

力学 I

(第5回) 運動とエネルギー (3)

【今日の内容】

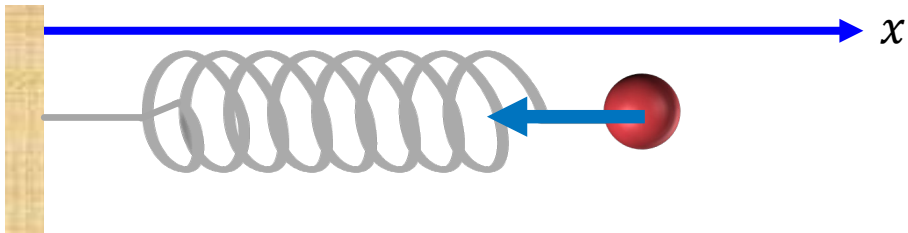
線積分

2次元、3次元の運動

- 放物運動、円運動
- 仕事とエネルギー

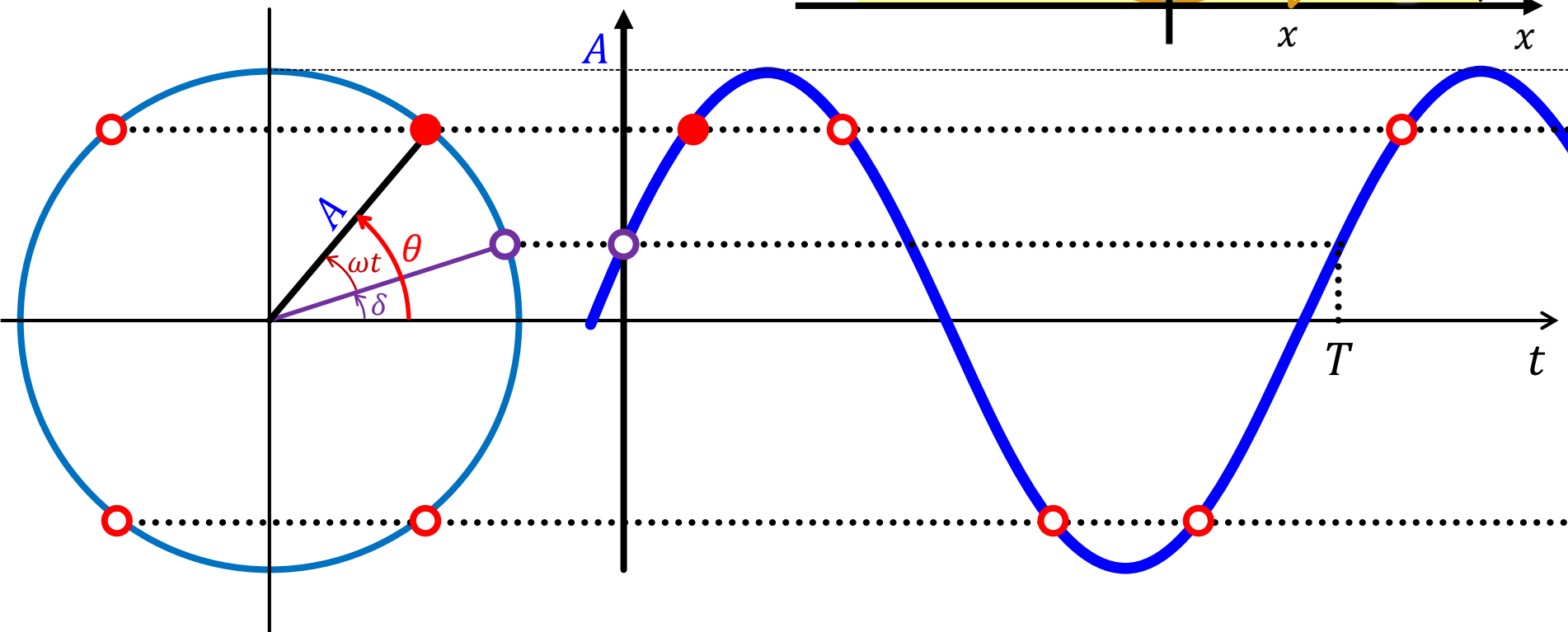
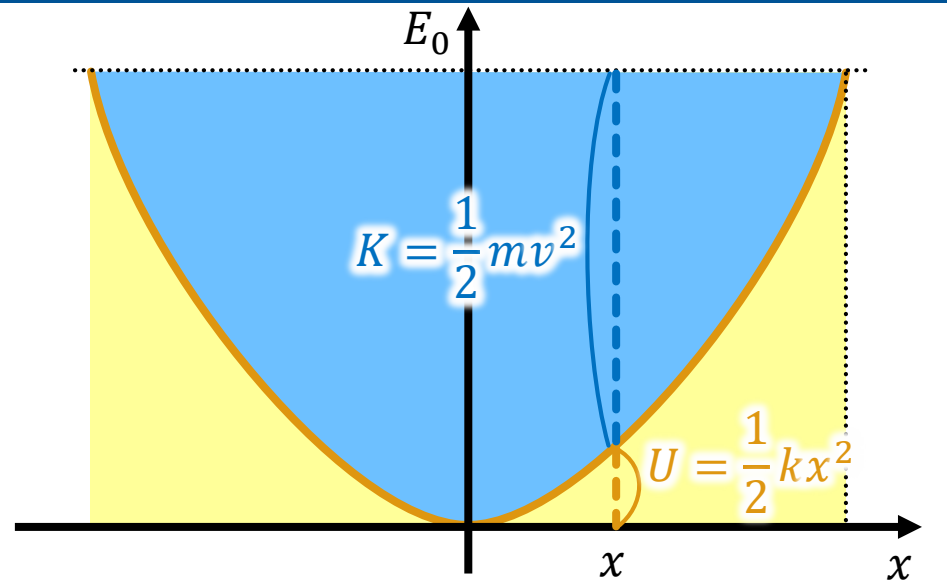
【前回の復習】

