

力学 I

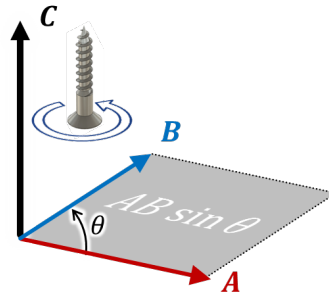
(第10回) 相対運動

【今日の内容】

- 二体問題
- 多体問題

ベクトル積 (外積) $\|C\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



角運動量と力のモーメント

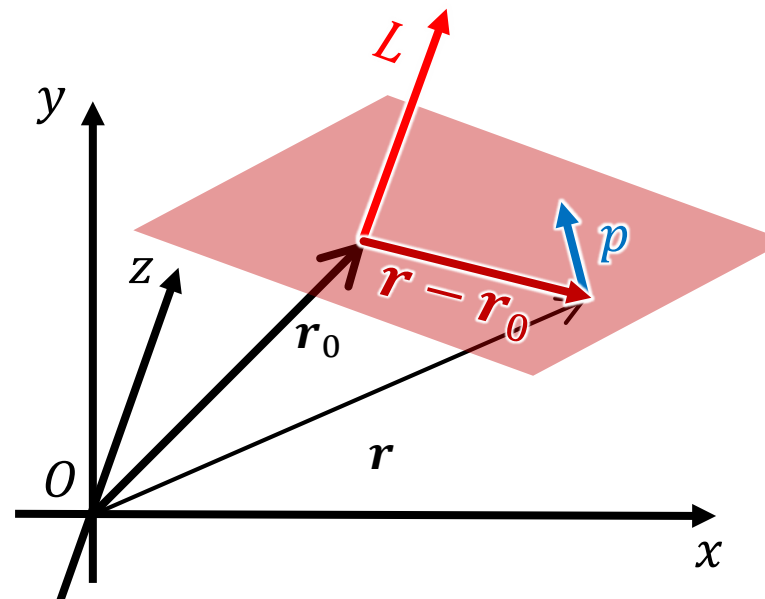
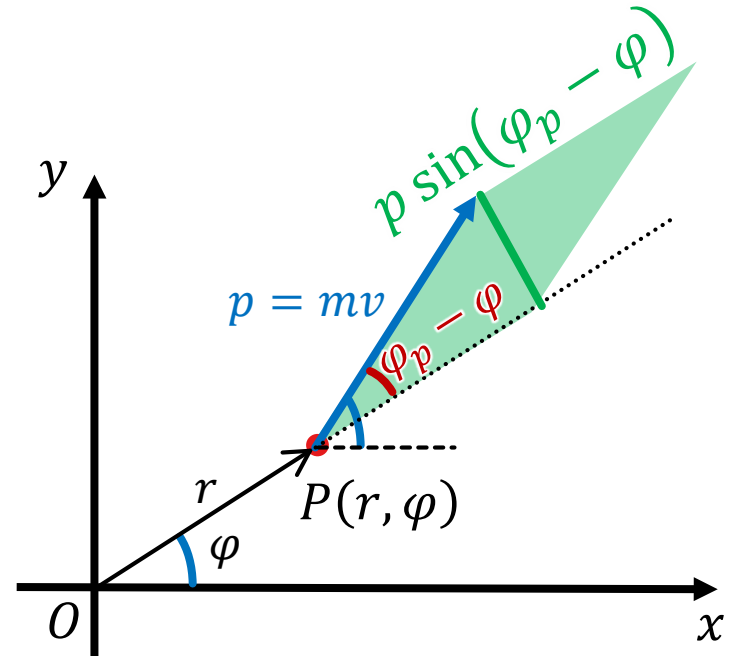
$$\frac{d}{dt} L = N$$

$$L = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$$

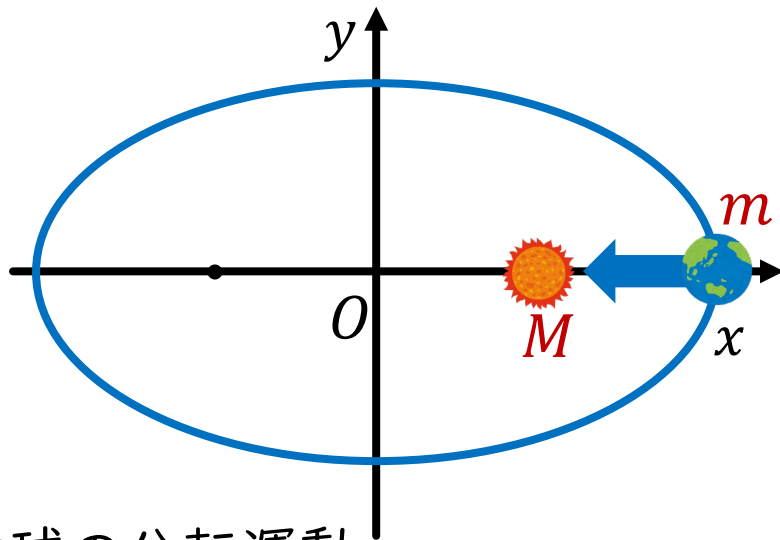
$$N = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ xp_z - zp_x \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ xF_z - zF_x \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

