

力学 I

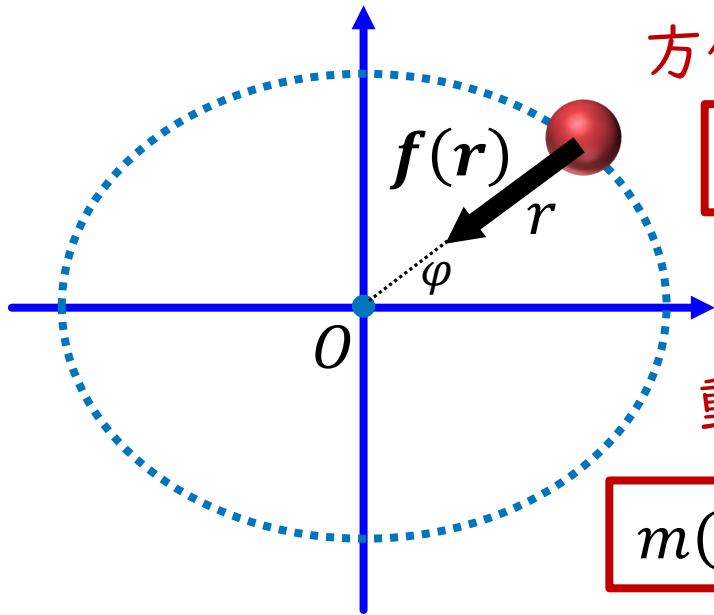
(第7回) 惑星の運動と中心力 (2)

【今日の内容】

- 太陽の引力から惑星の運動を導く
- 惑星の位置の時間変化
- 球面によるポテンシャル

【前回の復習】

2



方位角方向の運動方程式

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}h$$

: 面積速度一定

動径方向の運動方程式

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r) \rightarrow m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

ケプラーの法則

1. 楕円軌道
2. 面積速度一定
3. 周期の2乗は
半径の3乗に比例

$$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 l}{h^2} = C(\text{const})$$

$$f(r) = -\frac{4\pi^2 m}{C} \frac{1}{r^2} = -G \frac{Mm}{r^2}$$

太陽の引力から惑星の運動を導く

動径方向の運動方程式

万有引力

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$$

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G \frac{M}{r^2}$$

これを解いて $r(t)$ と $\varphi(t)$ を求める

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -h \frac{du}{d\varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \\ &= -h \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \\ &= -h \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) \\ &= -\frac{h^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\varphi} &= h \text{ より} \\ \dot{\varphi} &= \frac{h}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \text{ とおくと} \\ \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \end{aligned}$$

太陽の引力から惑星の運動を導く

軌道

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{h^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G \frac{M}{r^2}$$

$$-\frac{h^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -G \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{h^2}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) + r \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 = G \frac{M}{r^2}$$

$$h^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) + \frac{h^2}{r} = GM$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$h^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) + h^2 u = GM$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) + u = G \frac{M}{h^2}$$

この2階非同次微分方程式を
解いてもよいが

$$U = u - G \frac{M}{h^2} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(U + G \frac{M}{h^2} \right) + U + G \frac{M}{h^2} \\ = G \frac{M}{h^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = 0$$

2階同次微分方程式を解く

太陽の引力から惑星の運動を導く

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U = 0$$

$U = e^{\lambda\varphi}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 0\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

基本解は

$$U_1 = \cos \varphi$$

$$U_2 = \sin \varphi$$

一般解は

$$U = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

書き直して

$$U = A \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$u = U + G \frac{M}{h^2}$$

$$= A \cos(\varphi - \varphi_0) + G \frac{M}{h^2}$$

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{u} &= \frac{1}{A \cos(\varphi - \varphi_0) + G \frac{M}{h^2}} \\ &= \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{h^2}{GM} A \cos(\varphi - \varphi_0)} \end{aligned}$$

これは

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

のかたちになっている

楕円: $0 < \varepsilon < 1$

放物線: $\varepsilon = 1$

双曲線: $\varepsilon > 1$

太陽の引力から惑星の運動を導く(周期)

$$l = \frac{h^2}{GM} \quad \varepsilon = \frac{h^2}{GM} A \quad r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

楕円: $0 < \varepsilon < 1$

放物線: $\varepsilon = 1$

双曲線: $\varepsilon > 1$

周期

軌道面積を面積速度 $\frac{1}{2}h$ で割れば求まる

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{al} \quad \text{と} \quad h = \sqrt{GMl} \text{より}$$

$$T = \frac{2\pi a\sqrt{al}}{\sqrt{GMl}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad \text{よって}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C(\text{const})$$

太陽の引力から惑星の運動を導く(エネルギー)

9

エネルギー積分

$$m\ddot{r} = \frac{mh^2}{r^3} - G \frac{Mm}{r^2}$$

両辺に $\dot{r}$ をかけると

$$m\dot{r}\ddot{r} = \left\{ \frac{mh^2}{r^3} - G \frac{Mm}{r^2} \right\} \dot{r}$$

ここで $\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = 2\dot{r}\ddot{r}$ より

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \left\{ \frac{mh^2}{r^3} - G \frac{Mm}{r^2} \right\} \frac{dr}{dt}$$

これを時間で積分すると(積分定数: E)

$$\frac{1}{2}m \int d(\dot{r}^2) = \int \left\{ \frac{mh^2}{r^3} - G \frac{Mm}{r^2} \right\} dr$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = -\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2} + G \frac{Mm}{r} + E$$

$$E = \frac{1}{2}m \left\{ \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right\} - G \frac{Mm}{r}$$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}h \quad \text{より} \quad (r\dot{\phi})^2 = \frac{h^2}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\} - G \frac{Mm}{r}$$

運動
エネルギー

ポテンシャル
エネルギー

太陽の引力から惑星の運動を導く(円軌道)

円軌道

円軌道の場合、 $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ で、 $r \rightarrow r_0$ とすると