2



$$\Rightarrow E = K + U = \text{const}$$

:力学的エネルギー保存の法則
(law of conservation of energy)



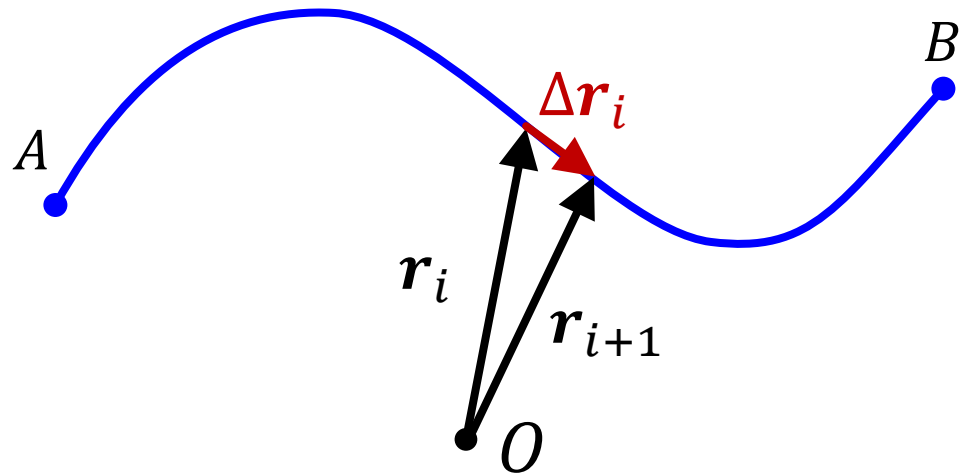
線積分

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$$

で表される曲線 C 上の各点で
定義されるスカラー量 f の
経路に沿った積分を線積分
(line integral) という

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\Delta \mathbf{r}_i) |\Delta \mathbf{r}_i| \equiv \int_C f(x(t), y(t), z(t)) dt$$

$$\int_{AB} f dt \text{ や } \int_{\widehat{AB}} f dt \text{ とも書く。}$$



線積分の例: $f = 1$ とすれば

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\Delta \mathbf{r}_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta l_i \quad \text{経路の長さに相当する}$$

