

力学 I

(第6回) 惑星の運動と中心力 (I)

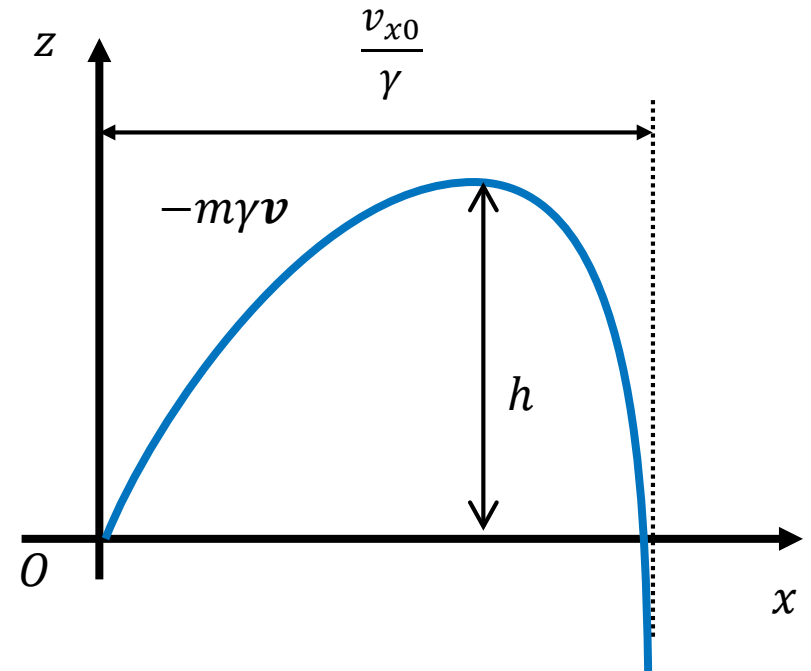
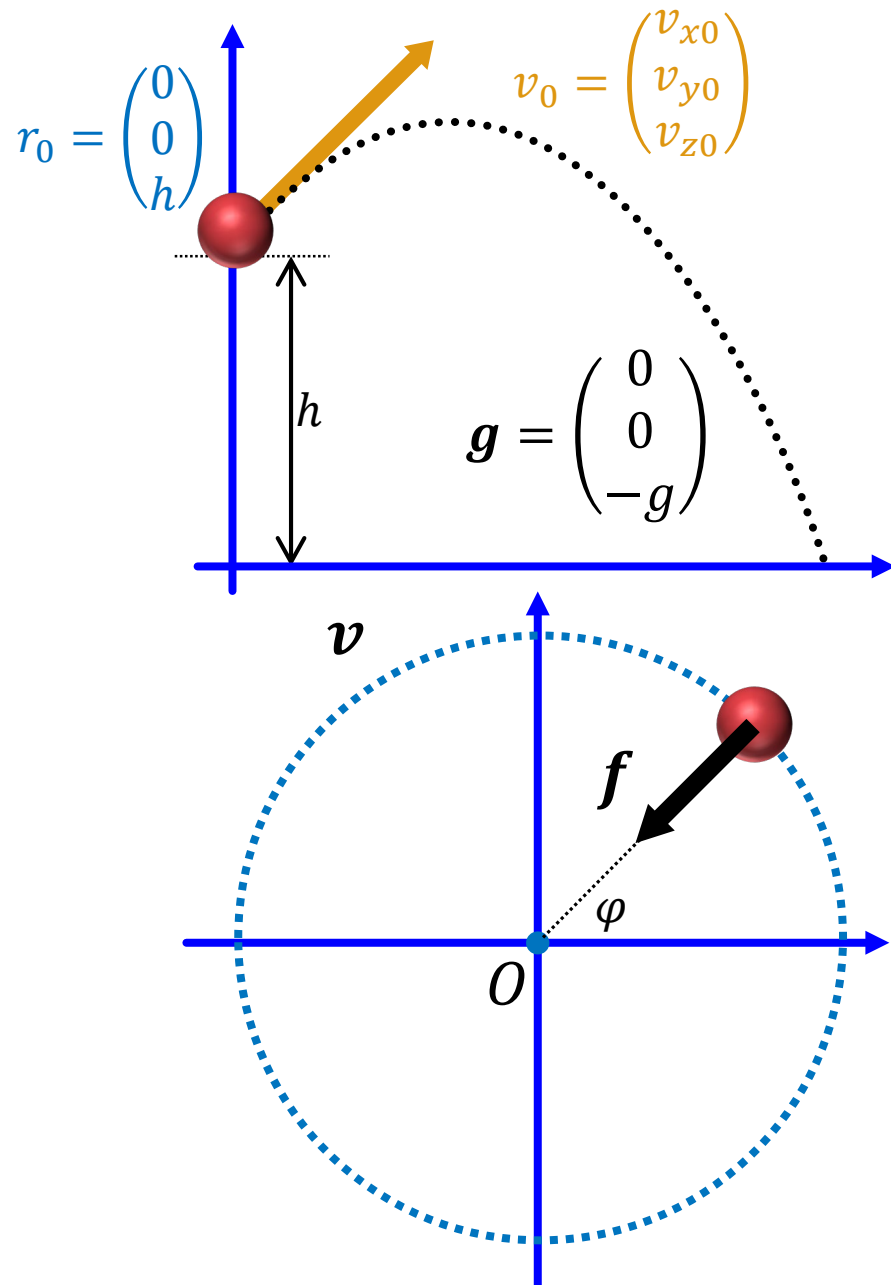
【今日の内容】

円錐曲線

極座標の微分

ケプラーの法則

【前回の復習】



保存力

2点間を移動させる仕事は、
その移動経路によらず
始点と終点のみで決まる力

$$\mathbf{F} = \left[-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

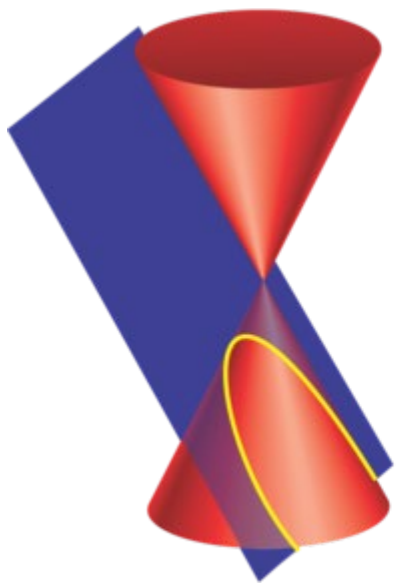
円錐曲線

円錐曲線 (Conic section)

二次錐面を任意の平面で切断したときの断面、円錐断面として得られる曲線群の総称

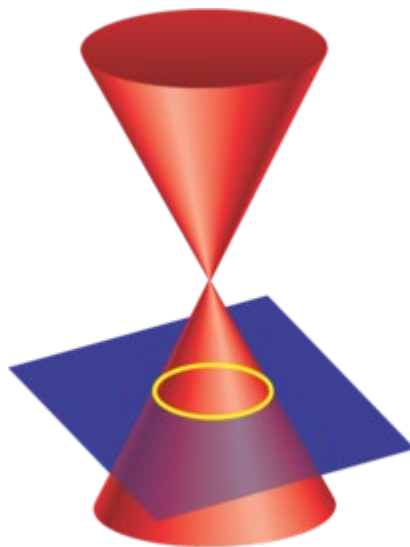
二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