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{m\ddot{r}} = \underset{\substack{\downarrow \\ r_0}}{mr\dot{\phi}^2} - G \underset{\substack{\downarrow \\ r_0}}{\frac{Mm}{r^2}}$$

$$G \frac{Mm}{r_0^2} = mr_0 \dot{\phi}^2$$

$$G \frac{M}{r_0} = (r_0 \dot{\phi})^2 = v_0^2$$

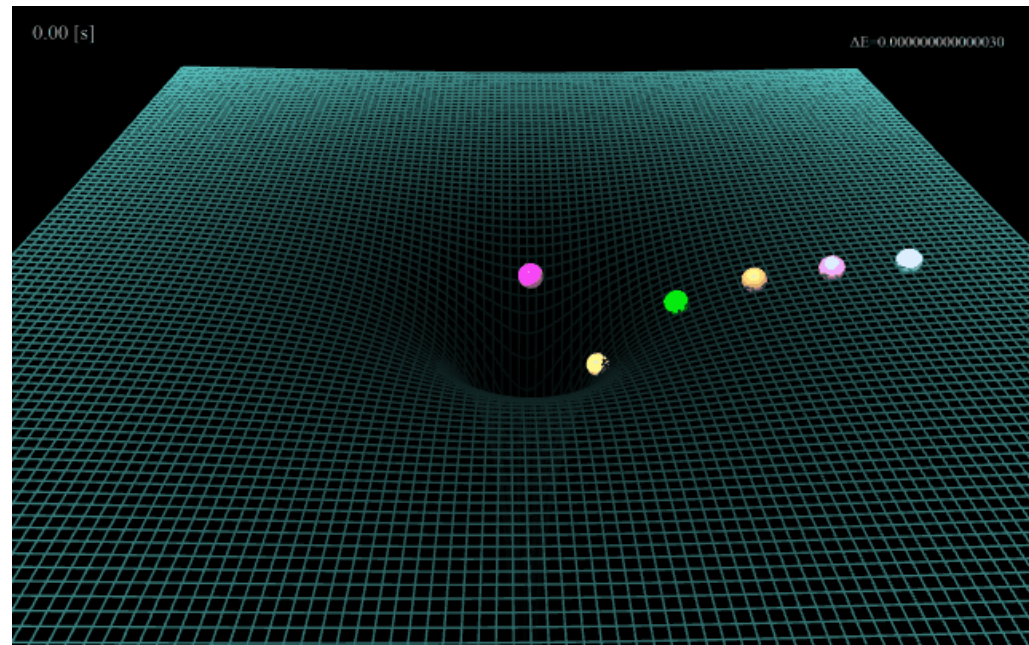
よって、全エネルギー E は

運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}G \frac{Mm}{r_0}$

$$E = \frac{1}{2}G \frac{Mm}{r_0} - G \frac{Mm}{r_0}$$

ポテンシャルエネルギーは $U = -G \frac{Mm}{r_0}$

$$E = -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{r_0}$$

$$U = -G \frac{Mm}{r_0}$$


太陽の引力から惑星の運動を導く(近日点)

軌道の形とエネルギーと面積速度の関係

近日点(太陽に最も近くなる点)での距離 r_m を求める。

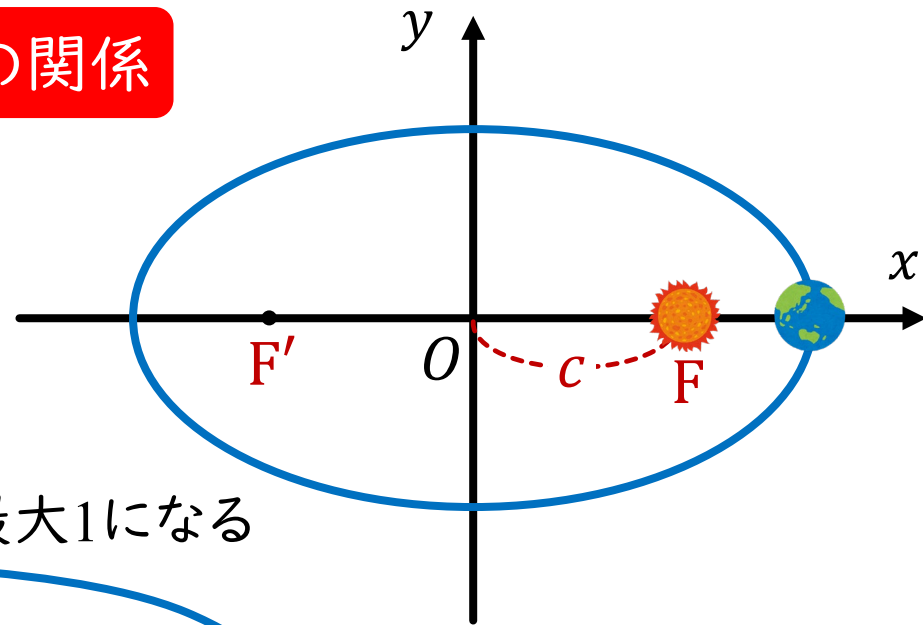
$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

が最小になるためには $\cos$ の部分が最大1になる

$$r_m = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \varepsilon}$$

このとき、総エネルギーは

$$E = K + U = \frac{1}{2}m \left\{ \underset{\downarrow 0}{\dot{r}^2} + \underset{\downarrow r_m}{\frac{h^2}{r^2}} \right\} - G \underset{\downarrow r_m}{\frac{Mm}{r}} \rightarrow \frac{1}{2}m \frac{h^2}{r_m^2} - G \frac{Mm}{r_m}$$



太陽の引力から惑星の運動を導く

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m \frac{h^2}{r_m^2} - G \frac{Mm}{r_m} = \frac{m}{2} \frac{h^2}{r_m} \left\{ \frac{1}{r_m} - \frac{2GM}{h^2} \right\} \\
 &= \frac{m}{2} \frac{h^2(1+\varepsilon)}{l} \left\{ \frac{1+\varepsilon}{l} - \frac{2GM}{h^2} \right\} \\
 &= \frac{m}{2} GM(1+\varepsilon) \left\{ \frac{GM(1+\varepsilon)}{h^2} - \frac{2GM}{h^2} \right\} \quad \leftarrow l = \frac{h^2}{GM} \\
 &= \frac{m}{2h^2} G^2 M^2 (\varepsilon + 1)(\varepsilon - 1) \\
 E &= \frac{m}{2h^2} G^2 M^2 (\varepsilon^2 - 1)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2h^2 E}{mG^2 M^2}$$