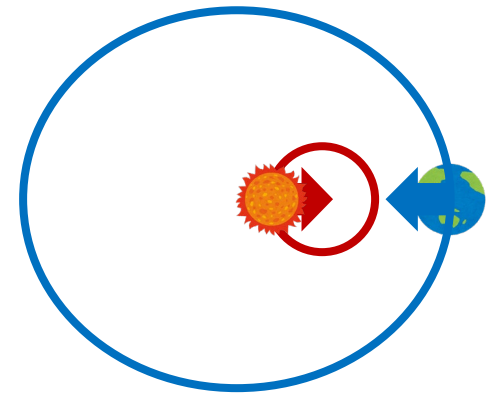


質点系の力学



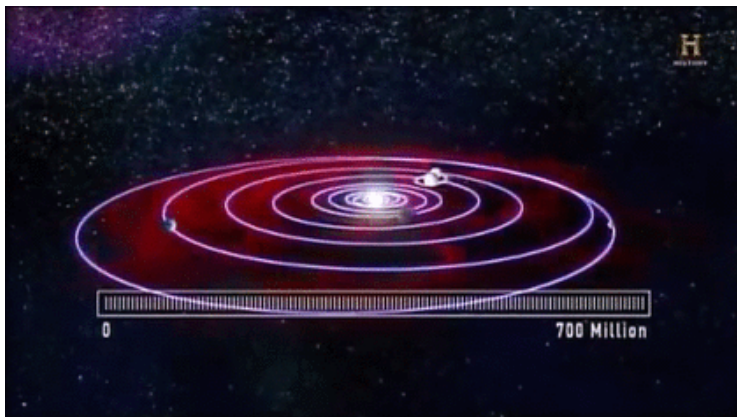
地球の公転運動

太陽を固定した地球ひとつの運動



地球と太陽の相互運動

両者間の相互作用による運動



さらに対象が増加すると1つ1つの星を質点と仮定して考察する必要がある

2体問題

2体の問題を1体問題に帰着させるか？

2つの質点の運動方程式

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2$$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2$$

作用反作用の法則より $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

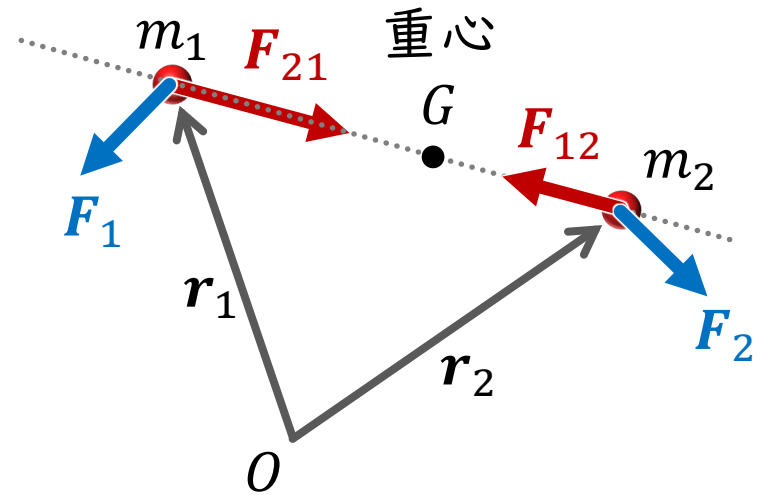
$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

全質量 $M = m_1 + m_2$ としたとき、

$$M \mathbf{r}_G = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2$$

となる質量中心の位置ベクトル $\mathbf{r}_G$ を導入

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$



$$M \mathbf{r}_G = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2$$

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

質量中心の運動方程式
右辺は外力の和

2体問題

2つの質点の運動方程式

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2$$

質量で割る

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2}$$

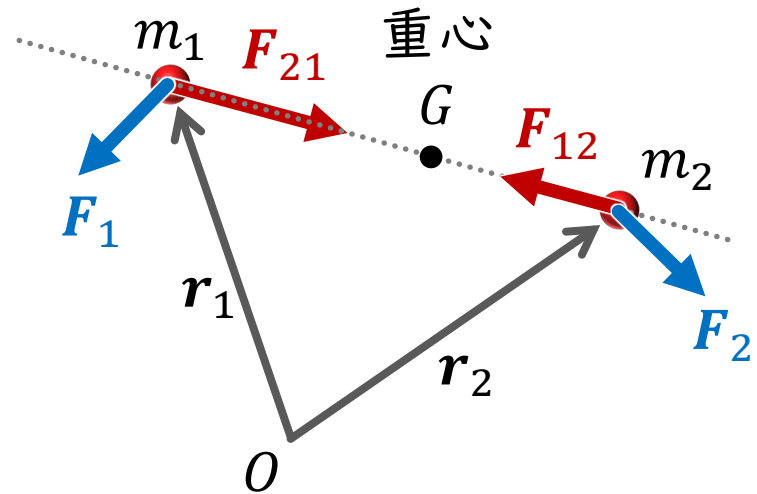
$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$