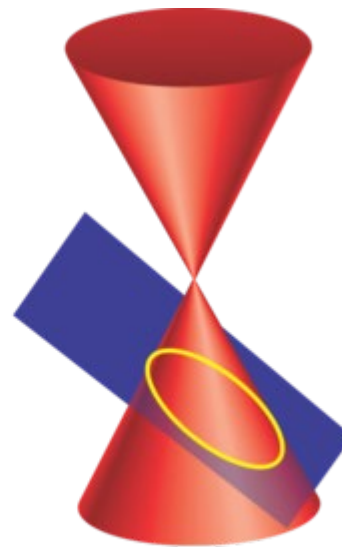
parabola

$$2pX - \frac{Y^2}{q^2} = 1$$



circle

$$\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{p^2} = 1$$



ellipse

$$\frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{q^2} = 1$$



hyperbola

$$\frac{X^2}{p^2} - \frac{Y^2}{q^2} = 1$$

$$p > 0, q > 0$$

楕円

2定点からの距離の和が一定の曲線を楕円といい、
特に2定点が同一のものを円という。

この2定点を焦点 (focus)と呼ぶ

$$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

これらの和が一定 ($\equiv 2a$ ($a > 0$)) より

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

2乗して整理すると

$$x^2 + y^2 - (2a^2 - c^2) = \sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}\{(x + c)^2 + y^2\}}$$

さらに2乗して整理すると

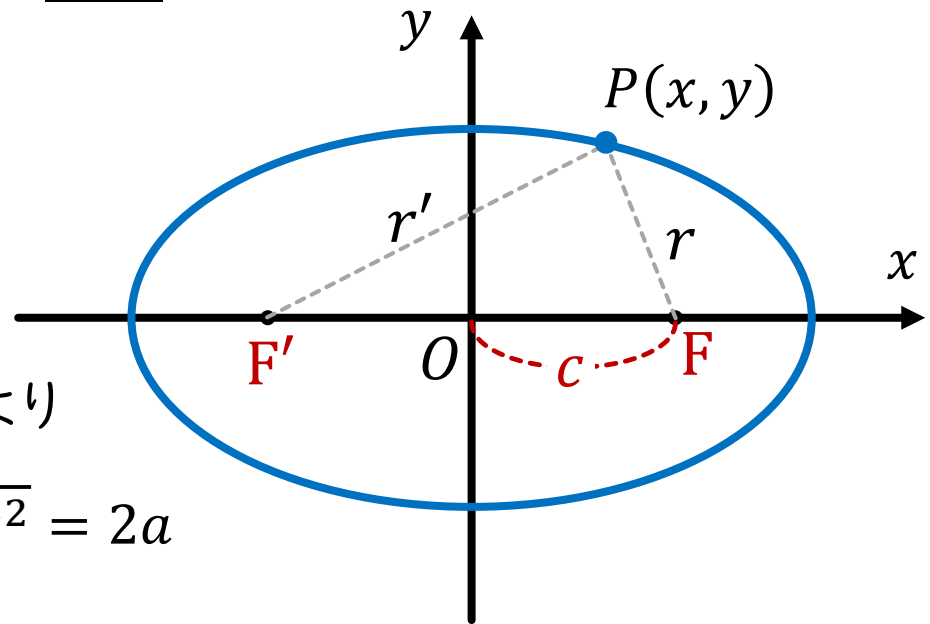
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a^2 - c^2 \equiv b^2$ とすれば

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a : 長軸半径

b : 短軸半径



楕円

一方の焦点Fからの距離 r に対して、
焦点F'からの距離 r' は

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{(2c + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 4cr \cos \varphi} \end{aligned}$$

これらの和が一定 ($\equiv 2a$ ($a > 0$)) より

$$r + \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 4cr \cos \varphi} = 2a$$

2乗して整理すると

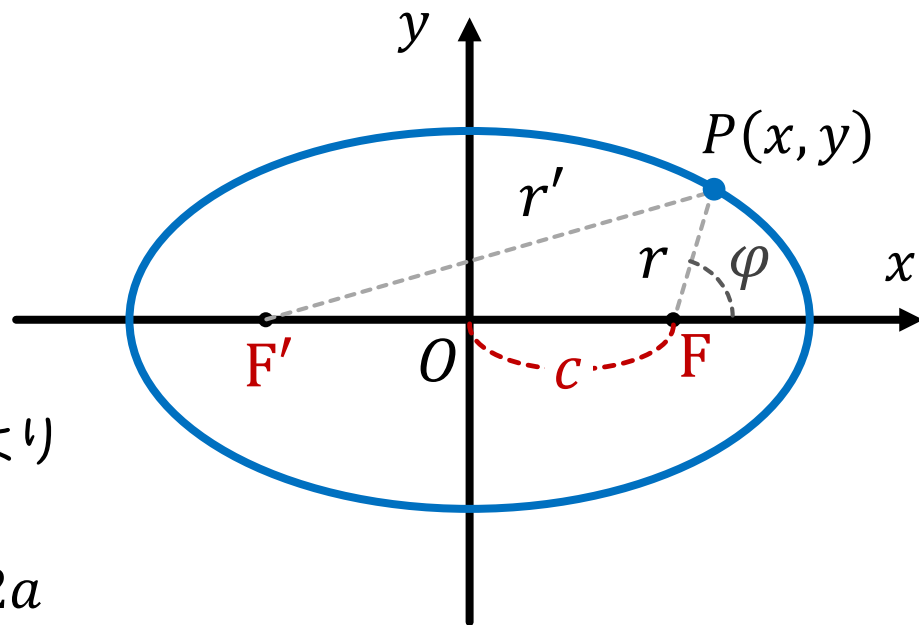
$$r(a + c \cos \varphi) = b^2$$

ここで、 $l = \frac{b^2}{a}$ とおけば、

:半直弦

$$r = \frac{l}{1 + \frac{c}{a} \cos \varphi}$$

がえられる



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a : 長軸半径
 b : 短軸半径

$$r = \frac{l}{1 + \frac{c}{a} \cos \varphi}$$

$l = \frac{b^2}{a}$: 半直弦

離心率 (eccentricity)

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

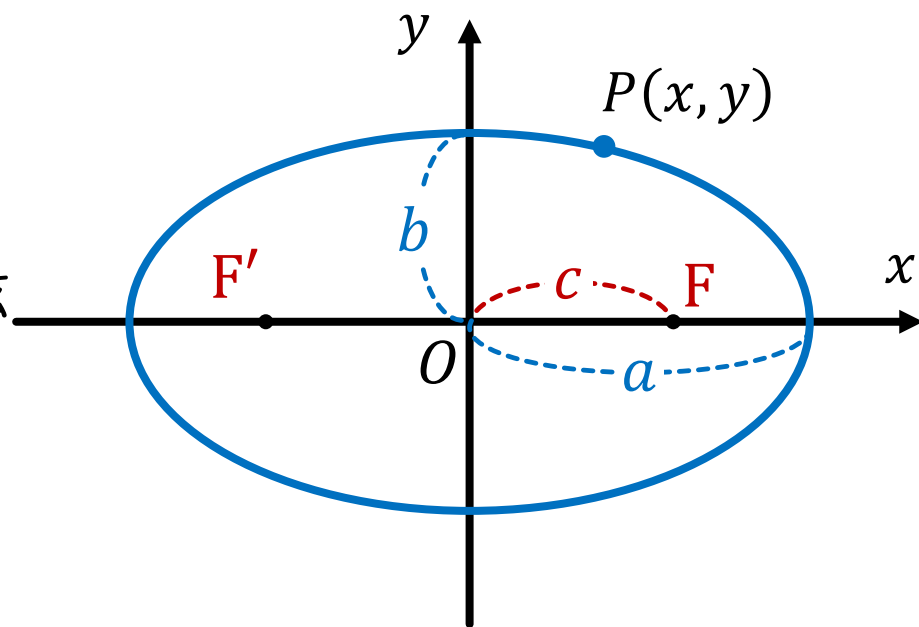
離心率を用いれば

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

と書くことができる

長軸半径、短軸半径を l と ε で表すと

$$a = \frac{l}{1 - \varepsilon^2} \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$



