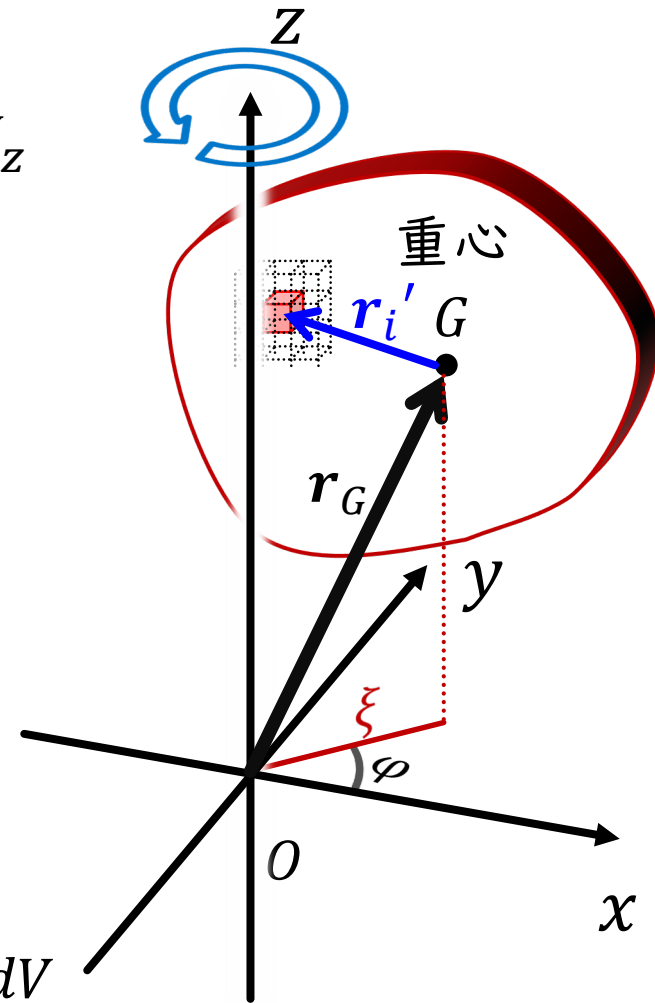
$$= \left( \int \rho(\mathbf{r})\xi^2 dV \right) \dot{\varphi} = I_z \dot{\varphi} = I_z \omega$$

$$\equiv I_z = \int \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2) dV$$

z 軸まわりの慣性モーメント  
その軸周りの回りのやすさ  
次元:  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$



慣性モーメント(定数)をおくことで  
回転の運動方程式が解ける。





# 例題：実体振り子（物体振り子）

実体（物理）振り子（Physical pendulum）

水平な固定軸の周りに自由に回転でき、重力を受けて運動する剛体

固定軸（ $z$ 軸）まわりのモーメント  $N$  を求める

① 微小体積  $dV$  にはたらくモーメント  $n$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\rho(\mathbf{r})dV)\mathbf{g} = (\rho(\mathbf{r})dV)\mathbf{r} \times \mathbf{g}$$

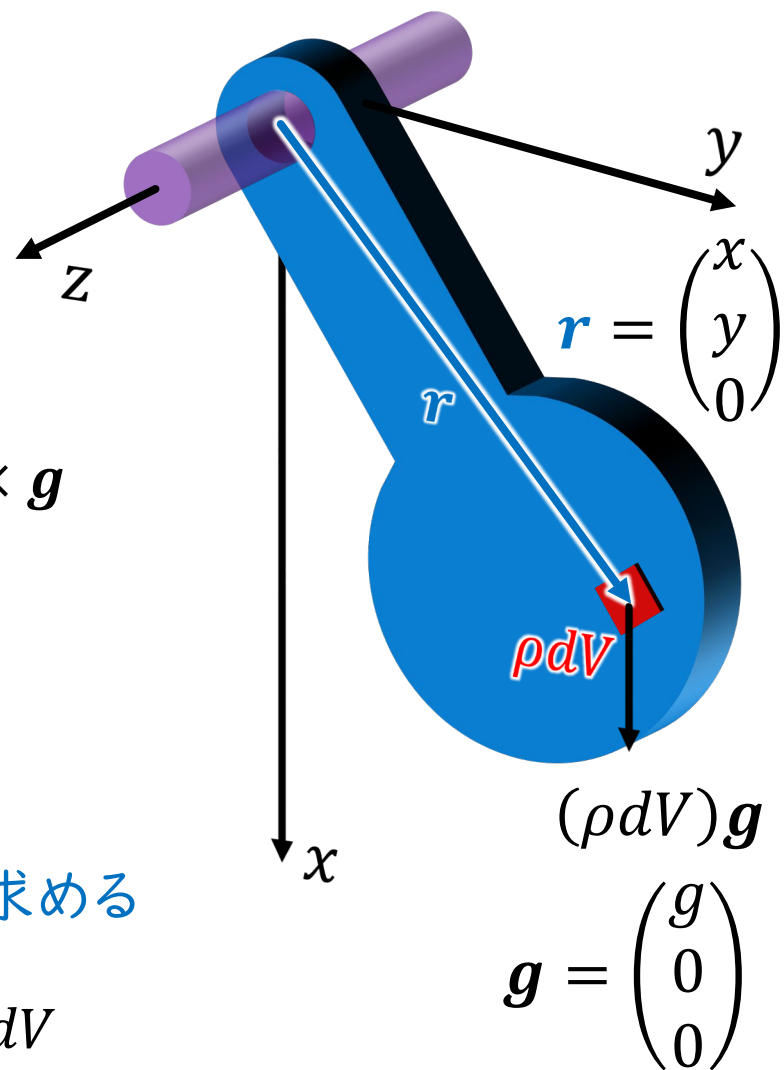
$$= \rho(\mathbf{r})dV \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho(\mathbf{r})dV(-yg)\mathbf{e}_z$$