これは離心率（楕円or双曲線or放物線）がエネルギー E と面積速度 $h/2$ で決まることを示している

惑星の位置の時間変化

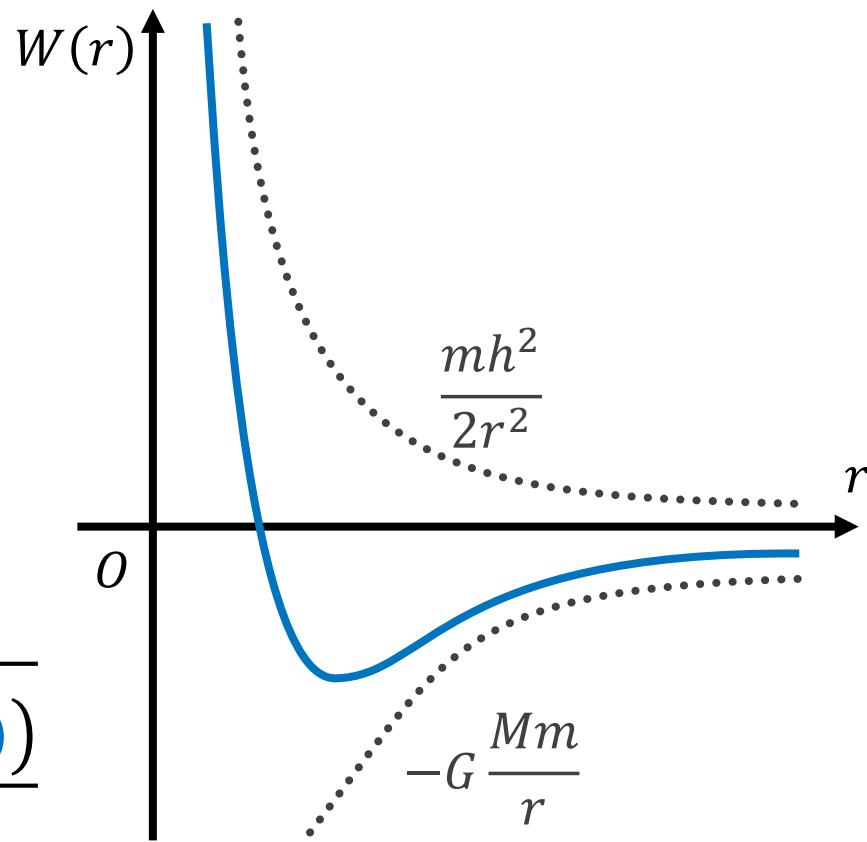
惑星の位置(r, φ)と時間 t の関係を表す ケプラー方程式 を導出する
エネルギー積分

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - G \frac{Mm}{r} + \frac{mh^2}{2r^2}$$

動径方向の
運動エネルギー
太陽の引力の
ポテンシャルエネルギー
遠心力の

$$W(r) = -G \frac{Mm}{r} + \frac{mh^2}{2r^2}$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = \frac{E - W(r)}{m} \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2(E - W(r))}{m}}$$



運動が起こるのは $E > W(r)$ のときのみ (ルートの中身が正)

惑星の位置の時間変化

$E < 0$ のとき、

$E = W(r)$ となる相違な r_1 と r_2 の間で
往復運動(楕円運動)する

r_1 と r_2 は $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ の極値なので

$$r_1 = \frac{l}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon) \quad r_2 = \frac{l}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon)$$

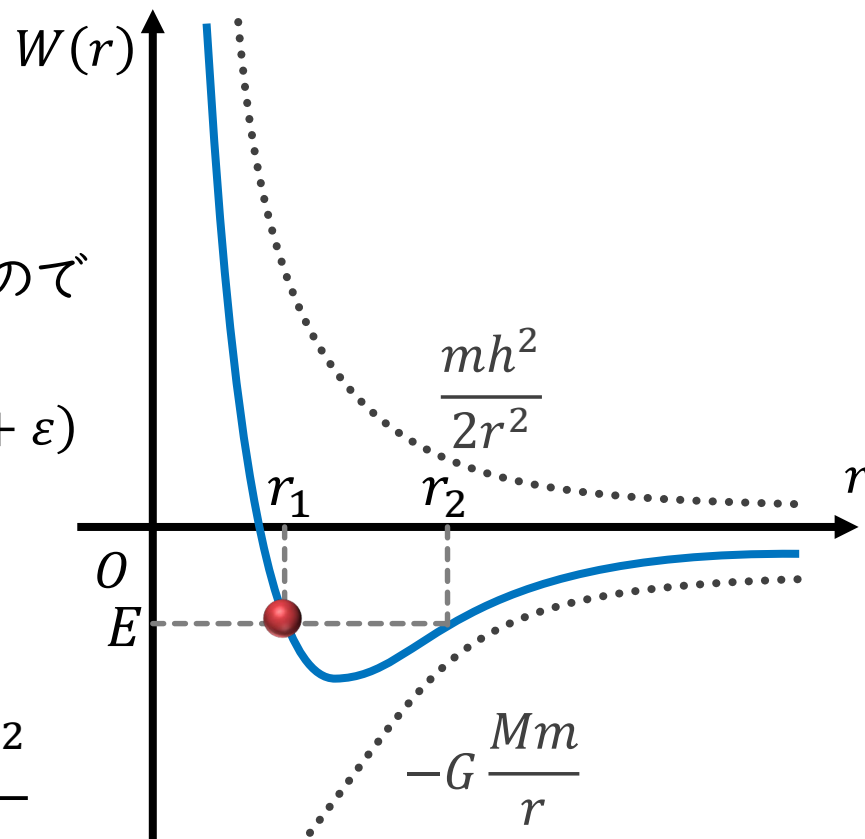
$$W(r) = -G \frac{Mm}{r} + \frac{mh^2}{2r^2} \text{ より}$$

$$2\{E - W(r)\} = \frac{2Er^2 + 2GMmr - mh^2}{r^2}$$

この式は r の2次式であり r_1 と r_2 で左辺が0となるはずなので、

$$2Er^2 + 2GMmr - mh^2 = 2E(r - r_1)(r - r_2)$$

とかけるはず。これを $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2(E - W(r))}{m}}$ に代入する。

