

力学 I

(第9回) 角運動量

【今日の内容】

- ベクトルの外積
- 角運動量と力のモーメント

【前回の復習】

前々回：ケプラーの法則（観測）から太陽の引力（数式化）を導出する

前回：太陽の引力から惑星の運動（ケプラーの法則）を導出する

軌道 $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$: 楕円軌道 (第一法則)

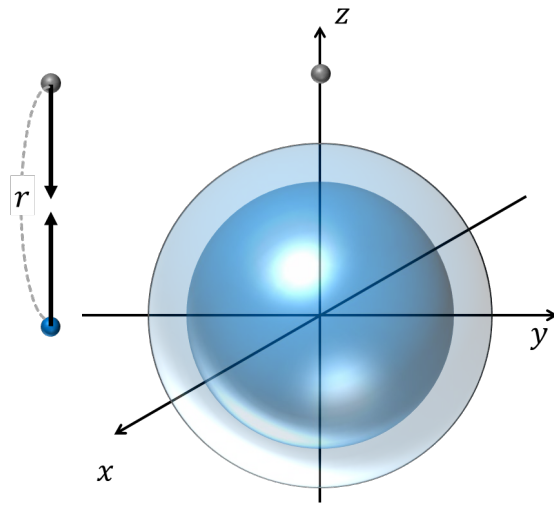
→ 面積速度の関係

周期 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C(\text{const})$: 第二法則

$\omega t = \varphi - \varepsilon \sin \varphi$: ケプラー方程式 (第三法則)

エネルギー積分 $E = \frac{1}{2} m \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \} - G \frac{Mm}{r}$

球体によるポテンシャル



$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

全質量が中心に
集まったときと同じ

球殻内部のポテンシャル

$$U(r) = -G \cdot 4\pi\rho(R)R \cdot m = \text{Const}$$

$$f(r) = 0$$

球殻の外側の質量からの
万有引力は受けない

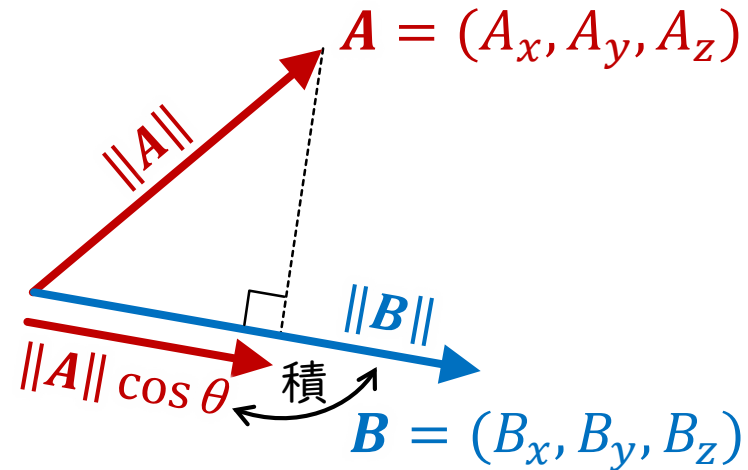
ベクトルの外積

内積 (Scalar product, Inner product)

2つのベクトルから定義されるスカラー量

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



外積 (vector product, Outer product)

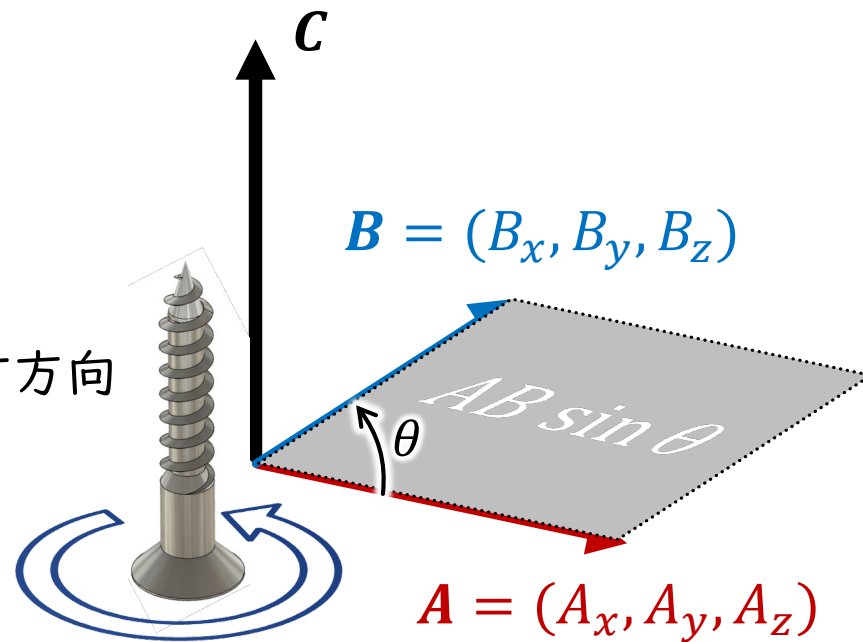
2つのベクトルから定義される新たなベクトル

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$$

向き $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に垂直で $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ へ右ネジを回す方向