線積分

ベクトル量 $\mathbf{A}$ の経路に沿った線積分は

$$\int_C \mathbf{A}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds$$

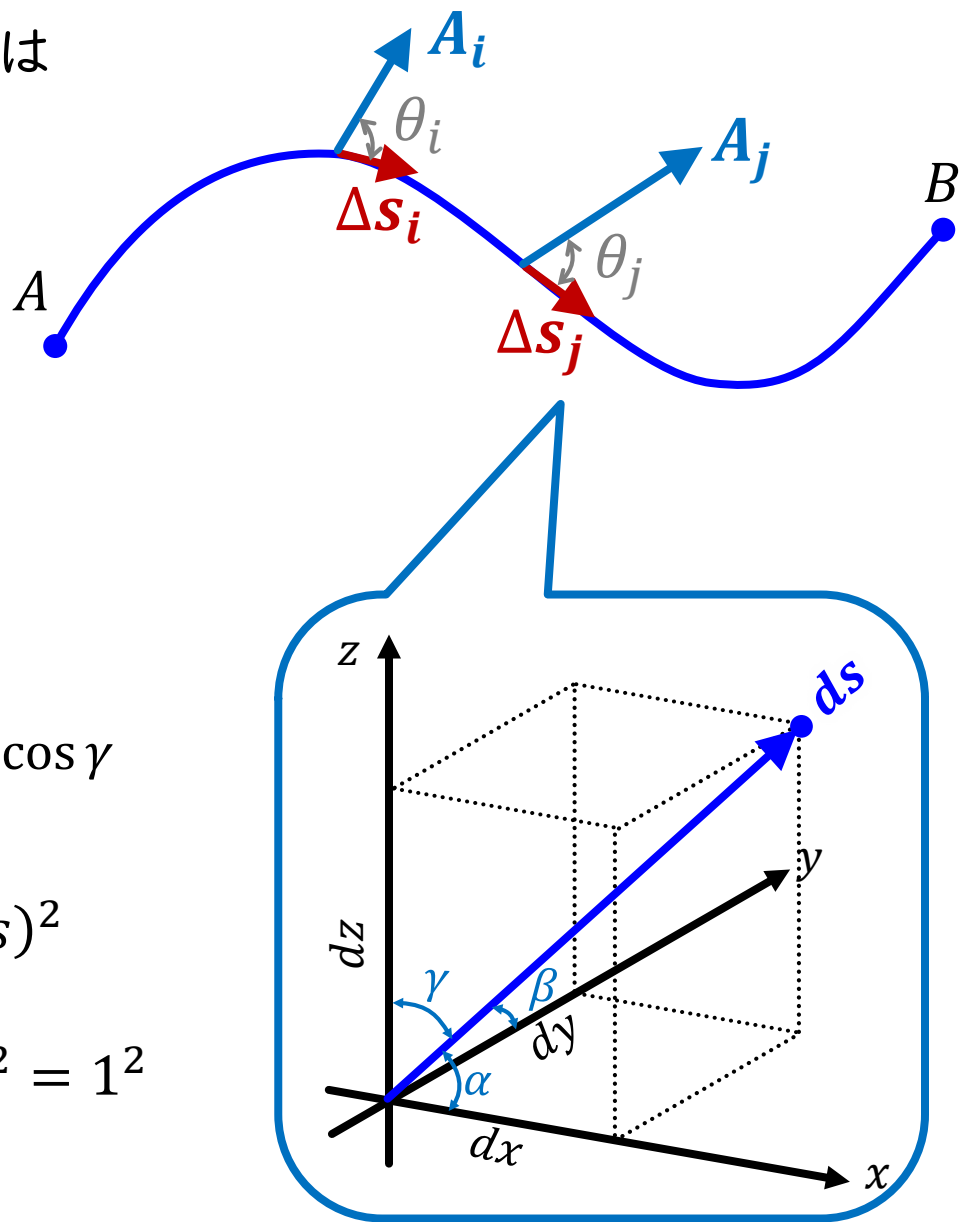
$$= \int_C \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

方向余弦:

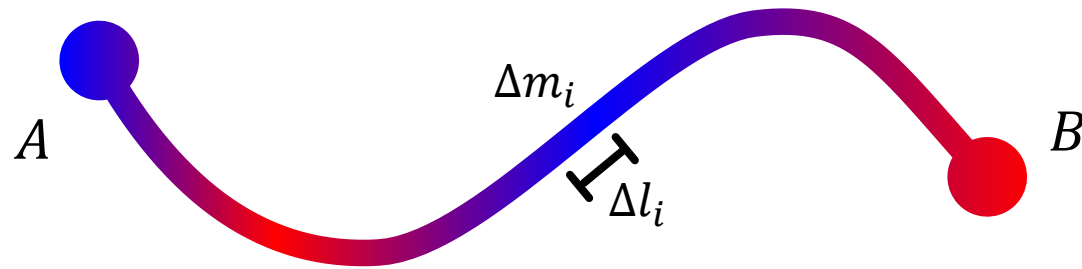
$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$$

$$(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1^2$$



線積分の例



微小領域 Δl_i における質量を Δm_i とすると 線密度 $\lambda_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i}$

曲線 l 上での点 $\mathbf{r}$ での線密度は $\lambda(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\mathbf{r})}{\Delta l}$

この紐の質量は、
$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta l_i = \int_A^B \lambda(\mathbf{r}) dl$$

例題1 線積分

$$C: y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

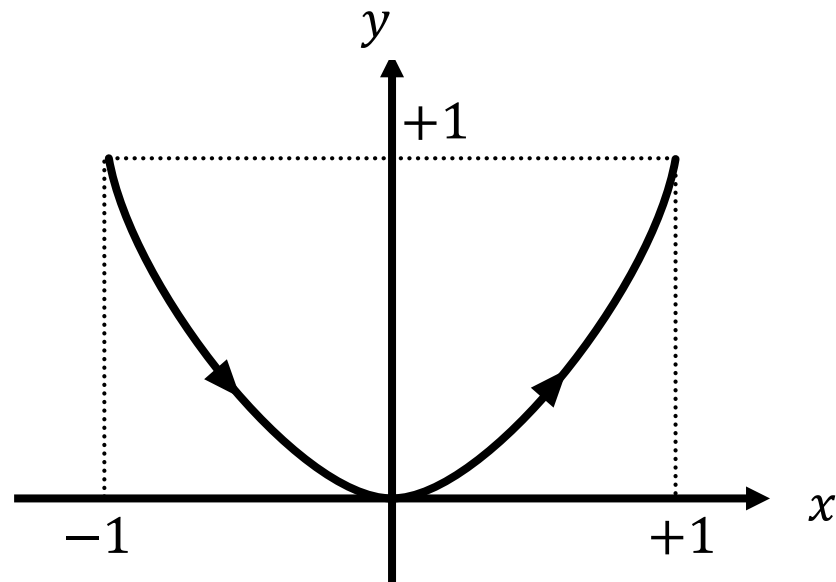
とする。 C に沿ったベクトル場

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

の線積分を求めよ。

$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ であるから線積分は

$$\int_C \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{r} = \int_C \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_C (x^2 dx + 2xy dy)$$