相対位置ベクトル
($\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$)

$$= \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$

換算質量: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$



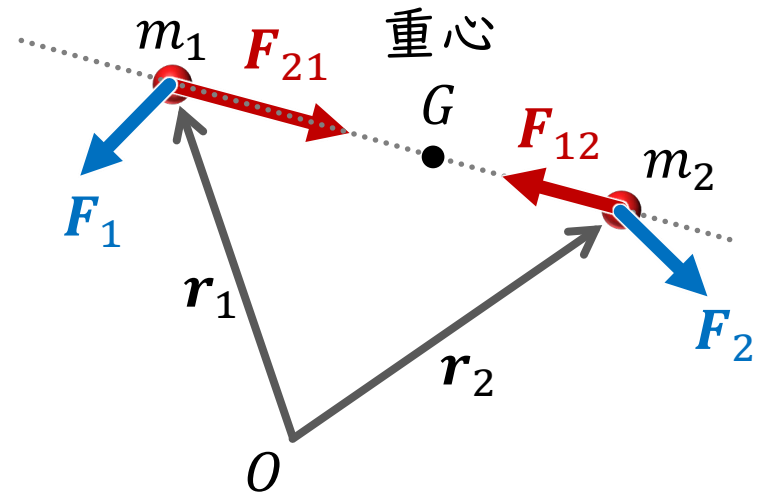
$$\therefore \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$

相対運動の運動方程式

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$

相対位置ベクトル
 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

換算質量: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$



外力がない場合

重力のような一様な力がはたらいている場合

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 \mathbf{g}$$

$$\mathbf{F}_2 = -m_2 \mathbf{g}$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

2体の
運動方程式

$\Rightarrow$

力 $\mathbf{F}_{12}$ がはたらく
相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ 、質量 μ の質点の
運動方程式

2体の問題を1体問題に帰着

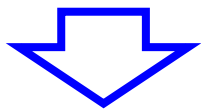
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

$$= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)}{M}$$

$$= \frac{(m_1 + m_2) \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}}{M}$$

$$= \mathbf{r}_1 + \frac{m_2 \mathbf{r}}{M}$$



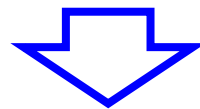
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G - \frac{m_2 \mathbf{r}}{M}$$

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

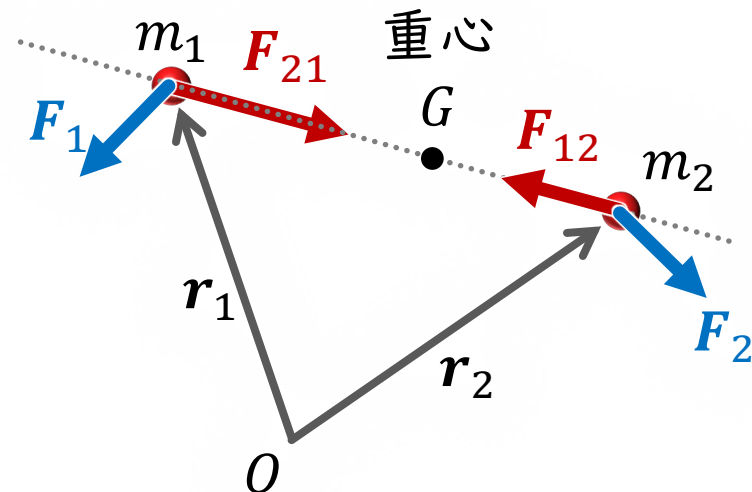
$$= \frac{m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

$$= \frac{-m_1 \mathbf{r} + (m_1 + m_2) \mathbf{r}_2}{M}$$

$$= -\frac{m_1 \mathbf{r}}{M} + \mathbf{r}_2$$



$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_G + \frac{m_1 \mathbf{r}}{M}$$



例題：2体問題

バネの付いた2つの物体を落下させる。
(m_2 のおもりを支えた状態から静かに落下させる)

個々のおもりの運動方程式

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_1 g \mathbf{e}_z + k(z_2 - z_1 - l_0) \mathbf{e}_z$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -m_2 g \mathbf{e}_z - k(z_2 - z_1 - l_0) \mathbf{e}_z$$

z 軸成分のみ

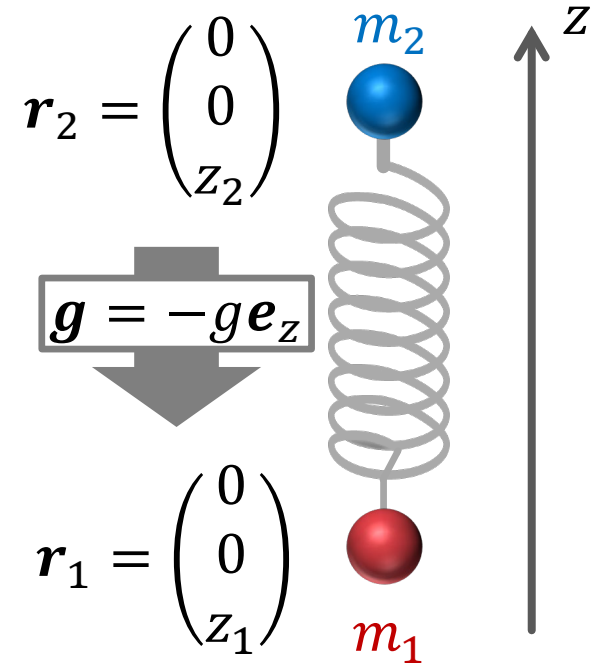
$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + k(z_2 - z_1 - l_0)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g - k(z_2 - z_1 - l_0)$$

質量中心の座標 (z 軸)