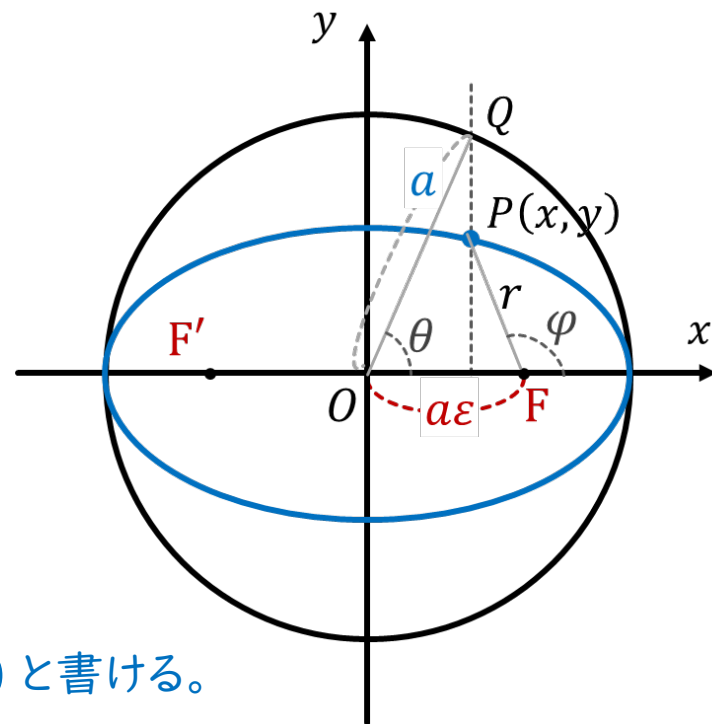


惑星の位置の時間変化

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E(r - r_1)(r - r_2)}{mr^2}}$$

r と t で
変数分離すると

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{2E(r - r_1)(r - r_2)}{mr^2}}} dr \\ &= \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{r}{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}} dr \end{aligned}$$



離心角 θ を左図のように定義すると、 $r = a(1 - \varepsilon \cos \theta)$ と書ける。

$r_1 = a(1 - \varepsilon), r_2 = a(1 + \varepsilon), \quad dr = -a\varepsilon \sin \theta d\theta$ をもちいると

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\mp a(1 - \varepsilon \cos \theta) a \varepsilon \sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{(a(1 - \varepsilon \cos \theta) - a(1 - \varepsilon))(a(1 - \varepsilon \cos \theta) - a(1 + \varepsilon))}} \\ &= \frac{\mp a(1 - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{-\frac{2E}{m}} \sqrt{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} = \frac{\mp a}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} (1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

惑星の位置の時間変化

$$dt = \frac{\pm a}{\sqrt{-2E/m}} (1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta$$

両辺積分して

$$t = \frac{\pm a}{\sqrt{-2E/m}} (\theta - \varepsilon \sin \theta) + C$$

$t = 0$ で $\varphi = 0$ とすると

$$t = \frac{\pm a}{\sqrt{-2E/m}} (\varphi - \varepsilon \sin \theta)$$

よって t と φ の関係式が得られたが、
 E という未知数がはいつたままなので、

$t = T$ のとき $\varphi = 2\pi$ であるから

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E/m}}$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{-2E/m}}}$$

$$t = \frac{1}{\omega} (\theta - \varepsilon \sin \theta)$$

$$\omega t = \theta - \varepsilon \sin \theta$$

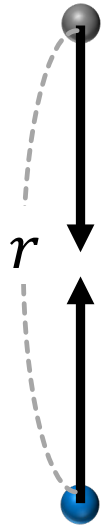
これを**ケプラー方程式**という
(Kepler's equation)

これにより各時刻 t における
角度 θ が求まり、 r も求まる。

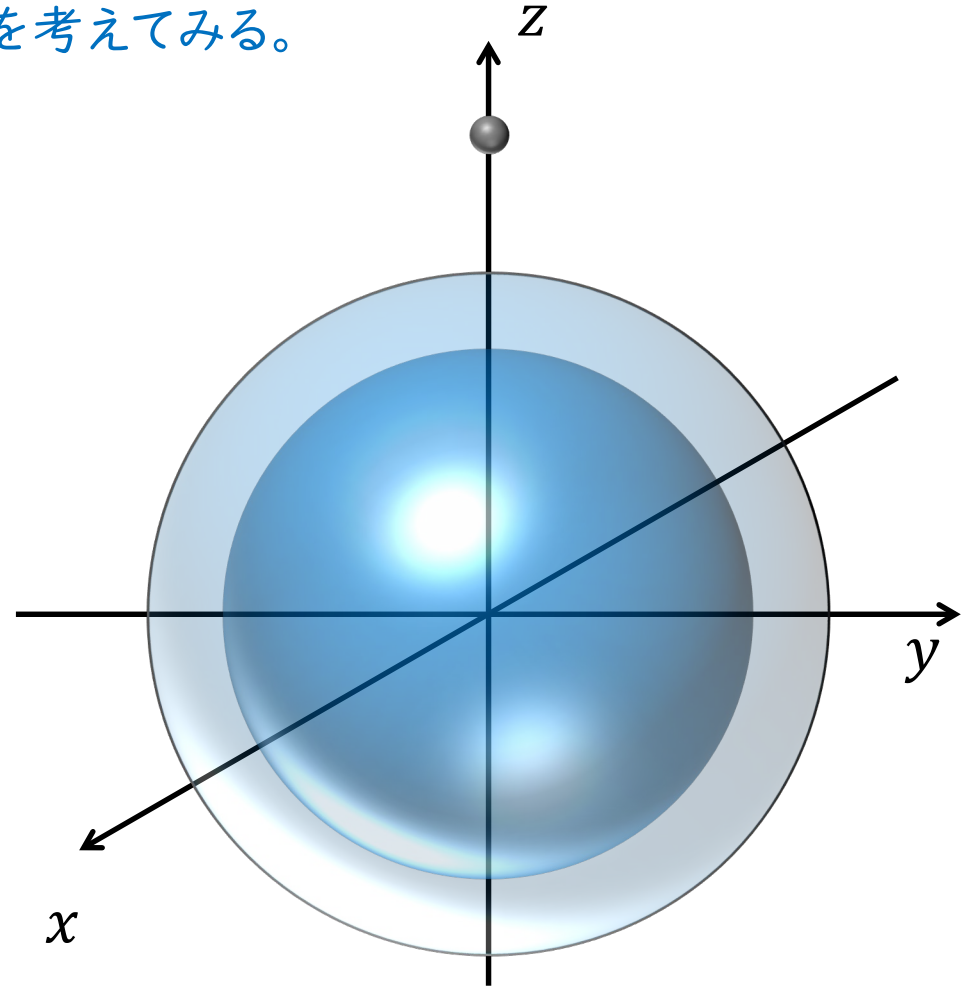
球体によるポテンシャル

これまでは質量がすべて中心に集まった質点からの万有引力を考えた。(左)