ここで媒介変数 t を用いると

$$x = t, \quad y = t^2$$

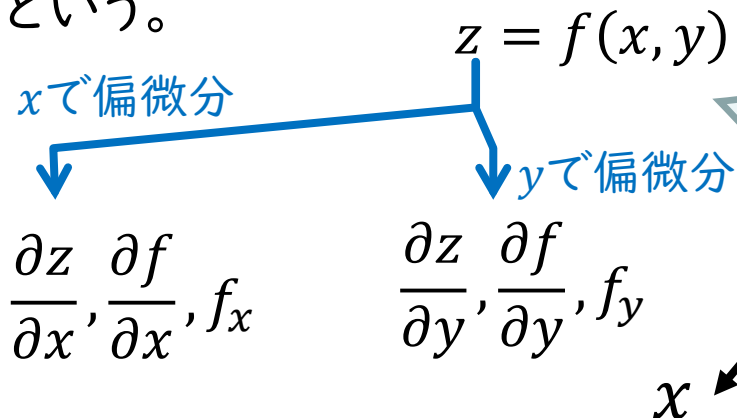
$$dx = dt, \quad dy = 2t dt$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{r} &= \int_{-1}^1 (t^2 dt + 4t^4 dt) \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{4}{5} t^5 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{34}{15}}} \end{aligned}$$

偏微分 (詳しくは後期の微分積分IIで)

多変数関数において特定の1つの変数にのみに関する微分を偏微分 (partial differentiation) という。



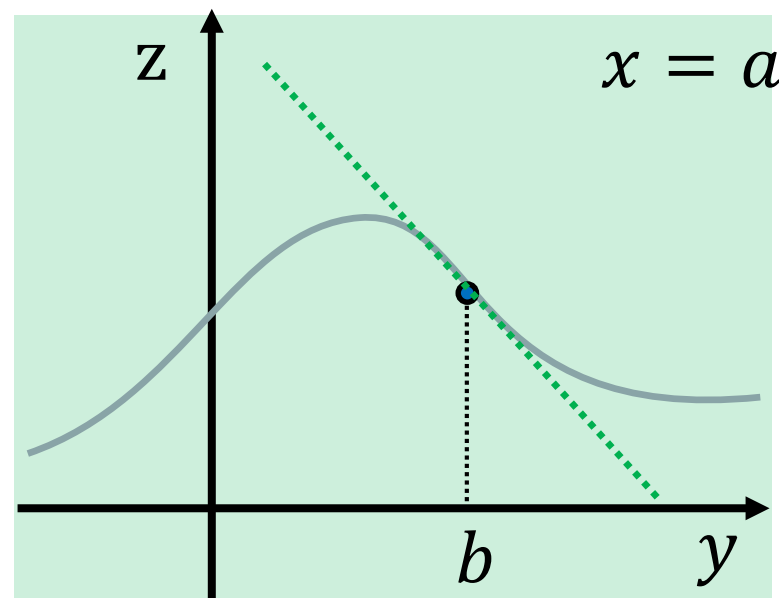
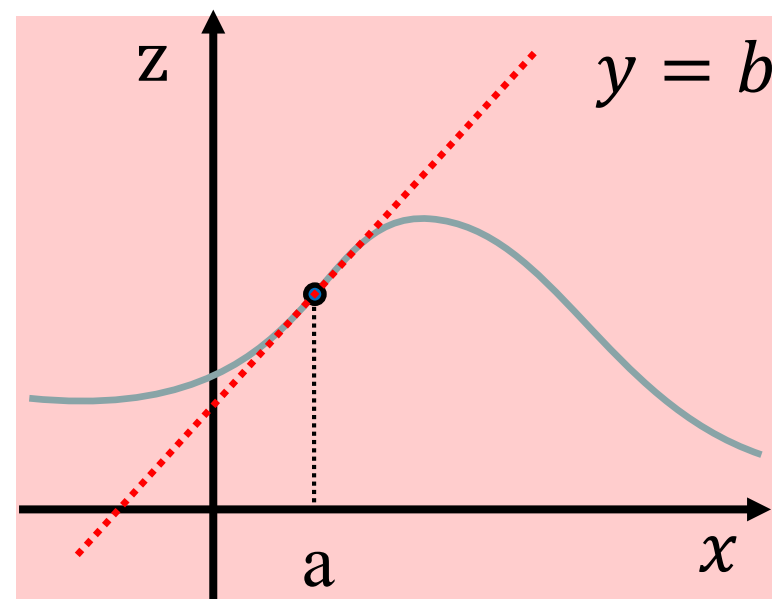
$$z = 2x^2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{2x^2y\} \quad \text{定数扱い}$$