大きさ $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ がつくる平行四辺形の面積

$$\|\mathbf{C}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$$



ベクトルの外積

外積の性質

$$\boxed{A \times B \equiv C}$$

1. $A \times B = -B \times A$ (交換法則は成り立たない)

2. A と B が平行ならば

$$A \times B = 0 \quad \text{とくに} \quad A \times A = 0$$

3. $C = A \times B$ のとき $C \perp A, C \perp B$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

(分配法則は成り立つ)

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

4. 3つのベクトルの間の外積 (ベクトル3重積)

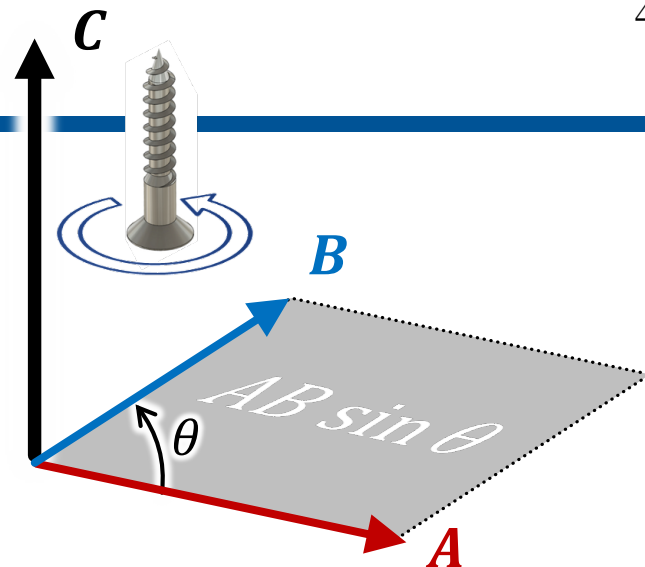
(結合法則は成り立たない)

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

5. 外積の微分

$$\frac{d(A \times B)}{dt} = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$$

証明は例題・演習
にて



ベクトルの外積

外積の計算 (成分)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

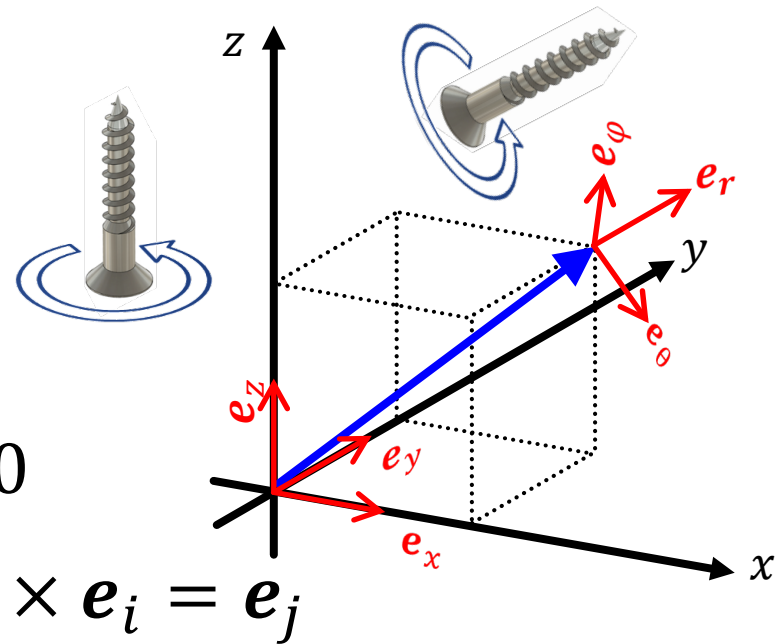
単位ベクトルの外積

右手系の直交座標の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \quad (i, j, k) = \text{または} \quad (x, y, z) \\ (r, \theta, \varphi)$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k = 0$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$$



例題 I

2つの空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ について外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求めよ。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z$$

$$= ((-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 0) \mathbf{e}_x + (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) \mathbf{e}_y + (1 \cdot 0 - (-3) \cdot 2) \mathbf{e}_z$$

$$= 3\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y + 6\mathbf{e}_z = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}}$$

例題2

2つの空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\alpha > 0$) のなす角 θ とおくと