楕円

楕円は半径 a の円を y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍したものの

楕円上の点 $P(x, y)$ に対応する
円上の点 $Q(a, \theta)$ とすると

$$x = a \cos \theta$$

$$y = \frac{b}{a} \times a \sin \theta = b \sin \theta$$

$c = a\varepsilon$ を用いれば、

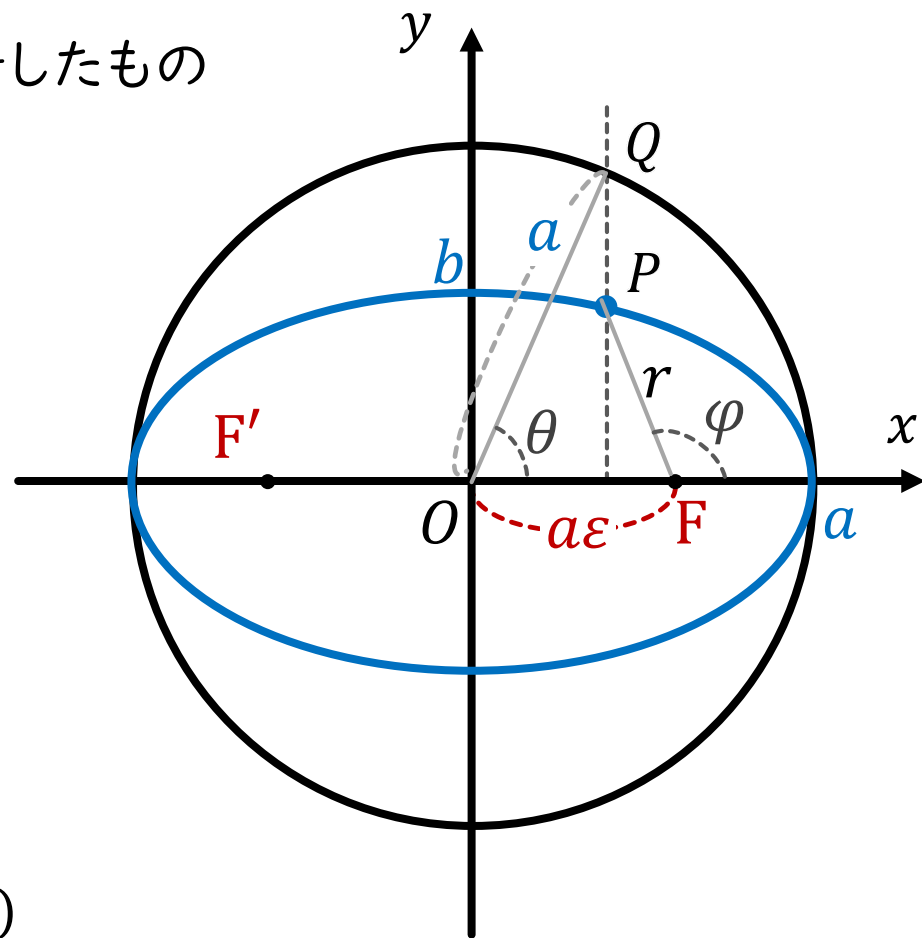
$$r^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$= (a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2$$

$$= a^2(1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta)$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \theta)$$

$$r = a - \varepsilon x$$



楕円は様々な表現がある。
これは何を元に運動の軌跡を見るかに依存する

双曲線・放物線

2焦点からの距離の差が一定の曲線を
双曲線 (Hyperbora) という。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad r = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

近日点を原点に動かした楕円

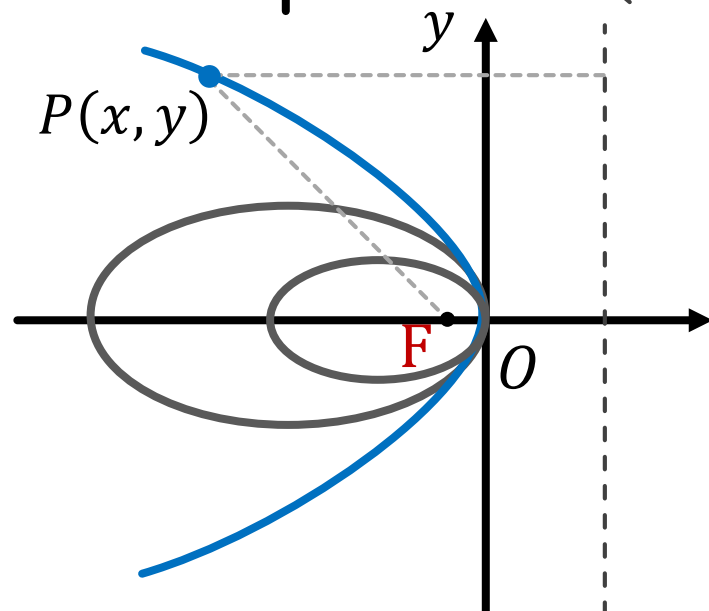
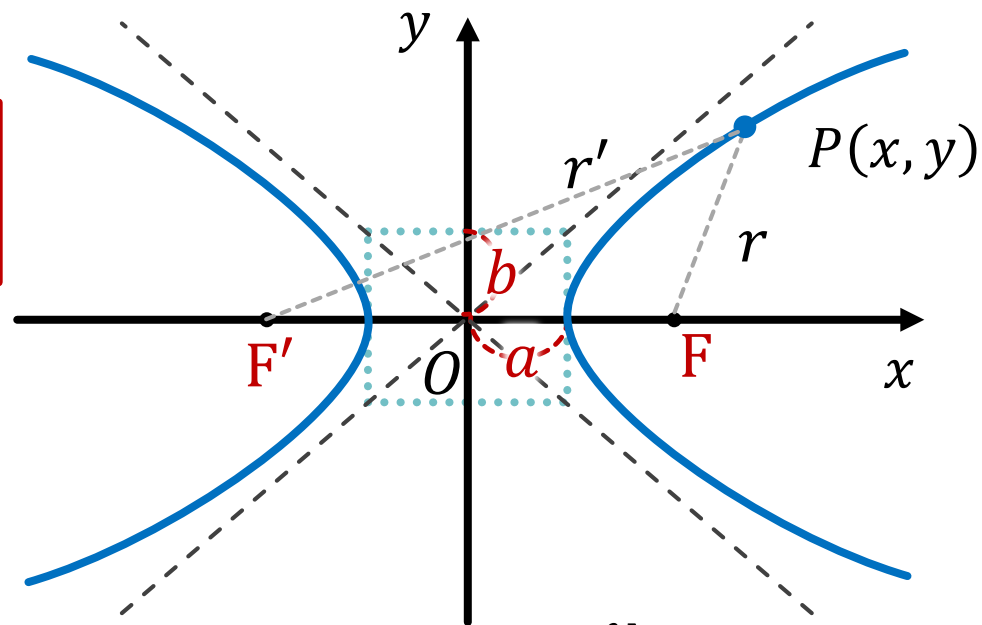
$$\frac{(x+a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

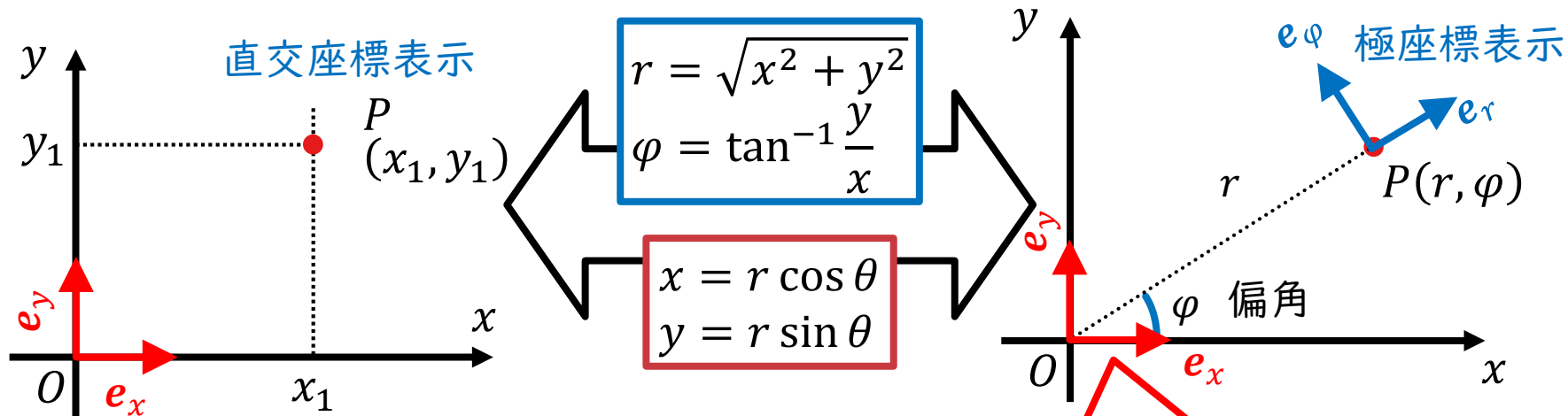
$$\frac{x^2}{a} + 2x + \frac{a}{b^2} y^2 = 1$$