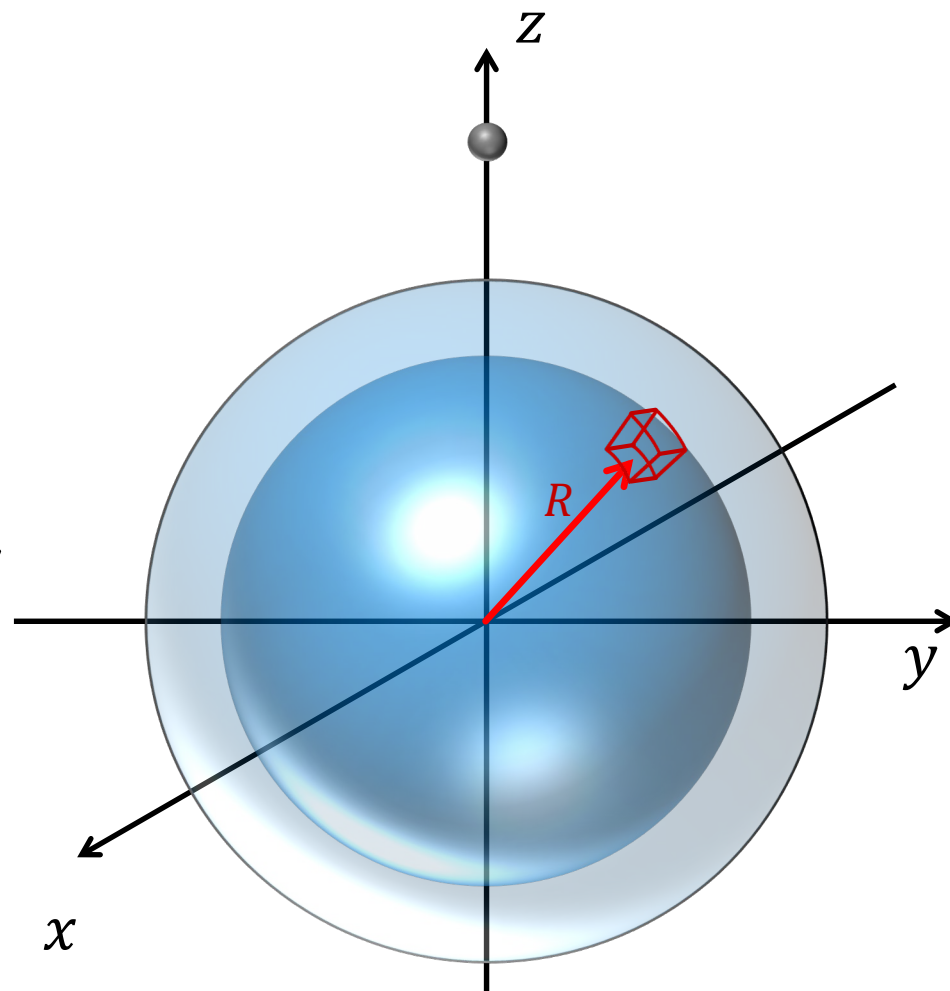
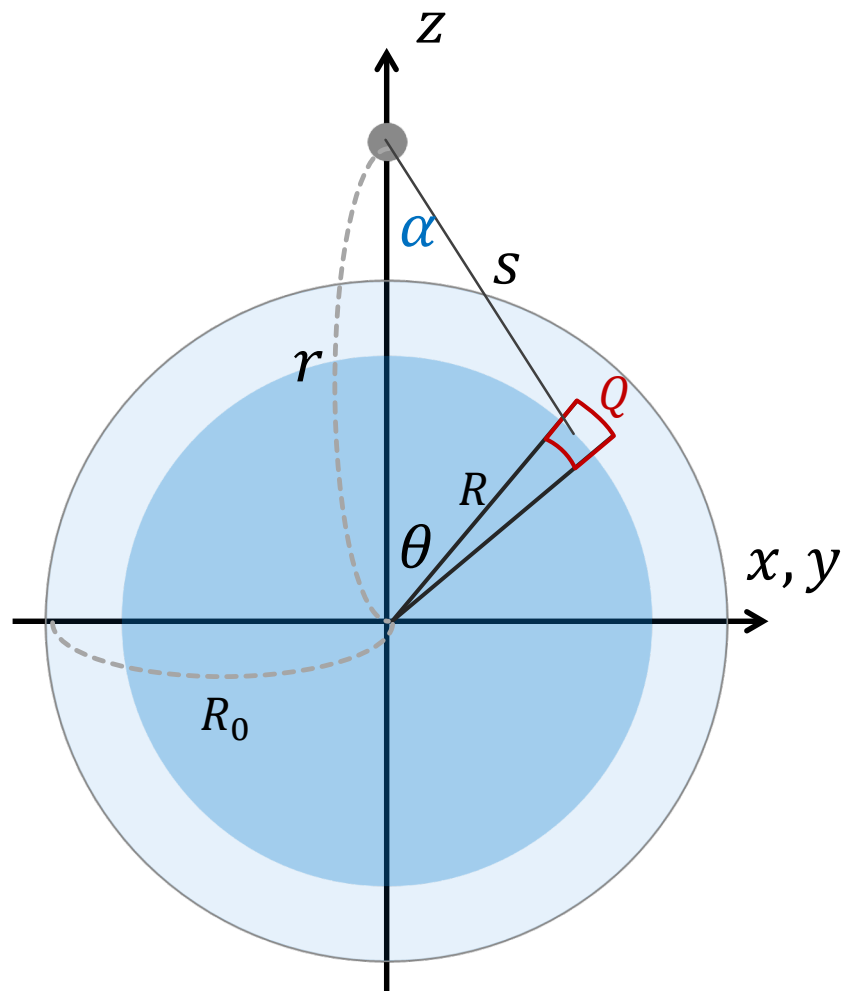
➡ 大きさのある球体からの万有引力を考えてみる。