$$= 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{2x^2y\} \quad \text{定数扱い}$$

$$= 2x^2$$



例題2 偏微分の計算

(1) $U(x, y) = x^2y + xy^2$ のとき、 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ を求めよ。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \overset{\text{定数扱い}}{x^2} \overset{\text{定数扱い}}{y} + \overset{\text{定数扱い}}{x} \overset{\text{定数扱い}}{y^2} \} = y \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + y^2 \frac{\partial}{\partial x} (x) = y(2x) + y^2(1) = \underline{2xy + y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ \overset{\text{定数扱い}}{x^2} \overset{\text{定数扱い}}{y} + \overset{\text{定数扱い}}{x} \overset{\text{定数扱い}}{y^2} \} = x^2 \frac{\partial}{\partial y} (y) + x \frac{\partial}{\partial y} (y^2) = x^2(1) + x(2y) = \underline{x^2 + 2xy}$$

(2) $U(x, y, z) = 2xy + y^2z^2$ のとき、 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ を求めよ。

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \overset{\text{定数扱い}}{2} \overset{\text{定数扱い}}{x} y + y^2 \overset{\text{定数扱い}}{z^2} \} = \underline{2y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ \overset{\text{定数扱い}}{2} \overset{\text{定数扱い}}{y} x + \overset{\text{定数扱い}}{y^2} \overset{\text{定数扱い}}{z^2} \} = \underline{2x + 2yz^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{ \overset{\text{定数扱い}}{2} \overset{\text{定数扱い}}{y} x + \overset{\text{定数扱い}}{y^2} \overset{\text{定数扱い}}{z^2} \} = \underline{2y^2z}$$

2次元、3次元の運動

2次元、3次元の運動方程式

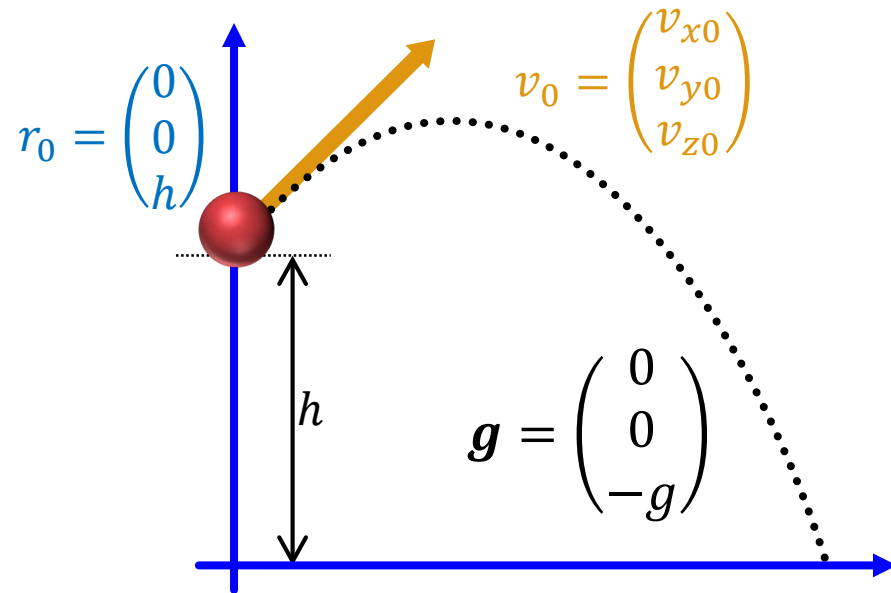
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = m \mathbf{g} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

積分



$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix}$$

初期条件より

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ -gt + v_{z0} \end{pmatrix}$$