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ である。このとき、次の問に答えよ。

(1) α の値を求めよ。

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{\alpha^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 5}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot \alpha + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 2\alpha - 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 5} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \therefore 2\alpha - 1 = \sqrt{\alpha^2 + 5}$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = \alpha^2 + 5$$

$$3\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$$

$$(3\alpha + 2)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha > 0 \text{ より } \alpha = \underline{2}$$

例題2

(2) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積を求めよ。

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積は、それらの外積のノルム $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ に等しい。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \\ &= ((-1) \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)) \mathbf{e}_x + ((-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) \mathbf{e}_y + (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) \mathbf{e}_z \\ &= 3 \cdot \mathbf{e}_x + 0 \cdot \mathbf{e}_y + 6 \cdot \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 6^2} = \underline{3\sqrt{5}}$$

(3) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めよ。

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に直交するので、 $\mathbf{c}$ の方向の単位ベクトルは、

$$\pm \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \pm \underline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}}$$

例題3

(1) 以下の3つのベクトルから作ったスカラー三重積を計算せよ。

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

と $\mathbf{C} = C_x \mathbf{e}_x + C_y \mathbf{e}_y + C_z \mathbf{e}_z$ の内積をとると

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \underline{C_x(A_y B_z - A_z B_y) + C_y(A_z B_x - A_x B_z) + C_z(A_x B_y - A_y B_x)}$$

これは、整理し直すと

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様に} \quad &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\text{また、} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

と書くこともできる

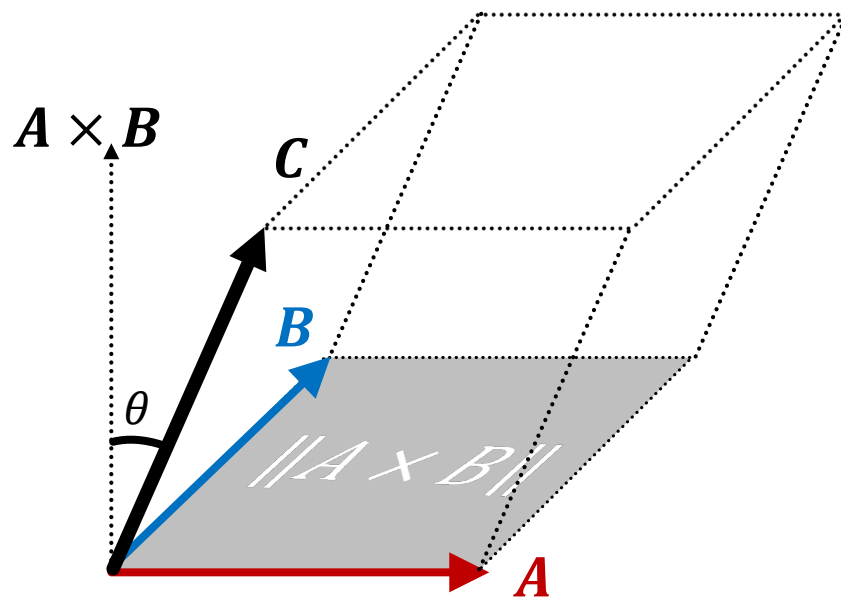
例題3

(2) このスカラー三重積 $C \cdot (A \times B)$ はベクトル A , B , C を3辺とする平行六面体の体積を表すことを示せ。

C と $A \times B$ のなす角を θ とすると、

$$C \cdot (A \times B) = C \|A \times B\| \cos \theta$$

$(A \times B)$ の大きさは、 A の B のつくる平行四辺形の面積であり、
 $C \cos \theta$ は平行六面体の高さに相当するので、
 スカラー積は A , B , C を3辺とする平行六面体の体積を表す。



角運動量とは

等速直線運動 $\Rightarrow$ 運動エネルギーと運動量が一定の運動

等速円運動 $\Rightarrow$ 運動エネルギーと運動量の大きさは一定だが、
運動量の方向は刻々と変化する

$\Rightarrow$ 等速円運動において時間によらず一定のベクトル量：**角運動量**

平面内の運動を考えると、運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad \cdots (1) \qquad m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad \cdots (2)$$

$$(2) \times x \Leftrightarrow mx \frac{dv_y}{dt} = xF_y$$

$$(1) \times y \Leftrightarrow my \frac{dv_x}{dt} = yF_x$$

$$mx \frac{dv_y}{dt} - my \frac{dv_x}{dt} = xF_y - yF_x$$

$$x \frac{dp_y}{dt} - y \frac{dp_x}{dt} = xF_y - yF_x$$

$$\frac{d}{dt}(xp_y - yp_x) = xF_y - yF_x$$

角運動量とは

極座標 (r, φ) で考える

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ が x 軸となす角を φ_p とすると

$$mv_x = m \frac{dx}{dt} = mv \cos \varphi_p \quad mv_y = m \frac{dy}{dt} = mv \sin \varphi_p$$