$\frac{a}{b^2}$ を一定に保ったまま $a \rightarrow \infty$ とすると

$$y^2 = -2 \frac{a}{b^2} x$$

この楕円の極限として定義される曲線を
放物線 (Parabora) という。





右図より $\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad \cdots (1)$

$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad \cdots (2)$

(1) $\times \cos \varphi$

$\Leftrightarrow \cos \varphi \mathbf{e}_r = \cos^2 \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \sin \varphi \mathbf{e}_y$

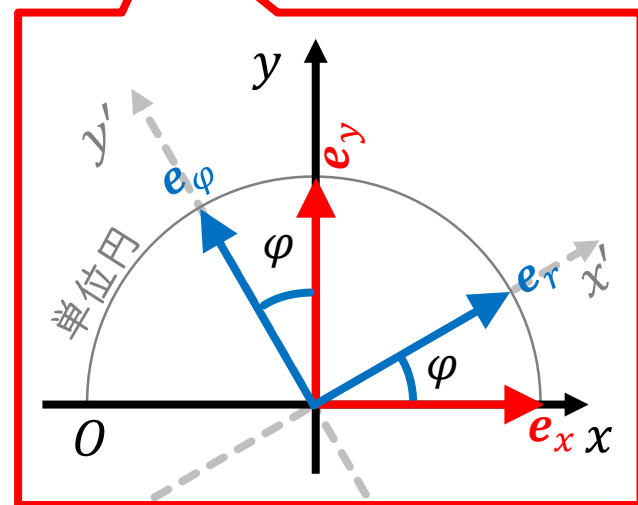
(2) $\times -\sin \varphi$

$\Leftrightarrow -\sin \varphi \mathbf{e}_\varphi = \sin^2 \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{e}_y$

+

$\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi = \cos^2 \varphi \mathbf{e}_x + \sin^2 \varphi \mathbf{e}_x$

$\therefore \mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$



極座標の単位ベクトル

右図より $\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad \cdots (1)$

$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad \cdots (2)$

(1) $\times \sin \varphi$

$$\Leftrightarrow \sin \varphi \mathbf{e}_r = \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin^2 \varphi \mathbf{e}_y$$

(2) $\times \cos \varphi$

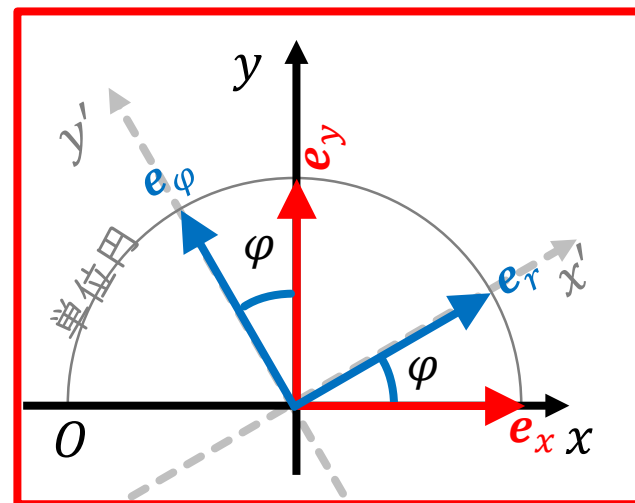
$$+ \quad \Leftrightarrow \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos^2 \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi = \sin^2 \varphi \mathbf{e}_y + \cos^2 \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\therefore \mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \end{cases}$$

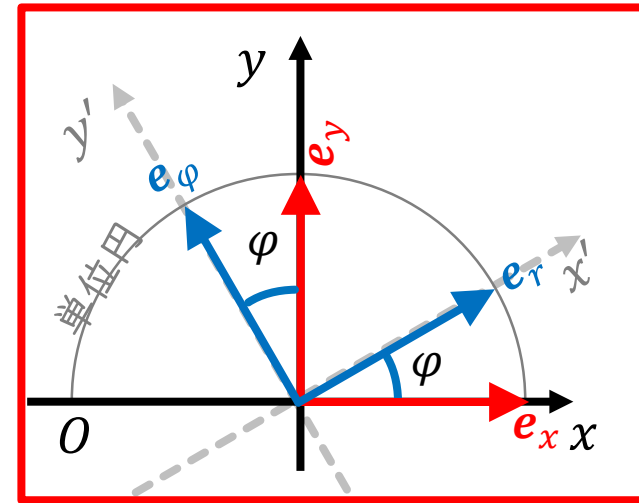
$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{cases}$$



極座標の単位ベクトルの微分

$\mathbf{e}_r$ の時間微分は

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \} \\ &= \frac{d \cos \varphi}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{d \sin \varphi}{dt} \mathbf{e}_y \quad (\because \dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = 0) \\ &= -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ &= \dot{\varphi} \{ -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$



同様に

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{d(-\sin \varphi)}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{d \cos \varphi}{dt} \mathbf{e}_y \\ &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ &= -\dot{\varphi} \{ \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \} \\ &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ の2階時間微分はそれぞれ

$$\ddot{\mathbf{e}}_r = \frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} = \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d^2 \mathbf{e}_\varphi}{dt^2} = -\ddot{\varphi} \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\varphi$$

→ (演習問題)

2次元極座標の微分

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi$$

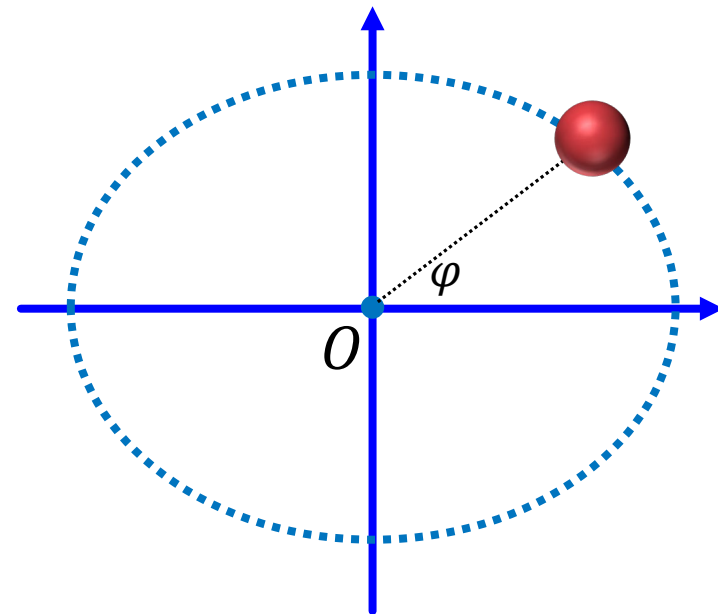
微分

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \frac{dy}{dt} = v_y = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

微分

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= a_x \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - \dot{r} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - \dot{r} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} - r \sin \varphi \ddot{\varphi} \\ &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= a_y \\ &= \ddot{r} \sin \varphi + \dot{r} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{r} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + r \cos \varphi \ddot{\varphi} \\ &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi \cdots (4) \end{aligned}$$