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{M}$$

相対座標 (z 軸) $z = z_2 - z_1$



$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 : バネの自然長

例題：2体問題

質量中心(重心)の運動

→ 内力を打ち消す → 個々の運動方程式の和

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + k(z_2 - z_1 - l_0)$$

$$+ \quad m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g - k(z_2 - z_1 - l_0)$$

$$\hline m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 = -m_1 g - m_2 g$$

$$= -\underline{\underline{(m_1 + m_2)g}}$$

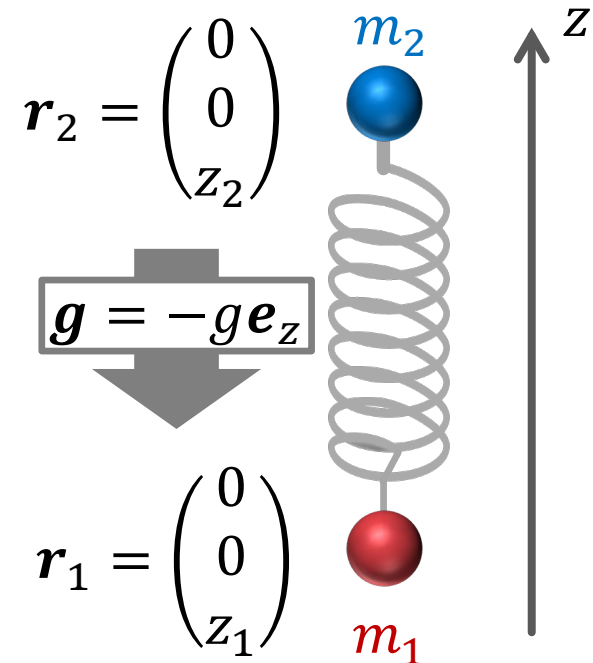
M

$$\frac{m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2}{M} = -g$$

質量中心のz座標

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{M}$$

$$\ddot{z}_G = -g$$



$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 : バネの自然長

例題：2体問題

おもり同士の相対的な運動

→ 相対的な加速度 → 個々の運動方程式の差

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g - k(z_2 - z_1 - l_0) \\ m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + k(z_2 - z_1 - l_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_2 = -g - \frac{k(z_2 - z_1 - l_0)}{m_2} \\ \ddot{z}_1 = -g + \frac{k(z_2 - z_1 - l_0)}{m_1} \end{cases}$$

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) k(z_2 - z_1 - l_0) \quad M = m_1 + m_2$$

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\frac{1}{\mu} k(z_2 - z_1 - l_0)$$

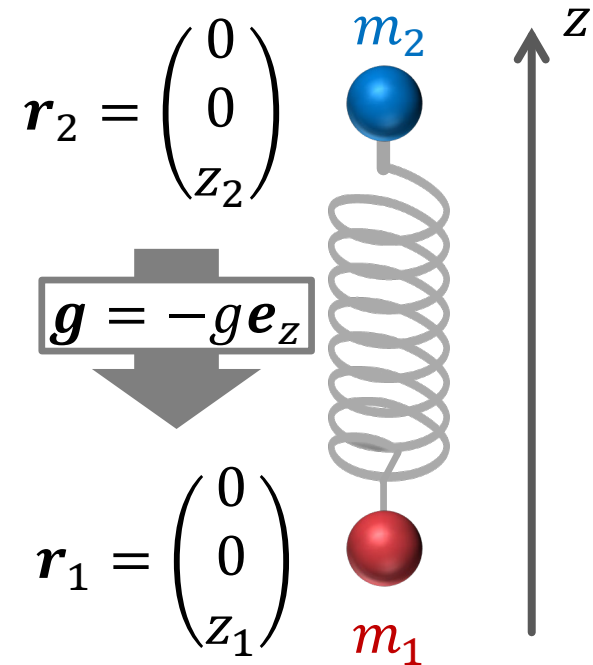
$$\mu \ddot{z} = -k(z - l_0)$$

相対座標 (z軸)

$$z = z_2 - z_1$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 : バネの自然長



例題：2体問題

重心の運動方程式

$$\ddot{z}_G = -g$$

質点の相対的運動方程式

$$\mu \ddot{z} = -k(z - l_0)$$

初期条件を求める。

(m_2 のおもりを支えた状態から静かに落下させる)

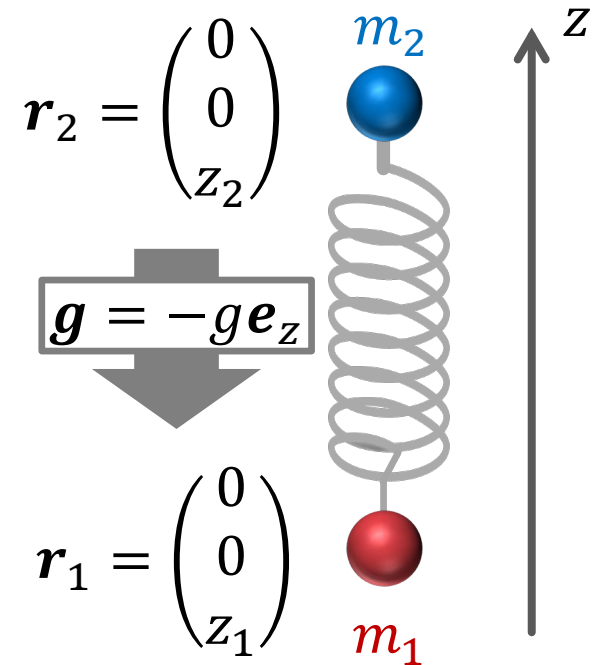
$$z_2(0) = 0 \quad \dot{z}_G(0) = \dot{z}(0) = 0$$