② 積分して全体積にはたらくモーメント  $N$  を求める

$$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{n} dV = \int_V \rho(\mathbf{r})(-yg)\mathbf{e}_z dV$$

$$= -g\mathbf{e}_z \int_V \rho(\mathbf{r})y dV$$



# 例題：実体振り子（物体振り子）

実体（物理）振り子（Physical pendulum）

水平な固定軸の周りに自由に回転でき、重力を受けて運動する剛体

$$N = -g\mathbf{e}_z \int_V \rho(\mathbf{r})y dV$$

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \text{ であるから、}$$

この部分は、（全質量） $\times$ （ $\mathbf{r}_G$ の $y$ 成分） $= M[\mathbf{r}_G]_y$

$$= -gM[\mathbf{r}_G]_y\mathbf{e}_z = -gM(h \sin \varphi)\mathbf{e}_z$$

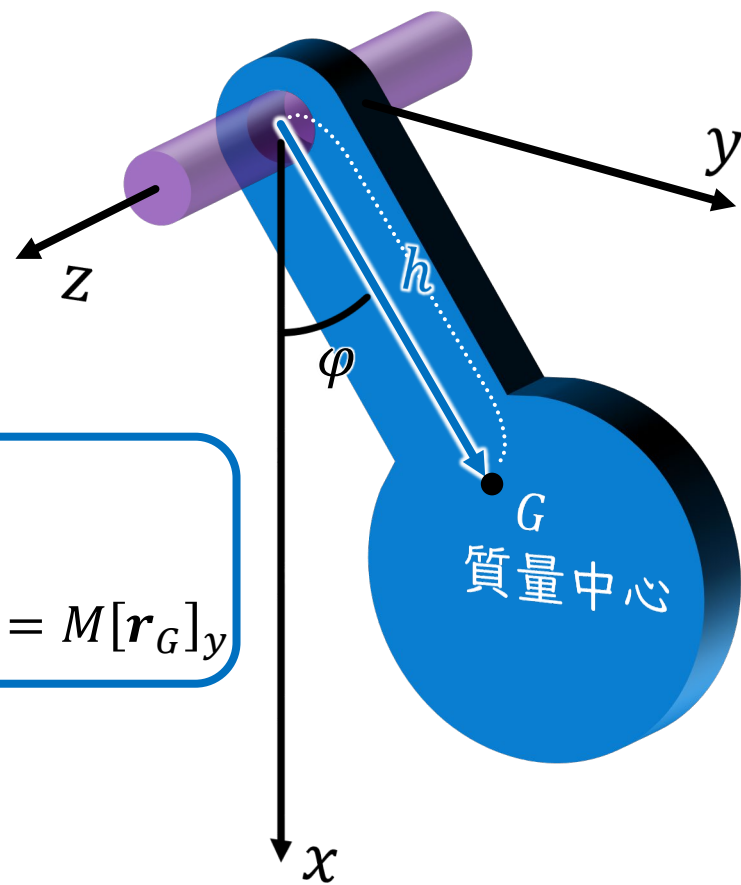
回転の運動方程式を求める

$$\frac{d}{dt}\{I_z\dot{\varphi}\} = N_z \text{ より}$$

$\varphi \ll 1$  のとき

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mgh \sin \varphi$$

$$I_z\ddot{\varphi} = -(Mgh)\varphi$$



# 例題：実体振り子（物体振り子）

実体（物理）振り子（Physical pendulum）

水平な固定軸の周りに自由に回転でき、重力を受けて運動する剛体

角速度  $\omega_r$  と周期  $T_r$  を求める

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgh}{I_z} \varphi$$

$$\varphi(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{Mgh}{I_z}} t + \delta\right)$$