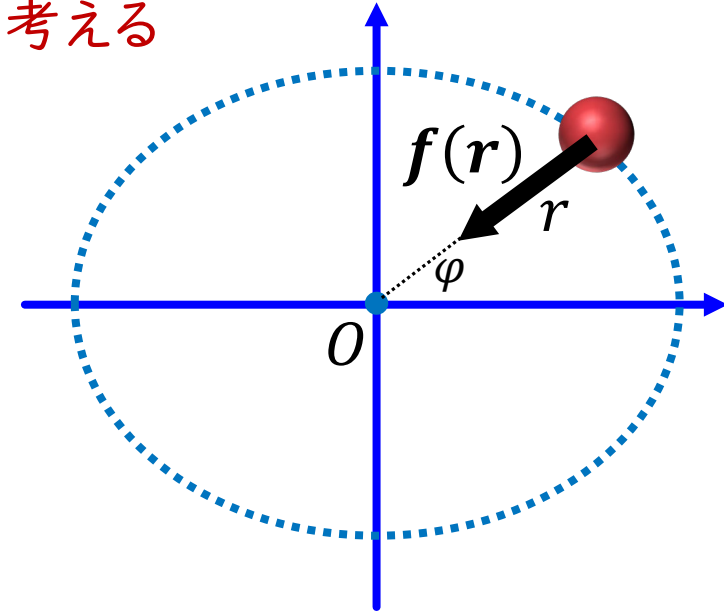


中心力

動径方向が一定でない一般的な回転運動を考える

動径方向にはたらく中心力の大きさを $f(r)$ とすると、

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = f_x = f(r) \cos \varphi \\ m \frac{dv_y}{dt} = f_y = f(r) \sin \varphi \end{cases}$$



$$m \frac{dv_x}{dt} \cos \varphi = f(r) \cos^2 \varphi$$

$$m \frac{dv_x}{dt} \sin \varphi = f(r) \cos \varphi \sin \varphi$$

$$+ \quad m \frac{dv_y}{dt} \sin \varphi = f(r) \sin^2 \varphi$$

$$- \quad m \frac{dv_y}{dt} \cos \varphi = f(r) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$m \left(\frac{dv_x}{dt} \cos \varphi + \frac{dv_y}{dt} \sin \varphi \right) = f(r)$$

$$m \left(\frac{dv_x}{dt} \sin \varphi - \frac{dv_y}{dt} \cos \varphi \right) = 0$$

中心力

$$m \left(\frac{dv_x}{dt} \cos \varphi + \frac{dv_y}{dt} \sin \varphi \right) = f(r) \quad (3), (4)より$$

$$\cos \varphi \cdot \frac{dv_x}{dt} = \cos \varphi \{ \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi \}$$

$$+ \sin \varphi \cdot \frac{dv_y}{dt} = \sin \varphi \{ \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi \}$$

$$\frac{dv_x}{dt} \cos \varphi + \frac{dv_y}{dt} \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$\rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$$

$$m \left(\frac{dv_x}{dt} \sin \varphi - \frac{dv_y}{dt} \cos \varphi \right) = 0 \quad (3), (4)より$$

$$\sin \varphi \cdot \frac{dv_x}{dt} = \sin \varphi \{ \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi \}$$

$$- \cos \varphi \cdot \frac{dv_y}{dt} = \cos \varphi \{ \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi \}$$

$$\frac{dv_x}{dt} \sin \varphi + \frac{dv_y}{dt} \cos \varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

$$\rightarrow m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$$

方位角方向の運動方程式

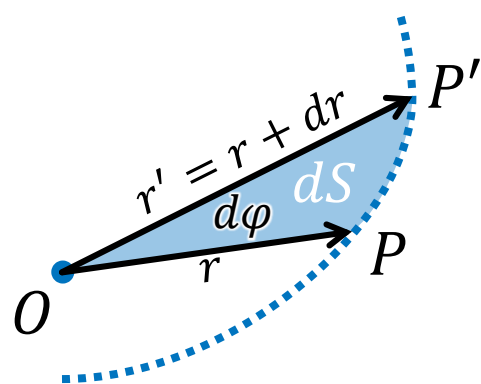
$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \quad : \text{方位角方向の運動方程式}$$

ここで $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 2r \times \dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = r \underbrace{(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})}_{=0}$ であるから

$$\therefore \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$$

$$r^2\dot{\phi} = h \text{ (定数)}$$

積分



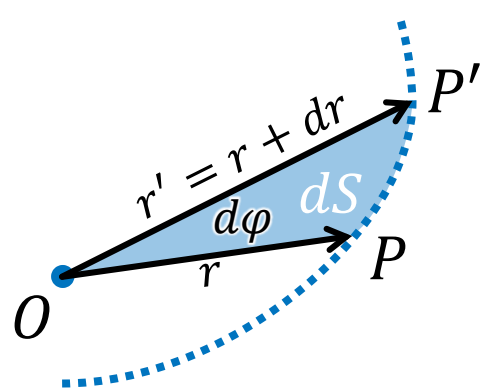
$d\phi$ が十分小さいとき微小面積 $POP'(dS)$ は

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2}(r + dr)r d\phi \\ &= \frac{1}{2}r^2 d\phi + \frac{1}{2}r dr d\phi \end{aligned}$$

$d\phi, dr$ が十分小さいとき ≈ 0

$$\therefore dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi$$

方位角方向の運動方程式



$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

微小時間 dt あたりの変化と考えると

$$\underline{\underline{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h}}}$$

動径が一定時間に掃過する面積
= 面積速度

一定

面積速度一定の定理

1つの質点が固定点から中心力の作用を受けて運動するとき、力の中心の周りの面積速度は一定である。

これは角運動量保存則に等しい。

また、面積速度はベクトルで考えると外積にあたる
(いずれも後の講義で扱う)

動径方向の運動方程式

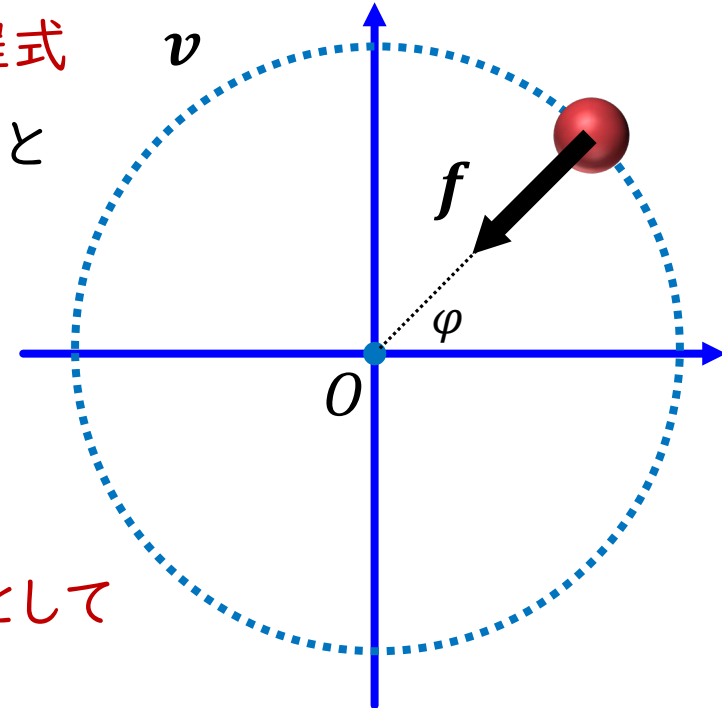
$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$: 動径方向の運動方程式

方位角方向の運動方程式 $r^2\dot{\varphi} = h$ を用いると

$$m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = f(r)$$

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

これを解けば、 r を時間の関数として
求めることができる(次回)