$$0 = -m_1 g + k(z_2(0) - z_1(0) - l_0)$$

$$z_1(0) = -\frac{m_1 g}{k} - l_0$$

$$z_G(0) = \frac{m_1 z_1(0) + m_2 z_2(0)}{M}$$

$$z_G(0) = -\frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right)$$



$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 :バネの自然長

$$z(0) = z_2(0) - z_1(0) = \frac{m_1 g}{k} + l_0$$

例題：2体問題

重心の運動方程式

$$\ddot{z}_G = -g$$

質点の相対的運動方程式

$$\mu \ddot{z} = -k(z - l_0)$$

(初期条件)

$$z_G(0) = -\frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right) \quad z(0) = \frac{m_1 g}{k} + l_0$$

重心の運動方程式

$$\ddot{z}_G = -g$$

積分

$$\dot{z}_G = -gt + C_1$$

$$\dot{z}(0) = 0 \text{ より } C_1 = 0$$

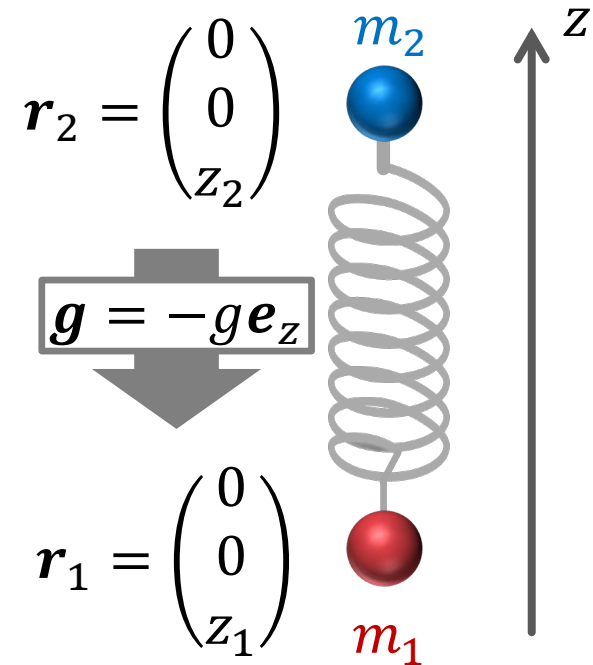
積分

$$\dot{z}_G = -gt$$

$$z_G = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

$$z_G(0) = -\frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right) \text{ より}$$

$$\underline{z_G = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right)}$$



$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 : バネの自然長

例題：2体問題

重心の運動方程式

$$\ddot{z}_G = -g$$

質点の相対的運動方程式 $\mu \ddot{z} = -k(z - l_0)$

(初期条件)

$$z_G(0) = -\frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right) \quad z(0) = \frac{m_1 g}{k} + l_0$$

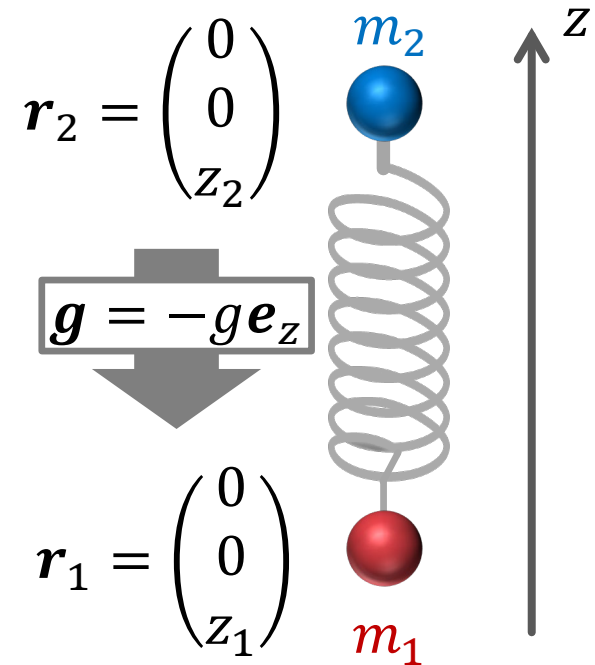
質点の相対的運動方程式 $\mu \ddot{z} = -k(z - l_0)$
 $\underline{\underline{Z \text{ とおく}}}$

$$\mu \ddot{Z} = -kZ$$

$$\ddot{Z} = -\frac{k}{\mu} Z$$

$$Z = Ae^{+i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t}$$

$$z = Ae^{+i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + l_0$$



$$M = m_1 + m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2}$$

l_0 : バネの自然長

$$z(t) = Ae^{+i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + l_0$$

$$\dot{z}(t) = i\sqrt{\frac{k}{\mu}}Ae^{+i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} - i\sqrt{\frac{k}{\mu}}Be^{-i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t}$$


 微分

$$\dot{z}(0) = i\sqrt{\frac{k}{\mu}}A - i\sqrt{\frac{k}{\mu}}B = 0 \quad \therefore A = B$$

$$z(t) = A\left\{e^{+i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{\mu}}t}\right\} + l_0$$

$$z(t) = 2A \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}}t + l_0$$

$$z(0) = 2A + l_0 = \frac{m_1 g}{k} + l_0 \quad \therefore A = \frac{m_1 g}{2k}$$

$$\underline{z(t) = \frac{m_1 g}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}}t + l_0}$$