2次元、3次元の運動

2次元、3次元の運動方程式

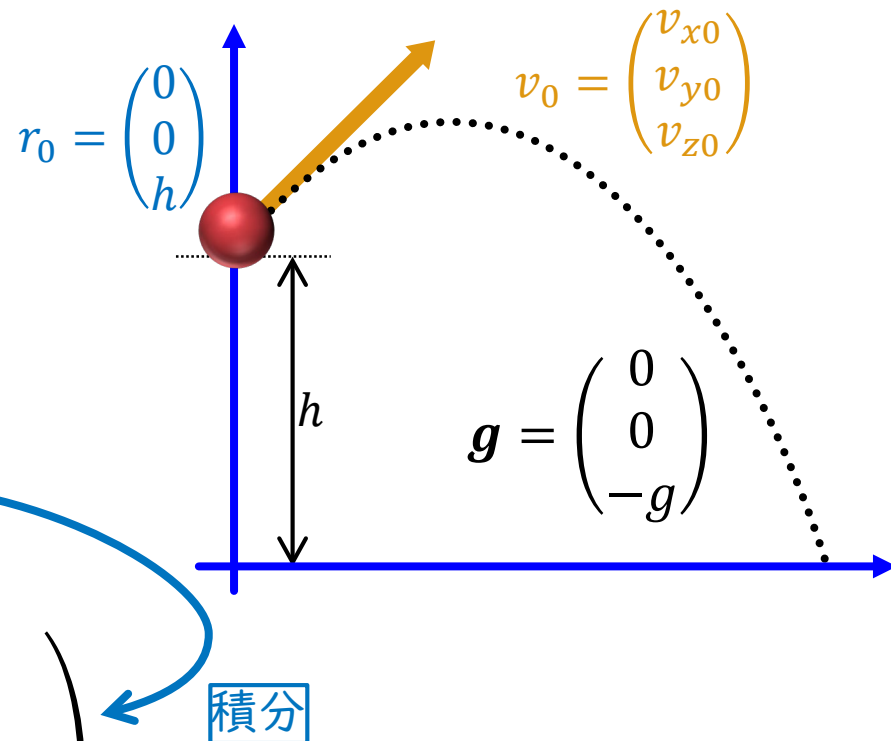
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$$

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ -gt + v_{z0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0}t + C_4 \\ v_{y0}t + C_5 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + C_6 \end{pmatrix}$$

初期条件より

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0}t \\ v_{y0}t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + h \end{pmatrix}$$



速度に比例する抵抗がある放物運動

重力加速度 $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ において速度に比例した抵抗 ($-m\gamma\mathbf{v}$) をうけるとき

原点から、初速度 $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ 0 \\ v_{z0} \end{pmatrix}$ で射出したときの運動を求めよ。

運動方程式 $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - m\gamma\mathbf{v}$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - m\gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

x, y と z を分けて解く

速度に比例する抵抗がある放物運動

$$\boxed{x, y} \quad \frac{dv_{xy}(t)}{dt} = -\gamma v_{xy}(t)$$

$$\frac{dv_{xy}(t)}{v_{xy}(t)} = -\gamma dt$$

$$\int \frac{1}{v_{xy}(t)} dv = - \int \gamma dt$$

$$\log|v_{xy}(t)| = -\gamma t + C_1$$

$$v_{xy}(t) = C_{xy} e^{-\gamma t}$$

初期条件より

$$v_x(0) = C_x = v_{x0}$$

$$v_y(0) = C_y = 0$$

$$\therefore \begin{cases} v_x(t) = v_{x0} e^{-\gamma t} \\ v_y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z} \quad \frac{dv_z(t)}{dt} = -\gamma v_z(t) - g$$

$$\frac{dv}{\gamma v_z(t) + g} = -dt$$

$$\int \frac{1}{\gamma v_z(t) + g} dv = - \int 1 dt$$

$$\frac{1}{\gamma} \log|\gamma v_z(t) + g| = -t + C_2$$

$$\log|\gamma v_z(t) + g| = -\gamma t + \gamma C_2$$

$$v_z(t) = \frac{1}{\gamma} (C_3 e^{-\gamma t} - g)$$

初期条件より $v_z(0) = \frac{1}{\gamma} (C_3 - g) = v_{z0}$

$$\therefore v_z(t) = -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0} \right) e^{-\gamma t}$$

速度に比例する抵抗がある放物運動

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0}e^{-\gamma t} \\ 0 \\ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)e^{-\gamma t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{積分}} \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

x, y

$$x(t) = \int v_{x0}e^{-\gamma t} dt$$

$$= -\frac{v_{x0}}{\gamma}e^{-\gamma t} + C_4$$

初期条件より

$$x(0) = -\frac{v_{x0}}{\gamma} + C_4 = 0$$

$$\therefore x(t) = \frac{v_{x0}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

$$y(t) = 0$$

z

$$z(t) = \int \left\{ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)e^{-\gamma t} \right\} dt$$

$$= -\frac{g}{\gamma}t - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)e^{-\gamma t} + C_5$$

初期条件より

$$z(0) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right) + C_5 = 0$$

$$\therefore z(t) = -\frac{g}{\gamma}t - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)(e^{-\gamma t} - 1)$$

速度に比例する抵抗がある放物運動

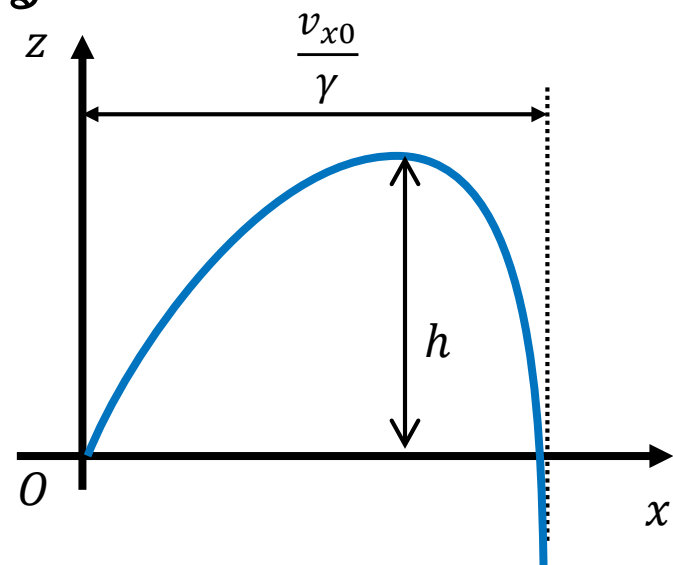
$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0}e^{-\gamma t} \\ 0 \\ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_{x0}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \\ 0 \\ -\frac{g}{\gamma}t - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0}\right)(e^{-\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