であるから

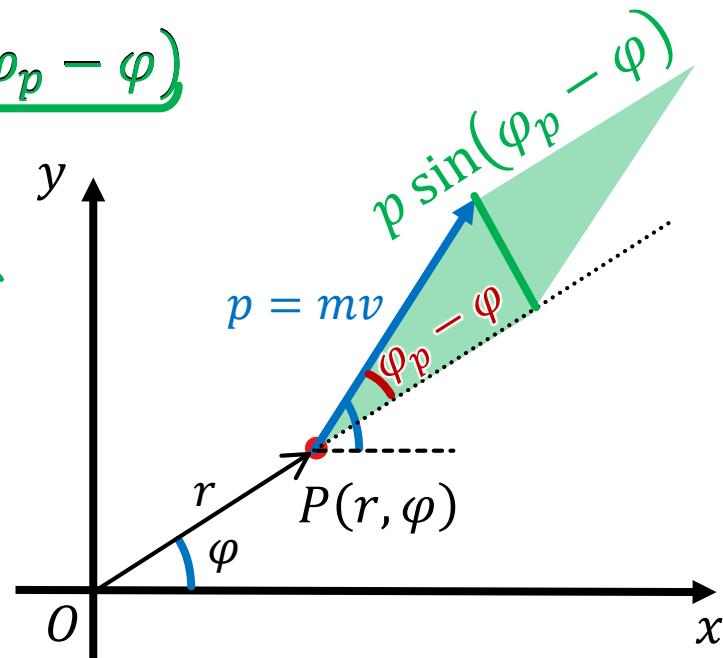
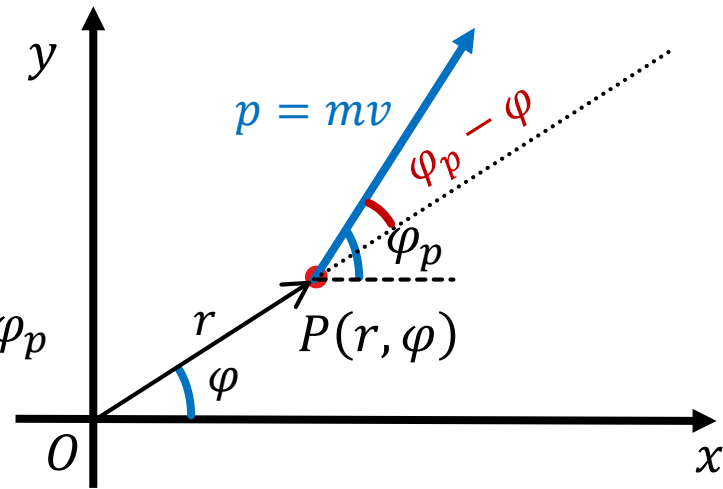
$$\begin{aligned} xp_y - yp_x &= m(xv_y - yv_x) = m(rv \cos \varphi \sin \varphi_p - rv \sin \varphi \cos \varphi_p) \\ &= r \cdot \underbrace{mv \sin(\varphi_p - \varphi)} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} xp_y - yp_x = r \cdot p \sin(\varphi_p - \varphi)$$

これは原点から見た運動量ベクトルとなっていて、
その大きさは、変位ベクトル $\mathbf{r}$ と運動量 $\mathbf{p}$ の
外積の大きさになっている。