$r = r_0$ で一定のとき(円運動のとき)、

$$\ddot{r} = 0 \quad r^2\dot{\varphi} = h \Rightarrow r_0 v_0 = h \quad \text{となるので}$$

$$f(r) = -\frac{mh^2}{r_0^3} = -\frac{mv_0^2}{r_0} \rightarrow \text{遠心力}$$

運動エネルギー

運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$ を極座標で表すと

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

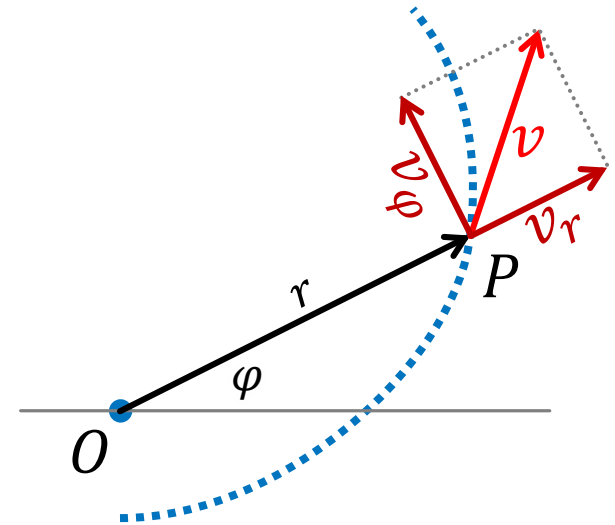
$$= \frac{1}{2}m\{(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \text{ であるから}$$

$$K = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ v_y &= \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$



ポテンシャルエネルギー

中心力 $f(x, y) = -\nabla U(x, y)$ の x 成分 F_x を極座標で示す

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U(r)}{\partial x} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{x}{r} \\ &= -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{r} \end{aligned}$$

$f_x = f(r) \cos \varphi$ であることに注意すると

$$f(r) \cos \varphi = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \cos \varphi$$

$$f(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

中心力のポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）は r のみの関数 $-U(r)$ を r で微分すると中心力が求められる

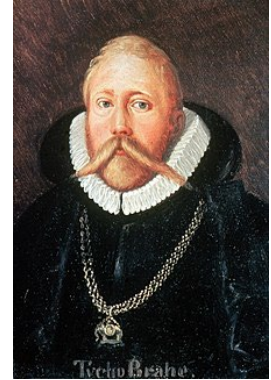
ケプラーの法則

観測→法則



Johannes Kepler (1571-1630)

16世紀にティコ・ブラーエ（デンマーク）が天体を観測した記録からケプラー（ドイツ）は1610年に惑星の運動についてのケプラーの法則を発見した。

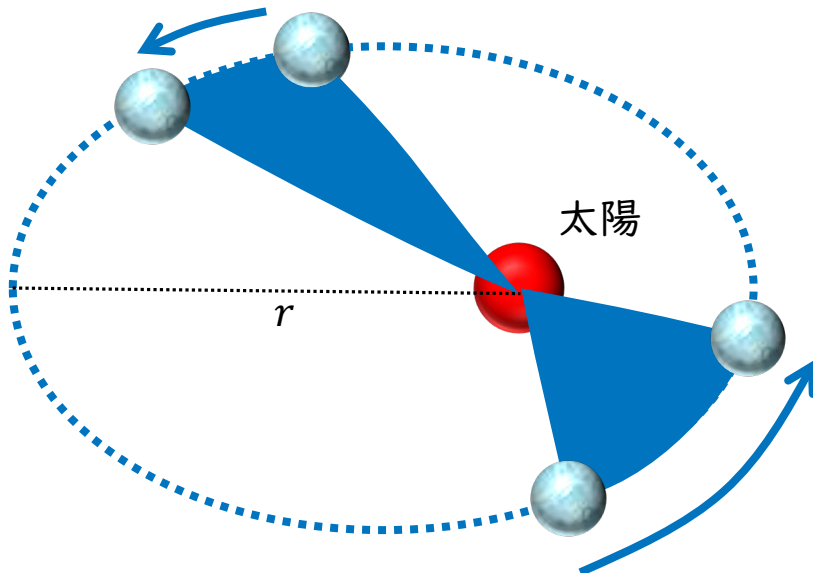


Tycho Brahe (1546-1601)

第1法則 惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描く

第2法則 太陽と惑星を結ぶ動径が一定時間に掃過する面積は一定である。

第3法則 惑星の公転周期の2乗は楕円軌道の長半径の3乗に比例する



Planet	Major radius r [au]	Period T [yr]	T^2/r^3
Mercury	0.3871	0.24085	1.000055
Venus	0.7233	0.61520	1.000178
Earth	1.0000	1.00002	1.000020
Mars	1.5237	1.88085	1.000023
Jupiter	5.2026	11.8620	0.999205
Saturn	9.5549	29.4572	0.994728
Uranus	19.2184	84.0205	0.994532
Neptune	30.1104	164.7701	0.994506

月にはたらく地球の万有引力

月の質量を m 、地球の表面での重力が g [N] であるとする、月にはたらく地球の引力は、

$$f = \frac{mg}{60^2}$$

月が角速度を ω で回っているとき、月を軌道上に留める向心力がこの引力と等しい。

$$f = mR\omega^2 = \frac{mg}{60^2} \quad \therefore \omega^2 = \frac{g}{60^2 R}$$

よって月の公転周期は、

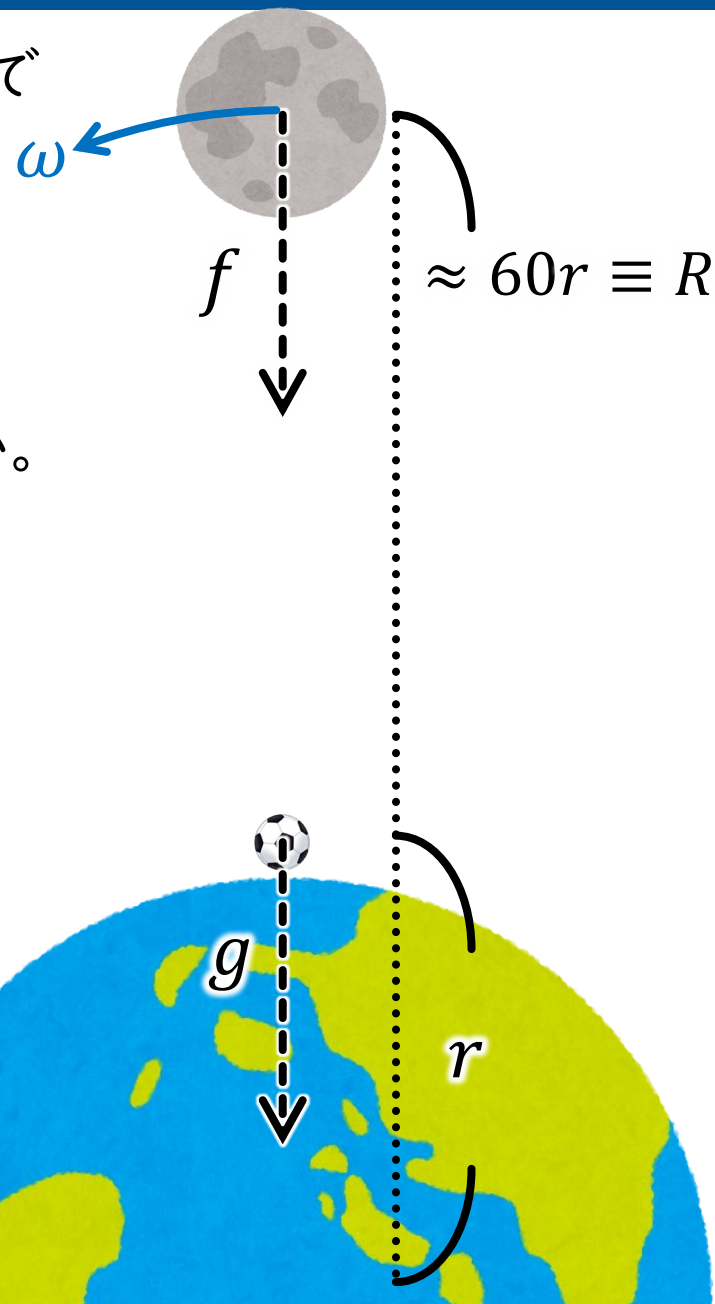
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 120\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$R = 3.84 \times 10^8$ [m]、 $g = 9.8$ [m/s²] を代入すると、

$$T = 2.36 \times 10^6$$
 [s] = 27.31 [day]