$t \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{\gamma} \end{pmatrix} \text{ となり } \begin{array}{l} x \text{ 方向の速度は } 0 \text{ になり} \\ z \text{ 方向の終端速度に達する} \end{array}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{v_{x0}}{\gamma} \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \text{ となり } \begin{array}{l} x \text{ 方向には最大で} \\ \frac{v_{x0}}{\gamma} \text{ までしか進まない。} \end{array}$$



等速円運動

円周上を一定の速さで運動する質点にはたらく力を考える

質点の位置を極座標で表すと

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad x^2 + y^2 = r^2$$

角度の時間変化 $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ を角速度といい、
 ω が一定なので (Angular velocity)

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \varphi_0: \text{初期位相}$$

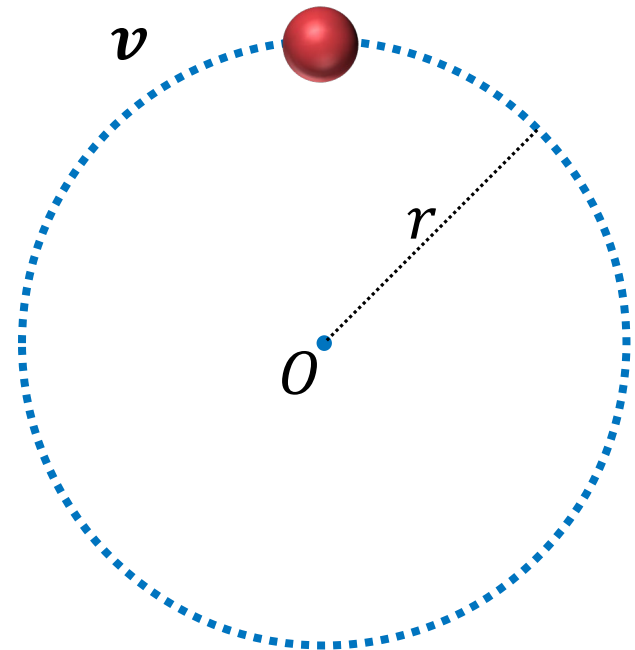
よって

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \varphi_0) \\ r \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ r\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x(t) \\ -\omega^2 y(t) \end{pmatrix}$$

位置ベクトルの逆方向であるから中心向き



周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega}$

等速円運動

運動方程式より

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\omega^2 x(t) \\ -m\omega^2 y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -m\omega^2 r \cos \varphi \\ -m\omega^2 r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cos \varphi \\ f \sin \varphi \end{pmatrix}$$

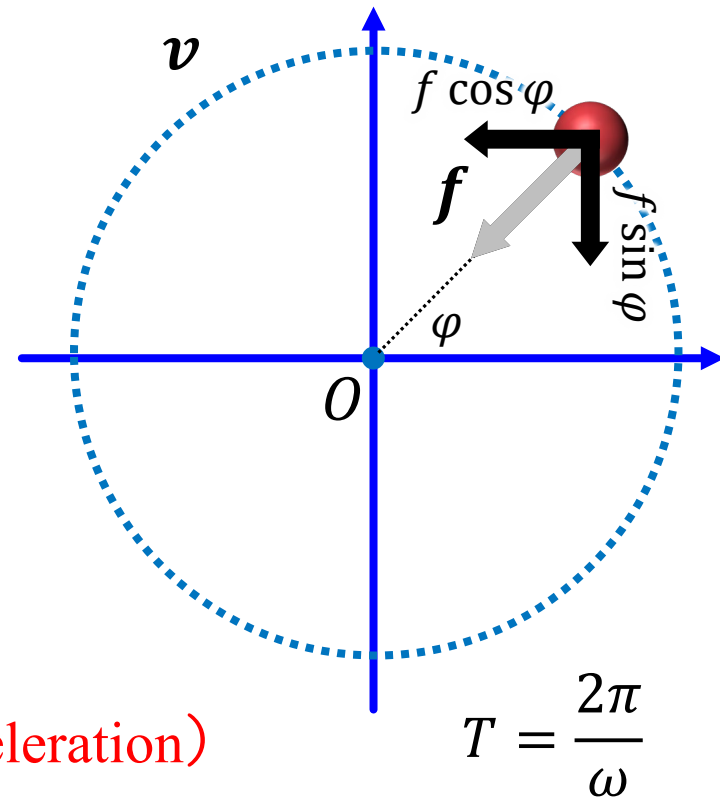
$$f = -m\omega^2 r \quad \text{: 向心力 (centripetal force)}$$

$$|f| = m\omega^2 r$$

$$a = -\omega^2 r \quad \text{: 向心加速度 (centripetal acceleration)}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \quad \text{を用いると} \quad f = -\frac{mv^2}{r}$$