これを **角運動量 (angular momentum)**
という。

$$L = xp_y - yp_x$$



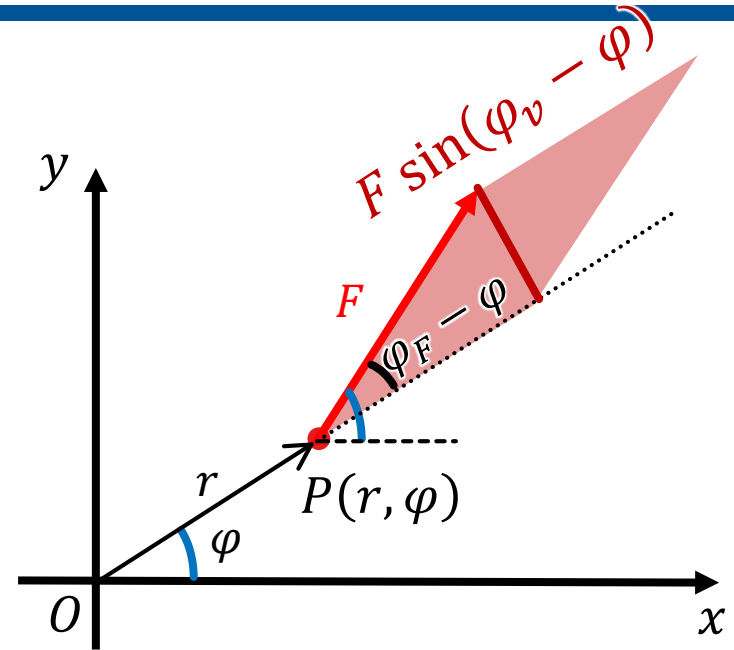
角運動量と力のモーメント

次に左辺 $x F_y - y F_x$ についても同様に考える。

力 F が x 軸となす角を φ_F とすると

$$x F_y - y F_x = r \cdot F \sin(\varphi_F - \varphi)$$

これは原点から見た力ベクトルとなっていて、その大きさは、力 F と変位ベクトル r の外積の大きさになっている。



これを **力のモーメント (moment of force)** という。

$$N = x F_y - y F_x$$

以上より、 $\frac{d}{dt}(x p_y - y p_x) = x F_y - y F_x$ は

$$\frac{d}{dt} L = N$$

すなわち、**角運動量の時間的変化の割合は力のモーメントに等しい。**
外力のモーメント0であれば、角運動量 L は一定 (角運動量保存則)

角運動量と面積速度

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

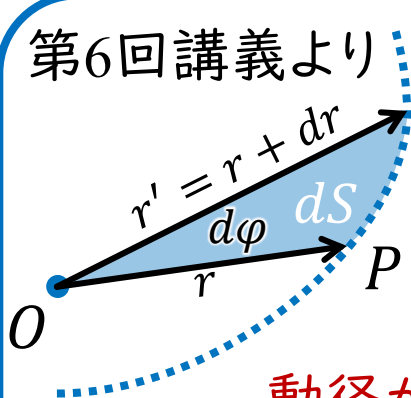
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \varphi) = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

より

$$\begin{aligned} xv_y - yv_x &= (r \cos \varphi)(\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - (r \sin \varphi)(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= r^2 \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\therefore L = mr^2 \dot{\varphi}$$

第6回講義より



$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h$$

動径が一定時間に
掃過する面積
= 面積速度

面積速度一定

$$2m \frac{dS}{dt} = mr^2 \dot{\varphi} = L$$

角運動量保存則と
面積速度一定は
物理的に同義

3次元空間での角運動量ベクトル

3次元空間で考える $m \frac{dv_x}{dt} = F_x$ $m \frac{dv_y}{dt} = F_y$ $m \frac{dv_z}{dt} = F_z$

から全く同様にして

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} L_x \equiv \frac{d}{dt} (y p_z - z p_y) = y F_z - z F_y \equiv N_x \\ \frac{d}{dt} L_y \equiv \frac{d}{dt} (z p_x - x p_z) = z F_x - x F_z \equiv N_y \\ \frac{d}{dt} L_z \equiv \frac{d}{dt} (x p_y - y p_x) = x F_y - y F_x \equiv N_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} L_x = N_x \\ \frac{d}{dt} L_y = N_y \\ \frac{d}{dt} L_z = N_z \end{array} \right.$$

$$L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} \quad \text{として} \quad \boxed{\frac{d}{dt} L = N}$$

角運動量ベクトルの時間的変化の割合は力のモーメントに等しい。
外力のモーメント0であれば、角運動量Lは一定（角運動量保存則）

角運動量ベクトルの外積による表現

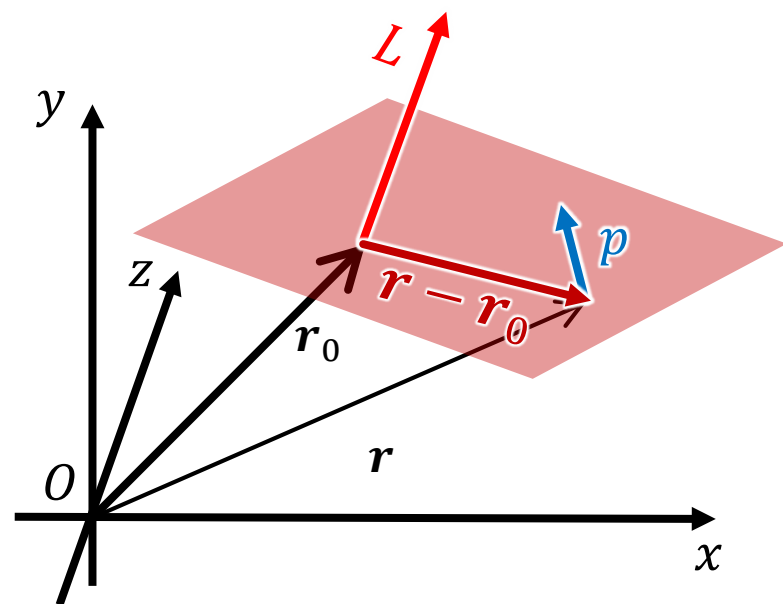
$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