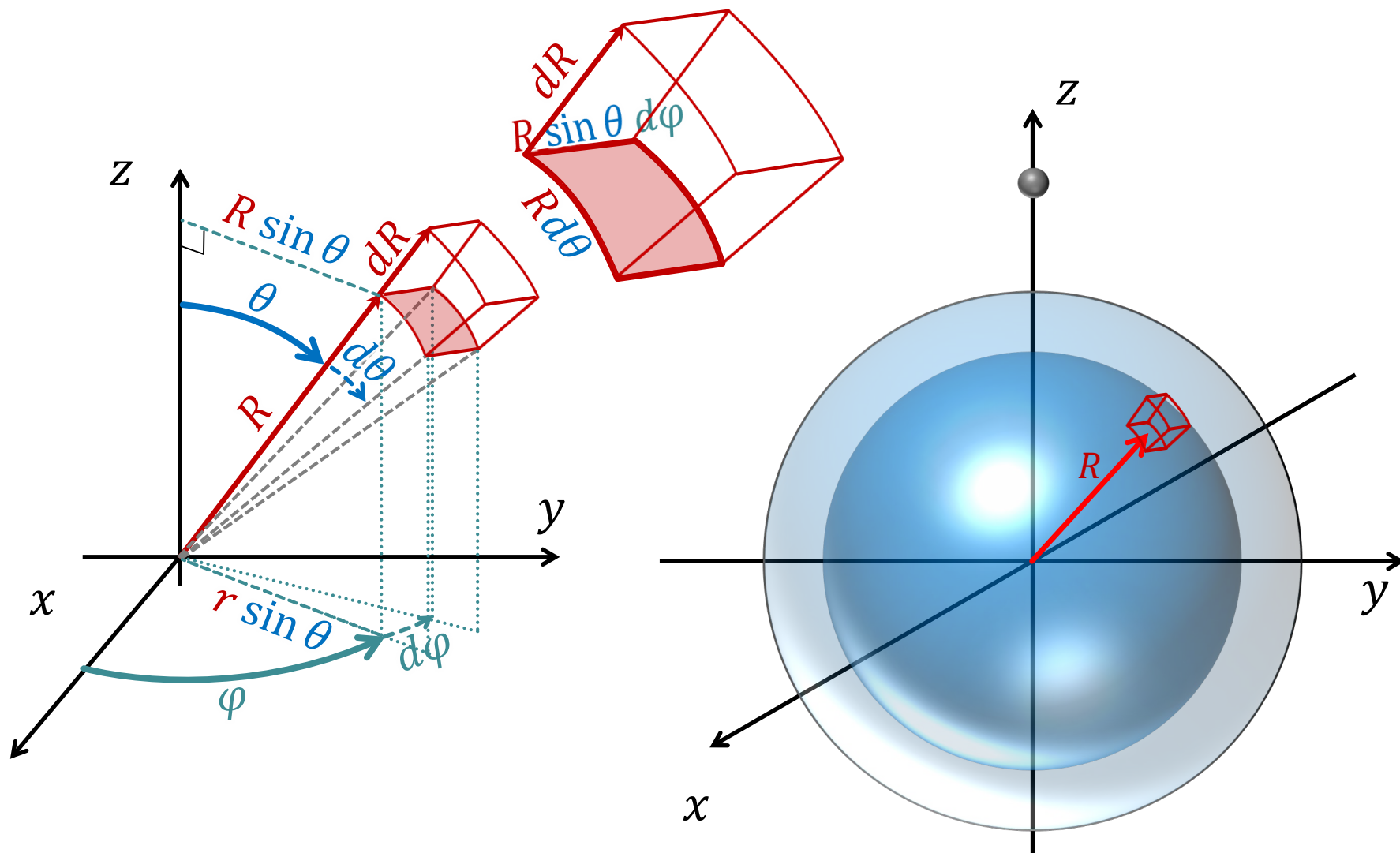
球(半径 R_0) の中心 O から R の距離の微小領域 Q を考え、その体積 dV とし、その密度を $\rho(R)$ とする。



この球体から r だけ離れた点 P にある質量 m の質点にはたらく合力を求める。



球体によるポテンシャル



球体によるポテンシャル

この微小体積の体積 dV の
質量は $\rho(R)dV$ であるから
これによる引力の
 z 軸方向の成分は

$$-G \frac{m\rho(R)dV}{s^2} \cos \alpha$$

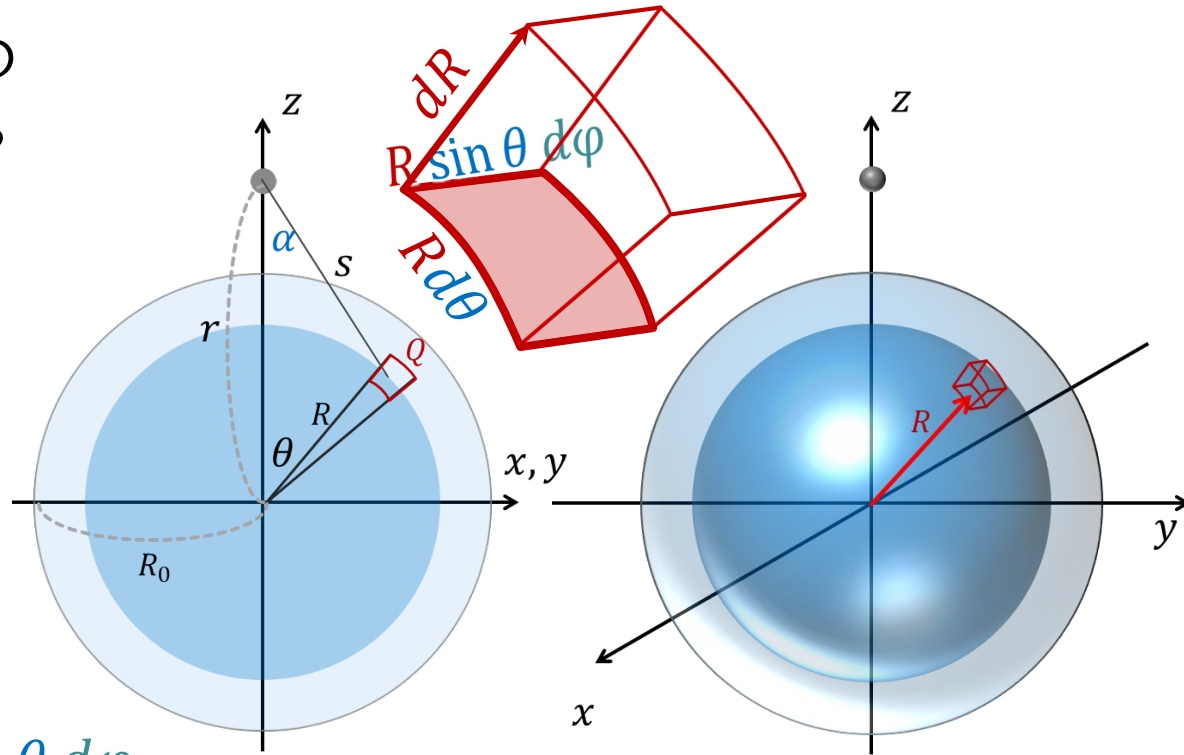
$$\left\{ \cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{s} \right.$$