$$\therefore \omega_r = \sqrt{\frac{Mgh}{I_z}}$$

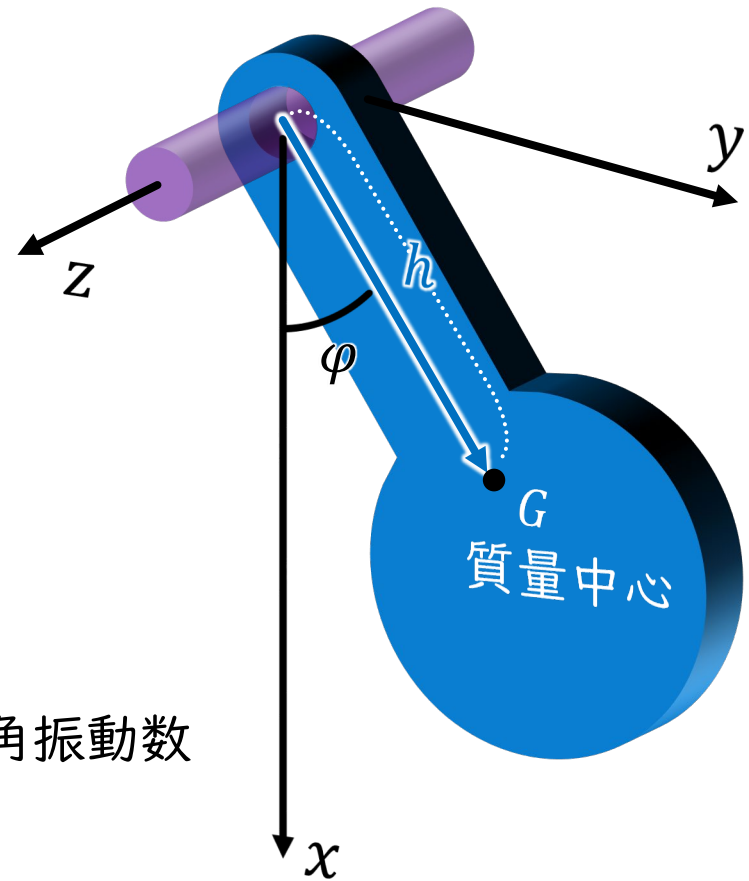
$$\therefore T_r = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mgh}}$$

単振り子の角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$l_r = \frac{I_z}{Mh} \quad \text{：相当単振り子の長さ}$$

単振り子の長さ  $l$  に相当する長さ





# 固定軸まわりの剛体の運動エネルギー

## 剛体の運動エネルギーを求める

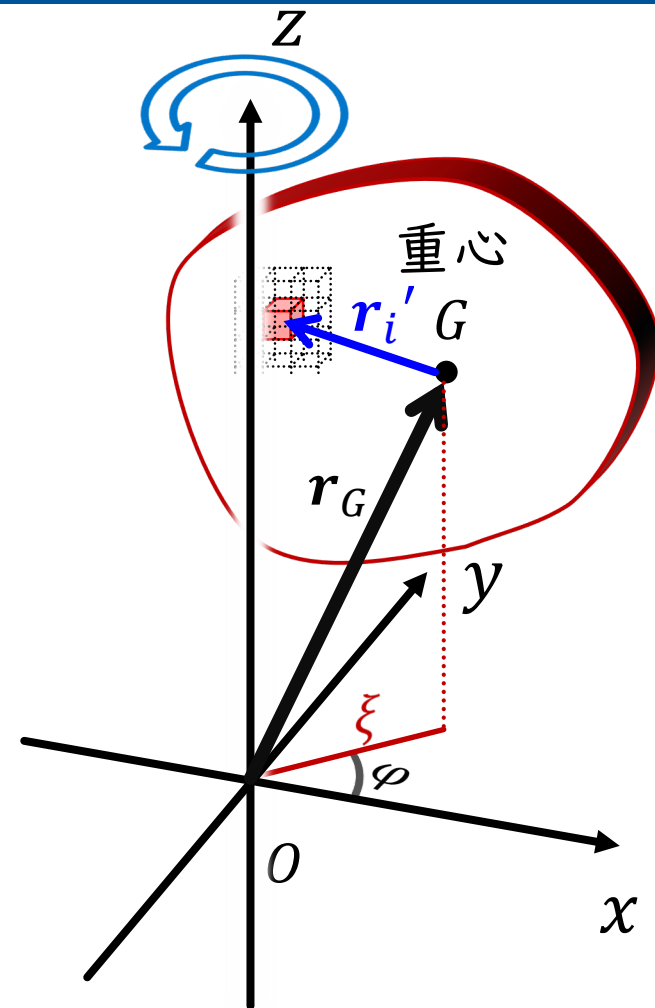
剛体を細分化した  $i$  番目の微小体積(質量  $m_i$ )の速度  $v_i$  は

$$v_i = r_i \dot{\phi} = r_i \omega$$

よって、剛体全体の運動エネルギー  $K$  は

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$





# 【本日のポイント】

## 多体系の回転運動の運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_G + \mathbf{L}') = \mathbf{N}_G + \mathbf{N}'$$

質量中心の運動      質量中心のまわりの個々の運動

**剛体** 大きさをもった決して形を変えない硬い理想的な物体

$$\mathbf{L} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$= \omega \left( \sum_i^n m_i r_i^2 \right) = I \omega$$

慣性モーメント  
(moment of inertia)

$$I \equiv \sum_i^n m_i r_i^2$$

z軸まわりの慣性モーメント

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) dV$$