原点ではない任意の点の周りの角運動量の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p} \\ &= m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} \\ &= m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$



例題4 円運動における角運動量

$x-y$ 平面内を長さ l_1 の糸で原点と結ばれている
質量 m の質点が速さ v_1 で円運動している。
糸の長さが l_2 になった時の速度 v_2 を求めよ。

長さ l_1 の場合、角運動量 L_1 は

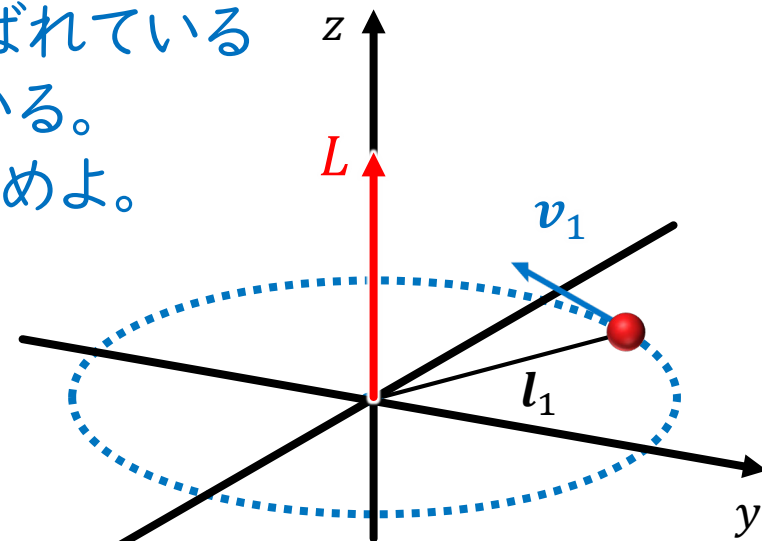
$$L_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{微分}} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -v_1 \sin \theta \\ +v_1 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ l_1 \cos \theta & l_1 \sin \theta & 0 \\ -v_1 \sin \theta & +v_1 \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\{l_1 \cos \theta \cdot v_1 \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z - l_1 \sin \theta \cdot (-v_1 \sin \theta) \cdot \mathbf{e}_z\}$$

$$= ml_1 v_1 \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml_1 v_1 \end{pmatrix}$$



例題4 円運動における角運動量

$x-y$ 平面内を長さ l_1 の糸で原点と結ばれている
質量 m の質点が速さ v_1 で円運動している。
糸の長さが l_2 になった時の速度 v_2 を求めよ。

長さ l_2 の場合、角運動量 L_1 も同様に

$$L_2 = ml_2 v_2 \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml_2 v_2 \end{pmatrix}$$

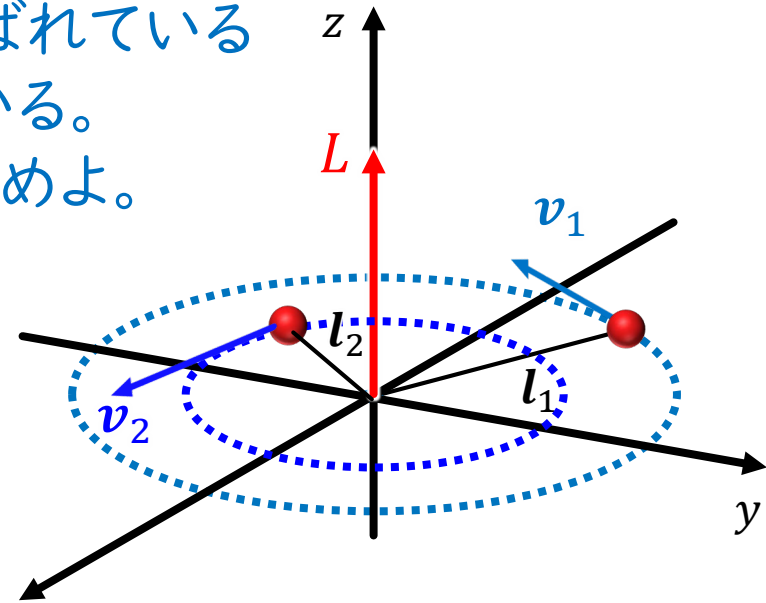
角運動量保存則より $L_1 = L_2$

$$ml_1 v_1 \mathbf{e}_z = ml_2 v_2 \mathbf{e}_z$$

$$v_2 = \frac{l_1}{l_2} v_1$$

$\frac{l_1}{l_2} > 1$ のとき $v_2 > v_1$ 糸を短くすると速度が増加

$\frac{l_1}{l_2} < 1$ のとき $v_2 < v_1$ 糸を長くすると速度が減少



例題4 円運動における角運動量

$x-y$ 平面内を長さ l_1 の糸で原点と結ばれている
質量 m の質点が速さ v_1 で円運動している。
糸の長さが l_2 になった時の速度 v_2 を求めよ。