$$dV = dR \cdot R d\theta \cdot R \sin \theta d\varphi$$

$$-Gm \frac{r - R \cos \theta}{s^3} \rho(R) R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$$

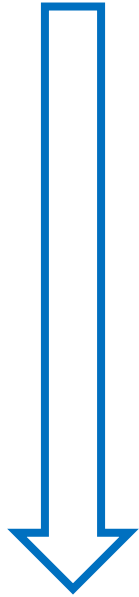
これを球体全体に対して積分すればよい

$$\longrightarrow \begin{cases} R: 0 \rightarrow R_0 \\ \theta: 0 \rightarrow \pi \\ \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \end{cases}$$



球体によるポテンシャル

$$\therefore f(r) = -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r - R \cos \theta}{s^3} \rho(R) R^2 \sin \theta$$



ここで $s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$ とかけるので、
 R と θ をとめて r で微分すると

$$2s \frac{ds}{dr} = 2r - 2R \cos \theta \quad \therefore \frac{ds}{dr} = \frac{r - R \cos \theta}{s}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{d}{dr} \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{dr} = -\frac{r - R \cos \theta}{s^3}$$

$$\begin{aligned} f(r) &= -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -\frac{d}{dr} \frac{1}{s} \right\} \rho(R) R^2 \sin \theta \\ &= -\frac{d}{dr} \left\{ -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho(R) R^2 \sin \theta}{s} \right\} \equiv -\frac{d}{dr} U(r) \end{aligned}$$

となり、 $\{ \quad \}$ はポテンシャル $U(r)$ である。

では $U(r)$ を求めよう。

球体によるポテンシャル

$$U(r) = -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho(R) R^2 \sin \theta}{s}$$

順次積分を考えよう。

φ について 被積分関数は φ を含まないので定数扱いであり
積分すると 2π がでてくる

$$\rightarrow U(r) = -2\pi Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \frac{\rho(R) R^2 \sin \theta}{s}$$

θ について 被積分関数は θ は含まないが、 s を含むので積分しにくい。
そこで θ についての積分を s についての積分に変換する。

$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$ より R と r をとめて θ で微分すると

$$2s \frac{ds}{d\theta} = 2Rr \sin \theta \quad \therefore \frac{1}{r} ds = \frac{R \sin \theta}{s} d\theta$$

θ	$0 \rightarrow \pi$	$\rightarrow U(r) = -\frac{Gm}{r} \int_0^{R_0} dR \int_{r-R}^{r+R} ds \{ \rho(R) \cdot 2\pi R \}$
s	$(r-R) \rightarrow (r+R)$	

球体によるポテンシャル

$$U(r) = -\frac{Gm}{r} \int_0^{R_0} dR \int_{r-R}^{r+R} ds \{ \rho(R) \cdot 2\pi R \}$$

被積分関数は s を含まないので定数扱いであり
積分すると $(r+R) - (r-R) = 2R$ がでてくる

$$\rightarrow U(r) = -\frac{Gm}{r} \underbrace{\int_0^{R_0} \rho(R) \cdot 4\pi R^2 dR}_{\int_0^{R_0} \rho(R) \cdot 4\pi R^2 dR = M}$$

球体の全質量である。

$$\therefore \boxed{U(r) = -G \frac{Mm}{r}} \longrightarrow \boxed{f(r) = -\frac{d}{dr} U(r) = -G \frac{Mm}{r^2}}$$

これは全質量が中心に集まったときと
同じ引力がはたらくことを示している!!

結局は質点として考えればいいことになるが、このような計算(考え方)は
様々な状態を計算するのに適用できる

球の内部にいる場合

例えば地球の内部ではたらく万有引力を考えたとき、
質点よりも外の部分の影響を考えてみよう。

$$U(r) = -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho(R) R^2 \sin \theta}{s}$$