となる。

(実際には地球自身の公転により+2 day)



ケプラーの法則から太陽の引力を導出する

楕円軌道の式 $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ より $\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$

時間微分すると

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{r} \right) = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} \left(\frac{l}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{l}{r} \right) \frac{dr}{dt} = -\frac{l}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{l}{r^2} \dot{r}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{d}{dt} (1 + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{d}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \\ &= \frac{d}{d\varphi} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon \sin \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{l}{r^2} \dot{r} = \varepsilon \sin \varphi \dot{\varphi}$$

面積速度の式 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h$ をもちいて書き直すと

$$\frac{l}{r^2} \dot{r} = \varepsilon \sin \varphi \frac{h}{r^2} \quad \therefore \dot{r} = \frac{h}{l} \varepsilon \sin \varphi$$

ケプラーの法則から太陽の引力を導出する

$$\dot{r} = \frac{h}{l} \varepsilon \sin \varphi$$

さらに時間微分すると

$$\ddot{r} = \frac{h}{l} \varepsilon \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{h^2}{l} \frac{\varepsilon \cos \varphi}{r^2}$$

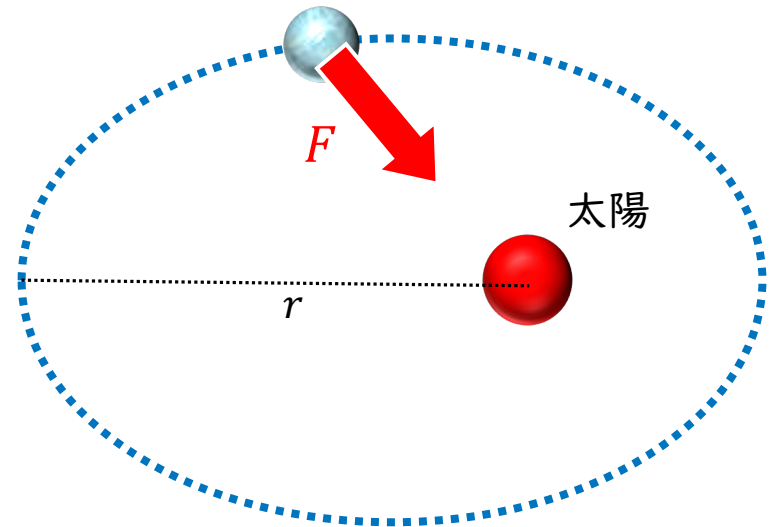
軌道の式 $\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$ を用いれば

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{lr^2}$$

動径方向の運動方程式

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

に代入すると



$$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$$

ケプラーの第1法則(楕円軌道)と第2法則(面積速度一定)にしたがう惑星は
太陽からの距離 r の -2 乗に比例する引力を受けていることがわかる

ケプラーの法則から太陽の引力を導出する

第3法則について

惑星の周期 T は、軌道1周分の面積を

面積速度 $\frac{1}{2}h$ で割れば求まる

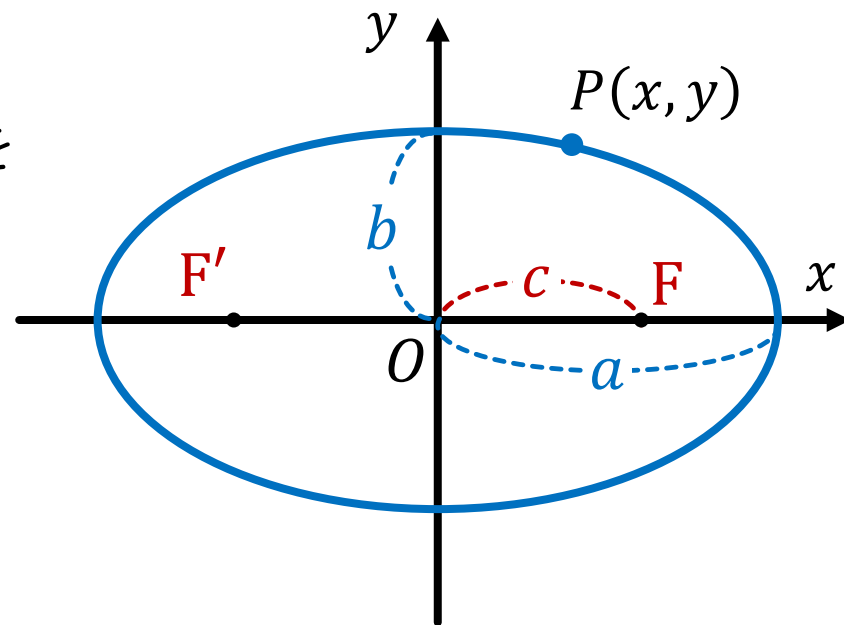
$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h}$$

半直弦 $l = \frac{b^2}{a}$ より $b = \sqrt{al}$ であるから

$$T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{h} a^{\frac{3}{2}}$$

よって

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 l}{h^2} = C(\text{const})$$



以上より

$$f(r) = -\frac{4\pi^2 m}{C} \frac{1}{r^2}$$

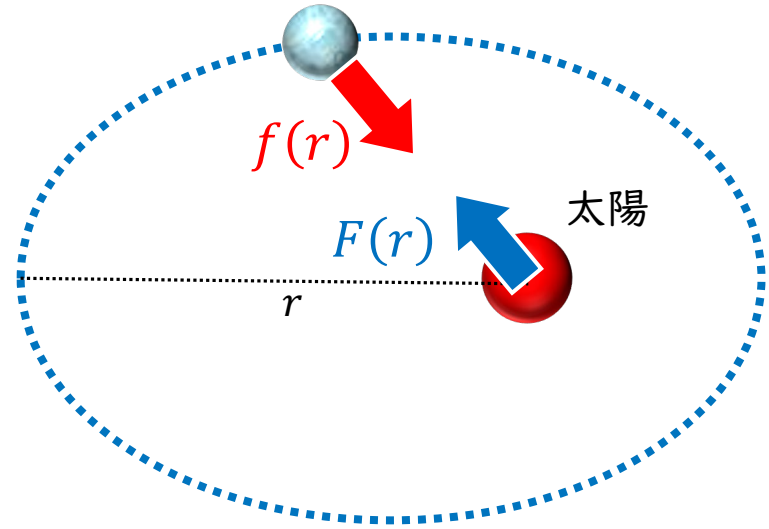
となり、惑星の軌道の大きさや面積速度によらず、惑星の質量 m に比例し、距離 r の -2 乗に比例することがわかる

ケプラーの法則から太陽の引力を導出する

太陽が惑星を引く力

$$f(r) = -\frac{4\pi^2 m}{C r^2}$$

作用反作用の法則により惑星も太陽を引く
この力は太陽の質量 M にも比例すると
考えられるので、 G を比例定数として



Isaac Newton (1643-1727)