例題：2体問題

各質点の変位

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G - \frac{m_2 \mathbf{r}}{M}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_G + \frac{m_1 \mathbf{r}}{M}$$

$$z_1 = z_G - \frac{m_2 z}{M}$$

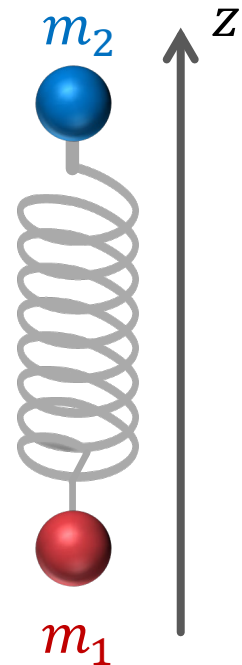
$$= \left\{ -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right) \right\} - \frac{m_2}{M} \frac{m_1 g}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t - \frac{m_2}{M} l_0$$

$$\therefore z_1 = -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{m_1^2 g}{M k} - \frac{m_1 m_2 g}{M k} \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t - \frac{m_1 + m_2}{M} l_0$$

$$z_2 = z_G + \frac{m_1 z}{M}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{m_1}{M} \left(\frac{m_1 g}{k} + l_0 \right) \right\} + \frac{m_1}{M} \frac{m_1 g}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t + \frac{m_1}{M} l_0$$

$$\therefore z_2 = -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{m_1^2 g}{M k} + \frac{m_1^2 g}{M k} \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t$$



多体系 (運動量保存則)

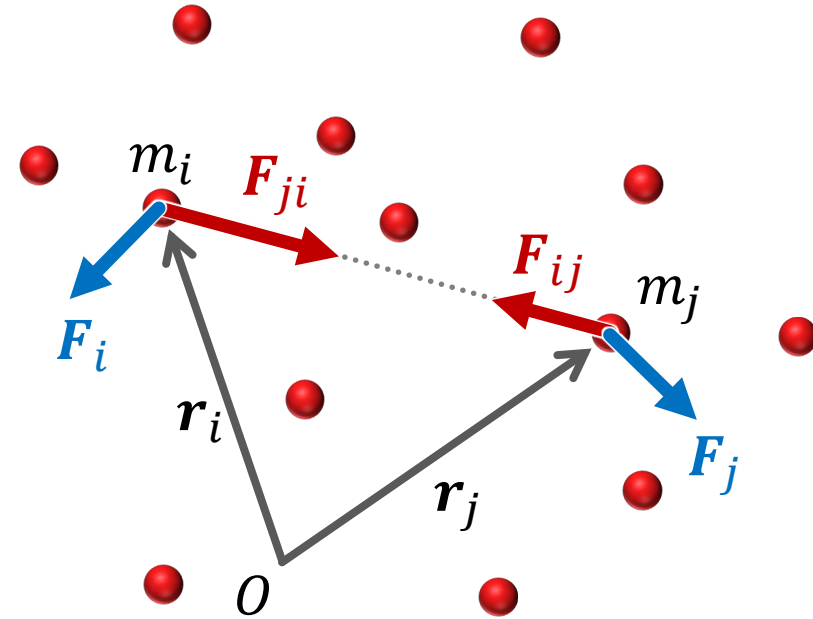
2体問題 → 多体問題

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ji}$$

質点 i が質点 j から受ける力
自分自身を含まないので $j \neq i$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ji} \text{ の和を考える}$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ij}$$



$\mathbf{F}_{ji}$ の例
万有引力

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

クーロン力

$$\mathbf{F}_{ji} = \frac{q_i q_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

多体系 (運動量保存則)

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ij}$$



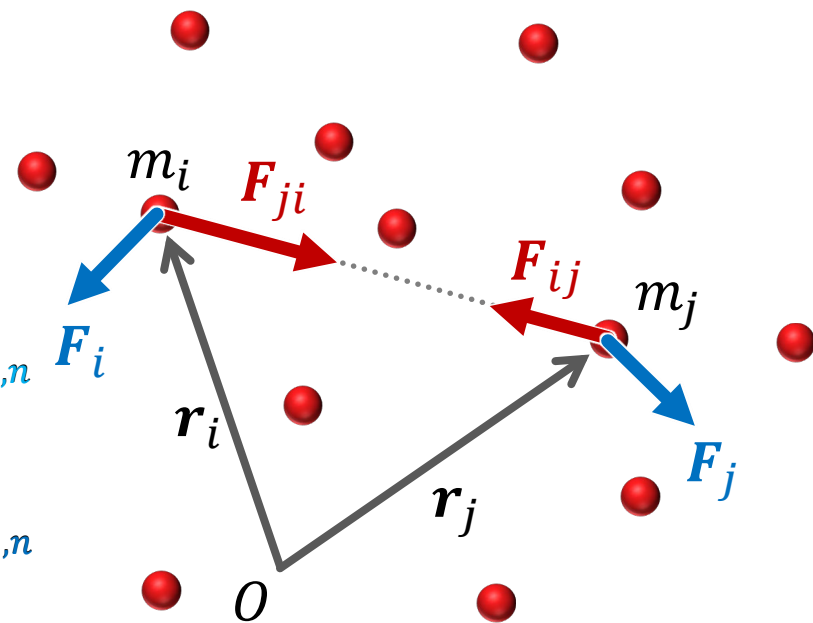
$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{1j} = \quad + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1,n-1} + \mathbf{F}_{1,n}$$