球殻に対して同様に考える

φ に関する積分 $\rightarrow 2\pi$ R に関する積分 $\rightarrow$ 一定

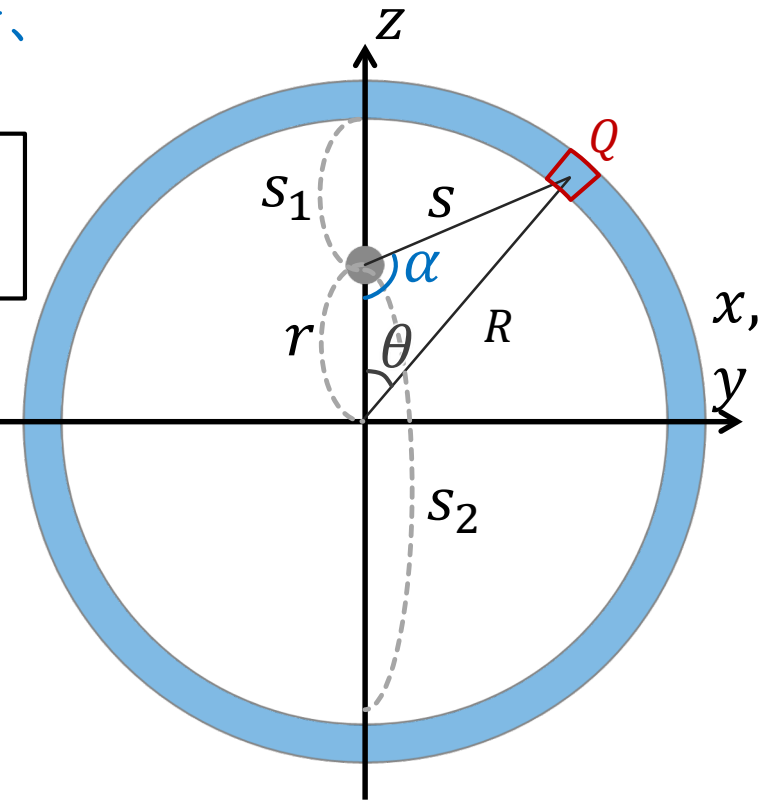
θ に関する積分 $\rightarrow s$ に関する積分に変数変換

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$\theta \text{ で微分すると } s ds = Rr \sin \theta d\theta$$

$\frac{1}{r} ds = \frac{R \sin \theta}{s} d\theta$	θ	$0 \rightarrow \pi$
	s	$(R - r) \rightarrow (R + r)$

$$\begin{aligned} \square &\rightarrow -2\pi Gm \int_0^\pi d\theta \frac{\rho(R) R^2 \sin \theta}{s} = -2\pi Gm \cdot 2\rho(R)R = -G \cdot 4\pi\rho(R)R \cdot m \\ &\rightarrow \int_{R-r}^{R+r} ds \frac{\rho(R)R}{r} = \frac{\rho(R)R}{r} \{(R - r) - (R + r)\} = 2\rho(R)R \end{aligned}$$



球の内部にいる場合

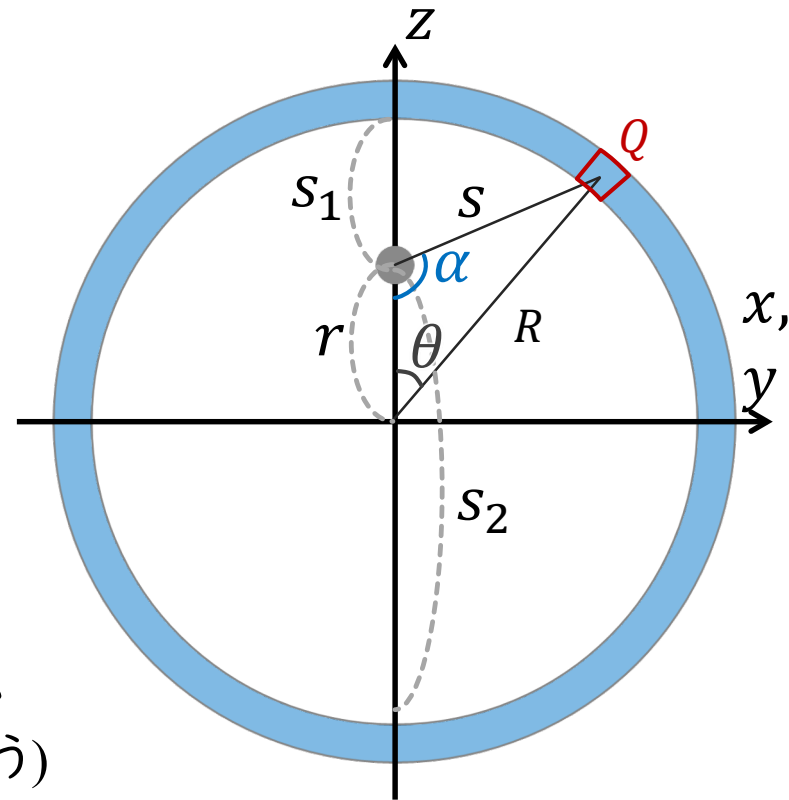
$$U(r) = -G \cdot 4\pi\rho(R)R \cdot m$$

→ r によらない

→ 球殻ないであれば
どこにあってもポテンシャルが一定

$$f(r) = -\frac{d}{dr}U(r) = 0$$

→ 球殻の内部では
外側の質量からの万有引力を受けない
(万有引力自体ははたらくが打ち消し合う)



→ 一様な密度の球体の内部にある質点は、
その質点の位置を含む球殻の外側の質量からの万有引力は受けず、
内側の部分にある質量からの引力だけを受ける

【本日のポイント】

前回：ケプラーの法則（観測）から太陽の引力（数式化）を導出する

今回：太陽の引力から惑星の運動（ケプラーの法則）を導出する

軌道 $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$: 楕円軌道 (第一法則)

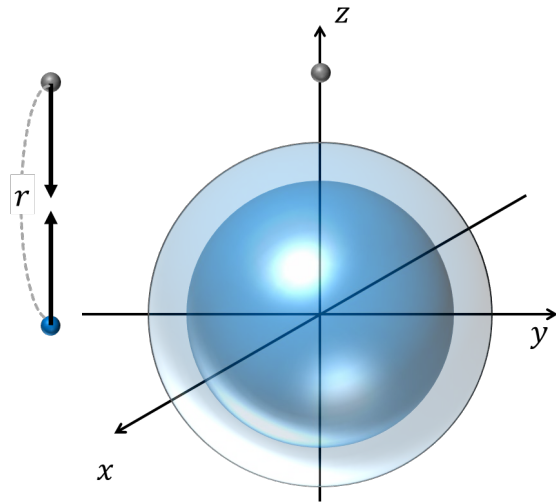
→ 面積速度の関係

周期 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C(\text{const})$: 第二法則

$\omega t = \varphi - \varepsilon \sin \varphi$: ケプラー方程式 (第三法則)

エネルギー積分 $E = \frac{1}{2} m \{ \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \} - G \frac{Mm}{r}$

球体によるポテンシャル



$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

全質量が中心に
集まったときと同じ

球殻内部のポテンシャル

$$U(r) = -G \cdot 4\pi\rho(R)R \cdot m = \text{Const}$$

$$f(r) = 0$$

球殻の外側の質量からの
万有引力は受けない