長さ l_2 の場合、角運動量 L_1 も同様に

$$L_2 = ml_2 v_2 \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml_2 v_2 \end{pmatrix}$$

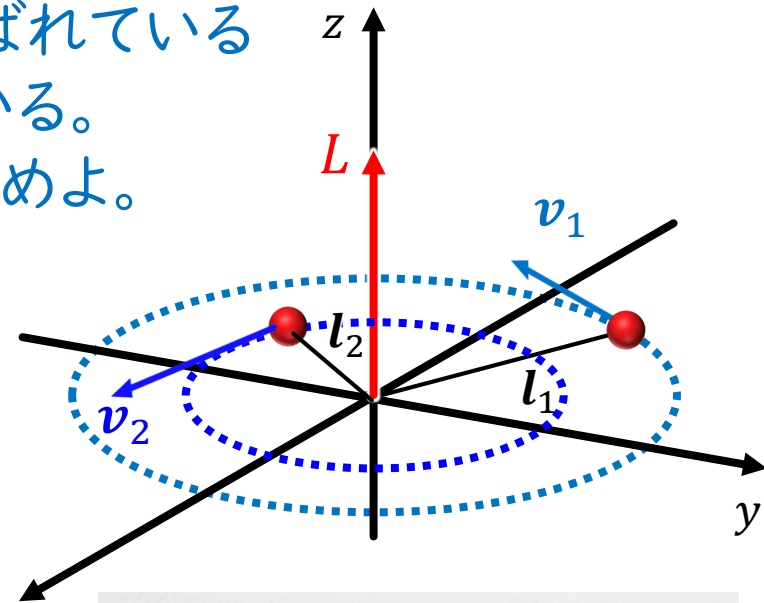
角運動量保存則より $L_1 = L_2$

$$ml_1 v_1 \mathbf{e}_z = ml_2 v_2 \mathbf{e}_z$$

$$v_2 = \frac{l_1}{l_2} v_1$$

$\frac{l_1}{l_2} > 1$ のとき $v_2 > v_1$ 糸を短くすると速度が増加

$\frac{l_1}{l_2} < 1$ のとき $v_2 < v_1$ 糸を長くすると速度が減少



例題5：単振り子

単振り子の角運動量 L 、
力のモーメント N を求め、
振り子の運動方程式を求めよ。

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{微分}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ -l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

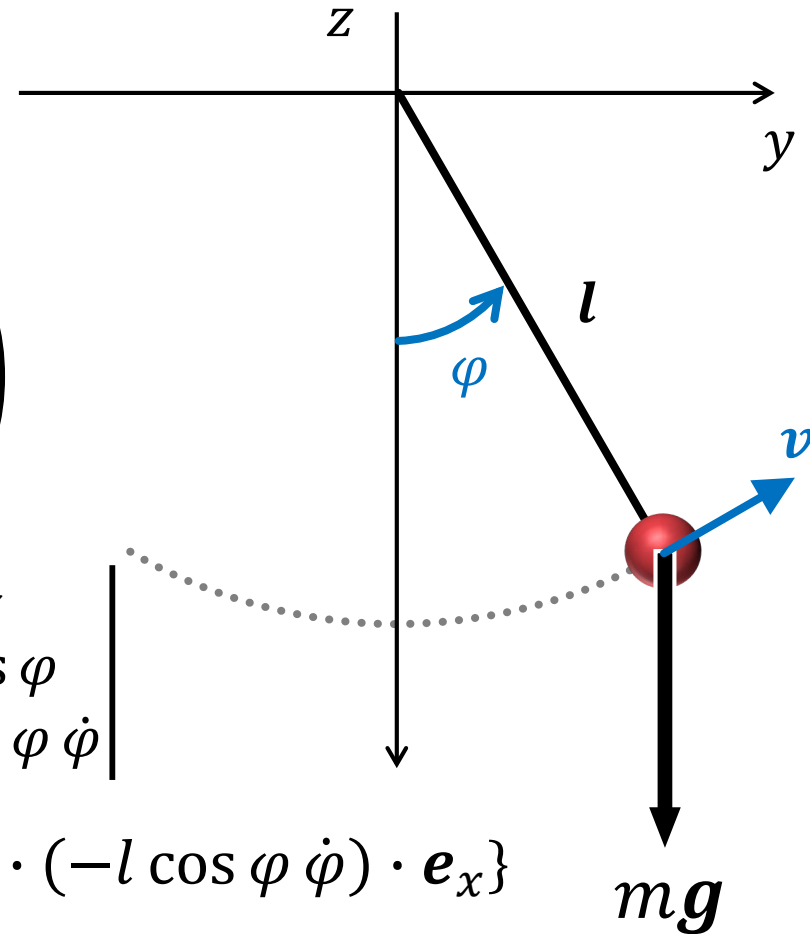
$$= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & l \sin \varphi & l \cos \varphi \\ 0 & l \cos \varphi \dot{\varphi} & -l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= m\{l \sin \varphi \cdot l \sin \varphi \dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_x - l \cos \varphi \cdot (-l \cos \varphi \dot{\varphi}) \cdot \mathbf{e}_x\}$$