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

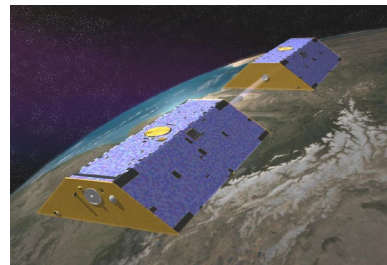
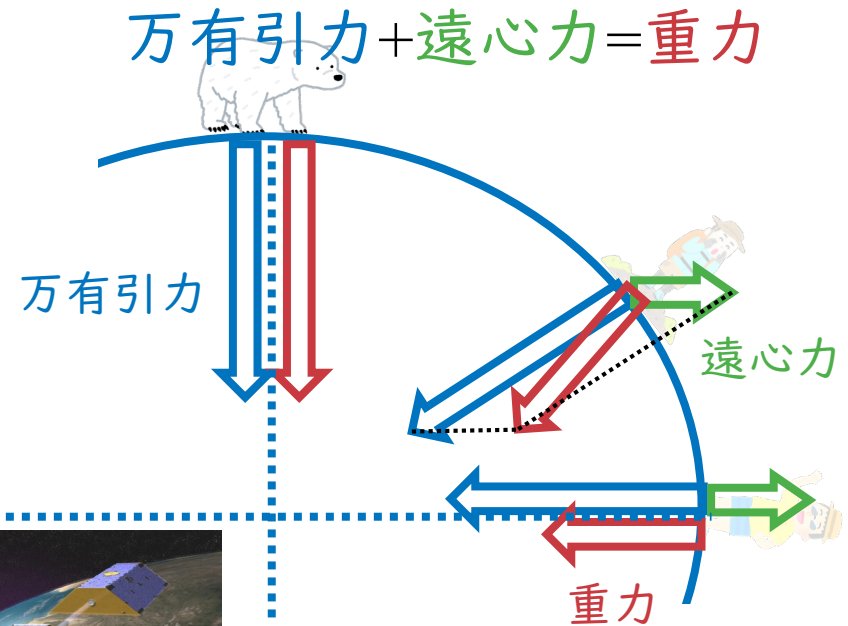
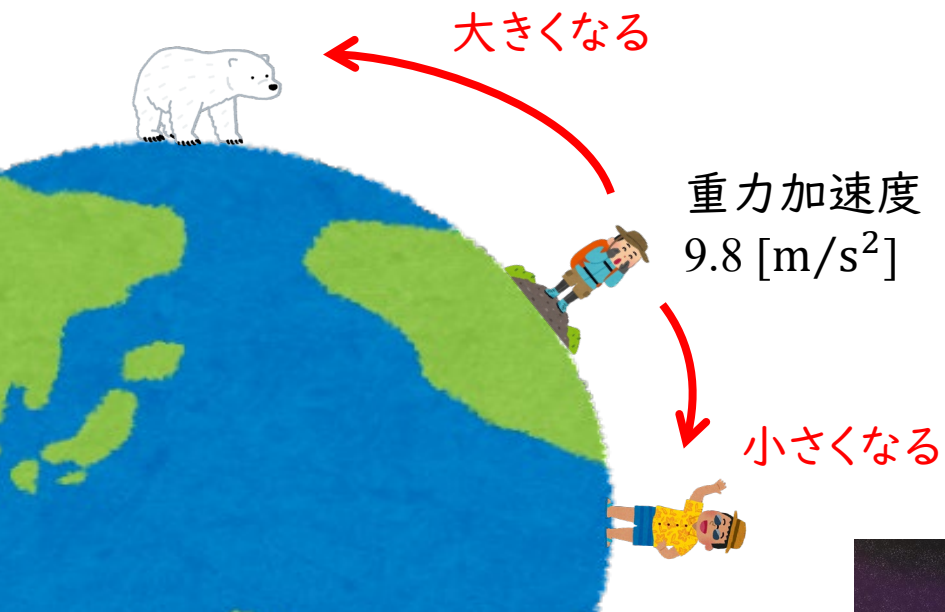
:万有引力 (universal gravitation)

$G = 6.673 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2]$: 万有引力定数

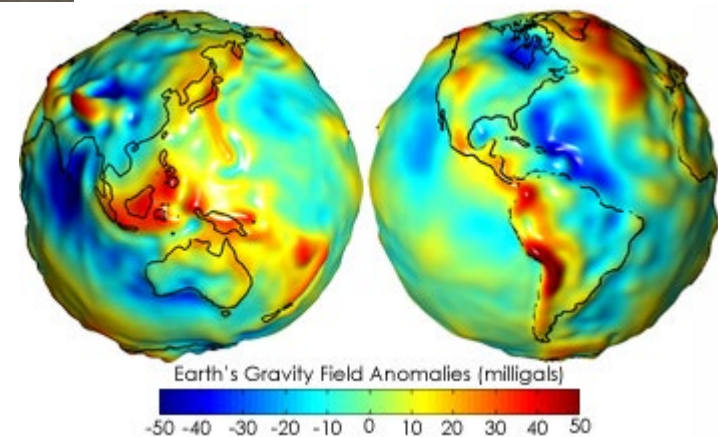
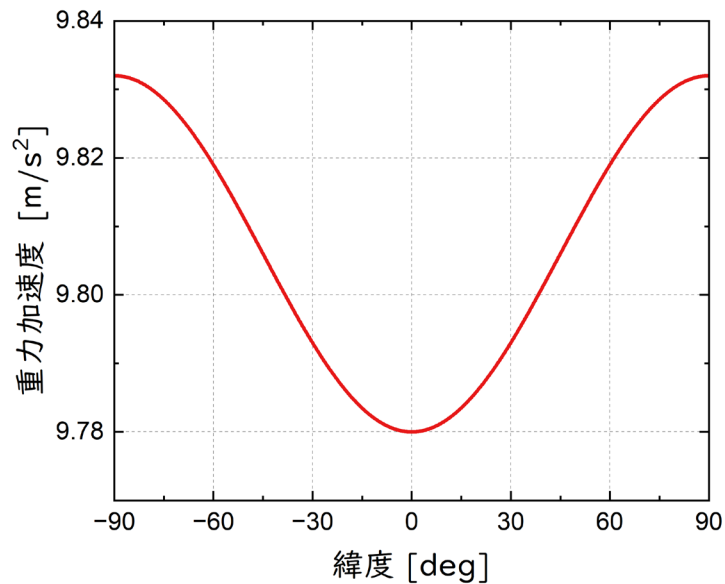
$\frac{4\pi^2}{C} = GM \rightarrow$ 実験的に C がわかれば、
 M などを求めることができる

$f(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$ より $U(r) = -G \frac{Mm}{r}$: 万有引力のポテンシャル

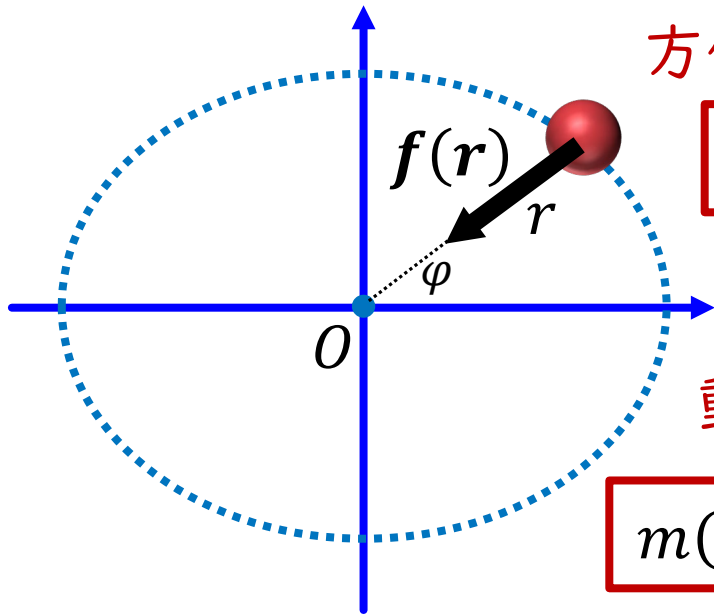
重力加速度



重力観測衛星
GRACE



【本日のポイント】



方位角方向の運動方程式

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}h$$

: 面積速度一定

動径方向の運動方程式

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r) \rightarrow m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

ケプラーの法則

1. 楕円軌道
2. 面積速度一定
3. 周期の2乗は
半径の3乗に比例

$$f(r) = -\frac{mh^2}{lr^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 l}{h^2} = C(\text{const})$$

$$f(r) = -\frac{4\pi^2 m}{C} \frac{1}{r^2} = -G \frac{Mm}{r^2}$$