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{2j} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2,n-1} + \mathbf{F}_{2,n}$$

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{3j} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3,n-1} + \mathbf{F}_{3,n}$$

⋮

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{nj} = \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{n3} + \cdots + \mathbf{F}_{n,n-1}$$



作用反作用

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

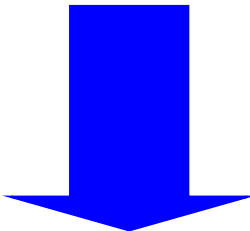
をつかうと

全て打ち消しあって消える。

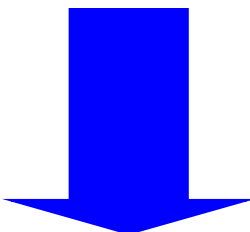
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ij} = 0$$

多体系 (運動量保存則)

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n \mathbf{F}_{ij}$$

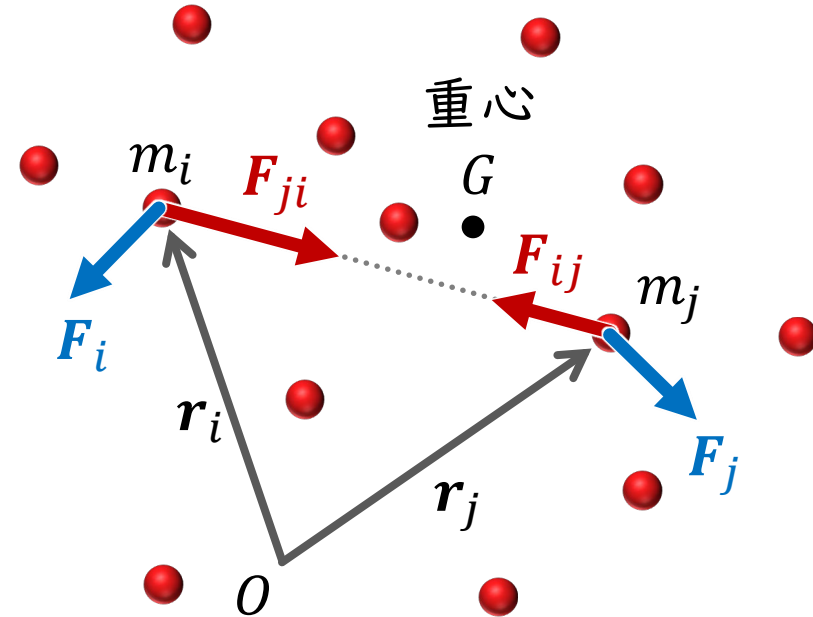


$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$



$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad \text{全質点の運動量の和}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \text{質点系の全運動量の時間変化は外力の和に等しい}$$



多体系 (運動量保存則)

質点が n 個の時の質量中心(重心)

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$M \mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