$$= ml^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)\dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_x$$

$$= ml^2\dot{\varphi} \cdot \mathbf{e}_x$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ml^2\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ml^2\ddot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



例題5：単振り子

単振り子の角運動量 L 、
力のモーメント N を求め、
振り子の運動方程式を求めよ。

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & l \sin \varphi & l \cos \varphi \\ 0 & 0 & mg \end{vmatrix}$$

$$= l \sin \varphi \cdot mg \cdot \mathbf{e}_x$$

$$= mgl \sin \varphi \mathbf{e}_x$$

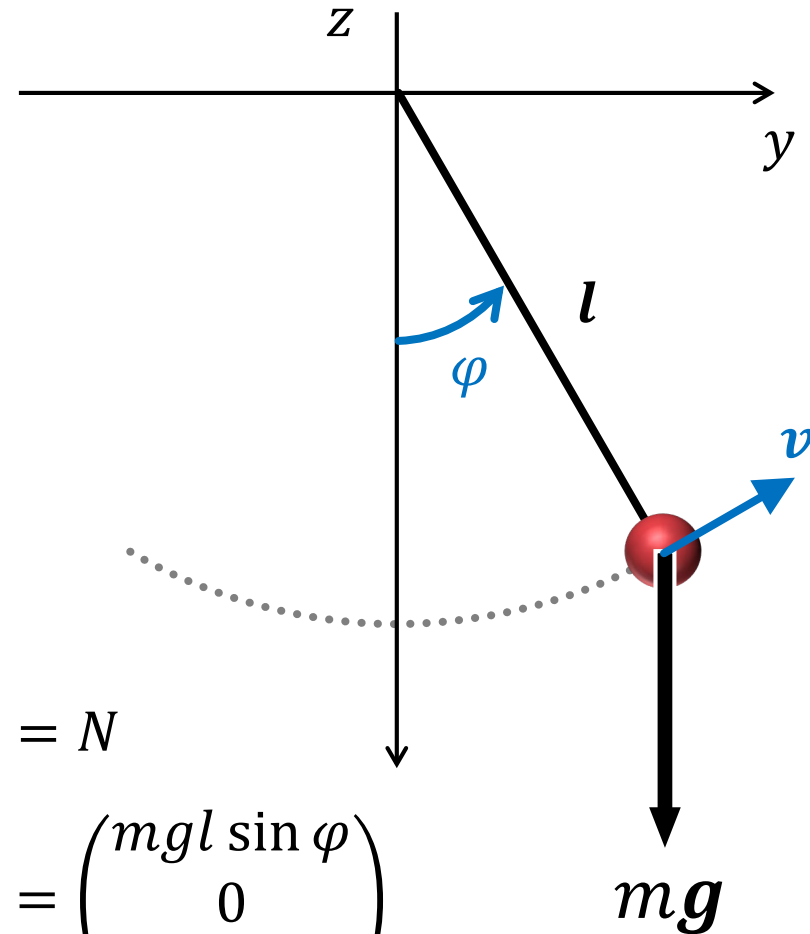
$$= \begin{pmatrix} mgl \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} L = N$$

$$\begin{pmatrix} ml^2 \ddot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgl \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \underline{\underline{\frac{g}{l} \sin \varphi}}$$

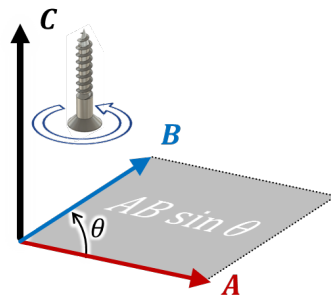


【本日のポイント】

ベクトル積 (外積)

$$\|C\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$$

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



角運動量と力のモーメント

$$\frac{d}{dt} L = N$$

$$L = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$$

$$N = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ xp_z - zp_x \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ xF_z - zF_x \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