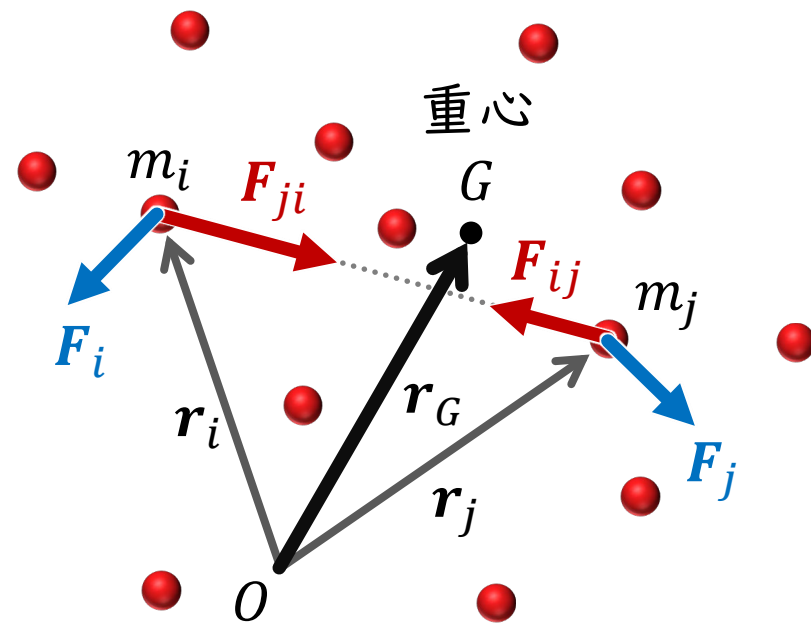
$M = \sum_{i=1}^n m_i$: 全質量

$$M \dot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

(微分)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \dot{\mathbf{r}}_G$$

全運動量は
重心の速度と全質量の積



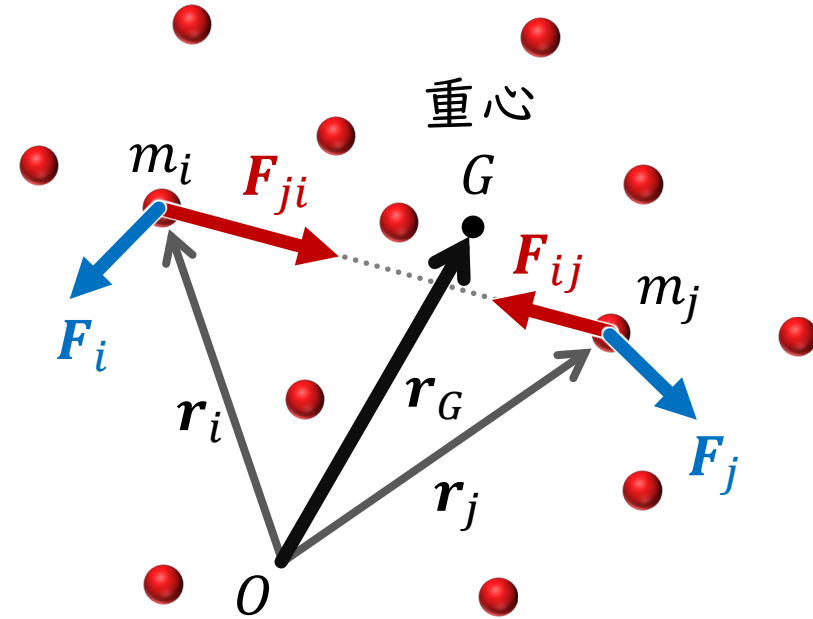
質量中心に対する運動方程式

$$\therefore \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

多体系 (運動量保存則)

各質点の運動 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$

$$\begin{aligned}
 M\mathbf{r}_G &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \\
 &= \mathbf{r}_G \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \\
 &= M\mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i
 \end{aligned}$$

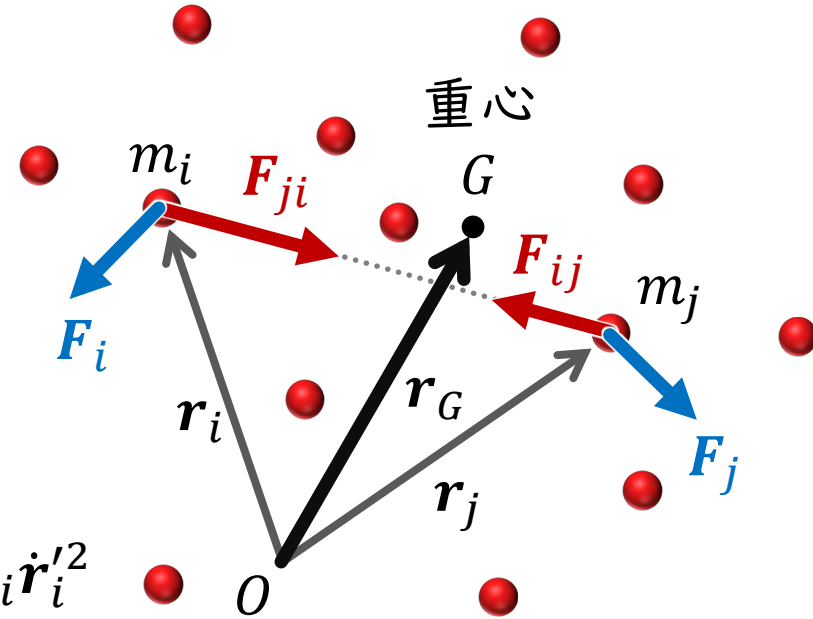


$$\therefore \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

多体系 (運動量保存則)

運動エネルギー K $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{r}}_G)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_G^2 + 2\dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'^2_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_M + \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right)}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i
 \end{aligned}$$



質点系の運動エネルギー

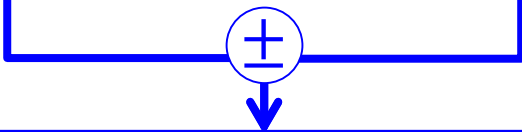
$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i$$

重心運動 重心まわりの相対運動

【本日のポイント】

2体問題

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1 \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2$$

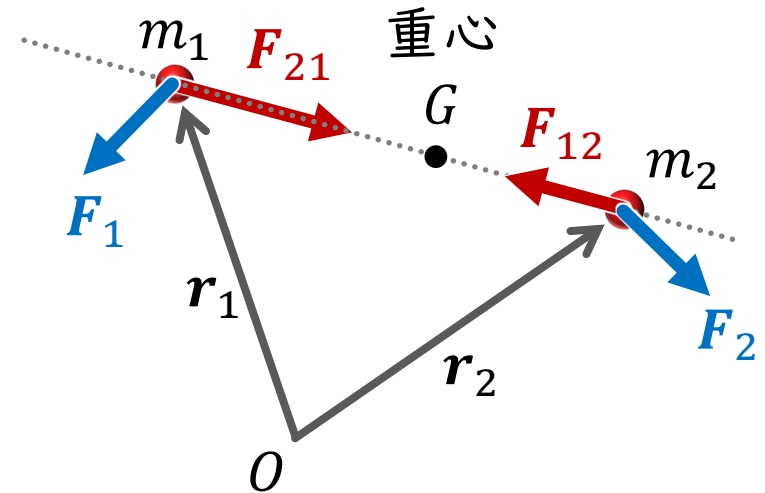


質量中心の運動方程式

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

相対運動の運動方程式

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{12} + \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$$



外力がない
または一様な力が
はたらく場合

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

多体問題

質量中心に対する
運動方程式

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2$$