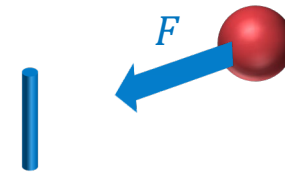
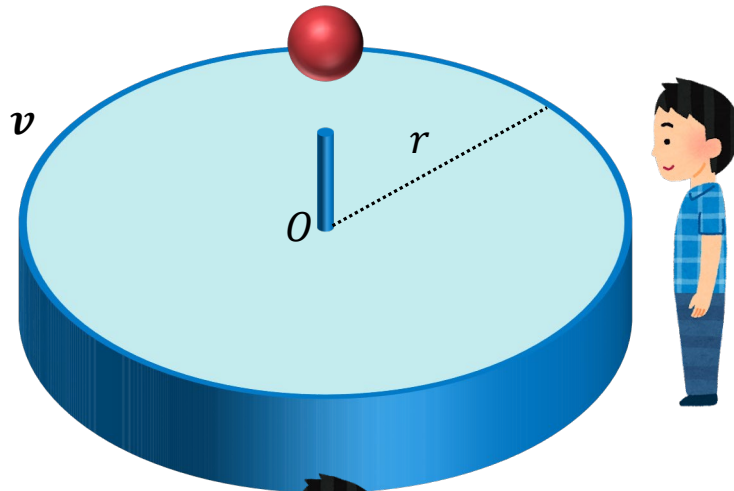
$$a = -\frac{v^2}{r}$$



遠心力とは

円運動を外から見ている人にとっては
球は円運動しているように見える

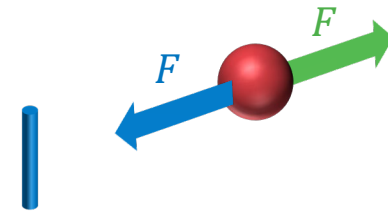
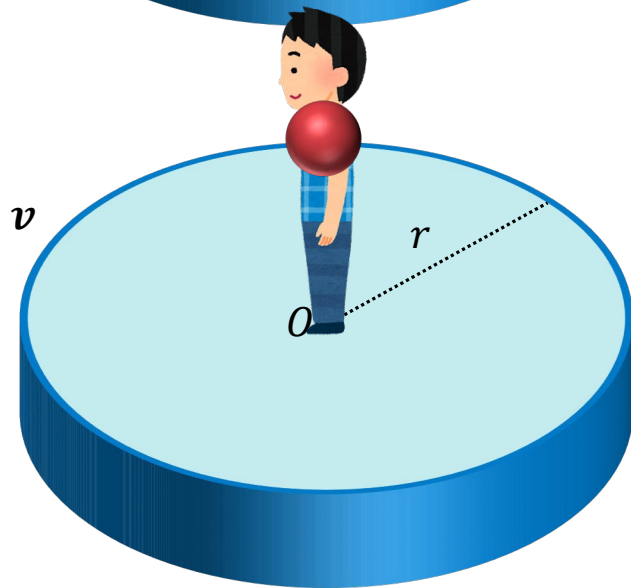
→ 向心力のみがはたらいている



一緒に円運動をしている人から見ると
球は静止しているように見える

→ 向心力と釣り合う力がはたらいているように
見える

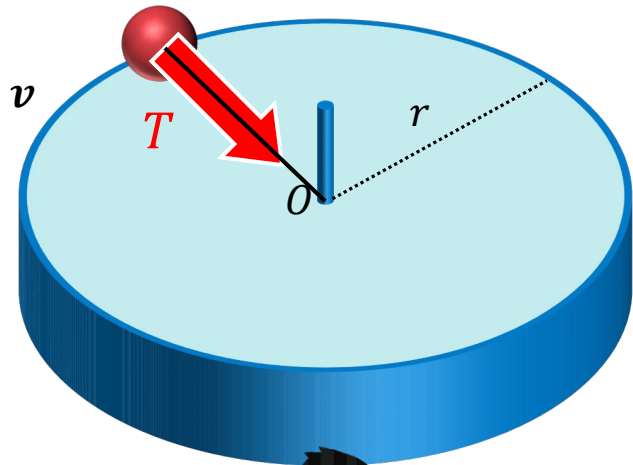
遠心力 という見かけの力 (慣性力)



真っすぐ進みたい物体が向心力で
無理やり円運動させられているので、
本来進みたかった方向に力を受けるように感じる(だけ)

遠心力

円運動を外から見ている人 (静止座標系) からみると



$$ma = F$$

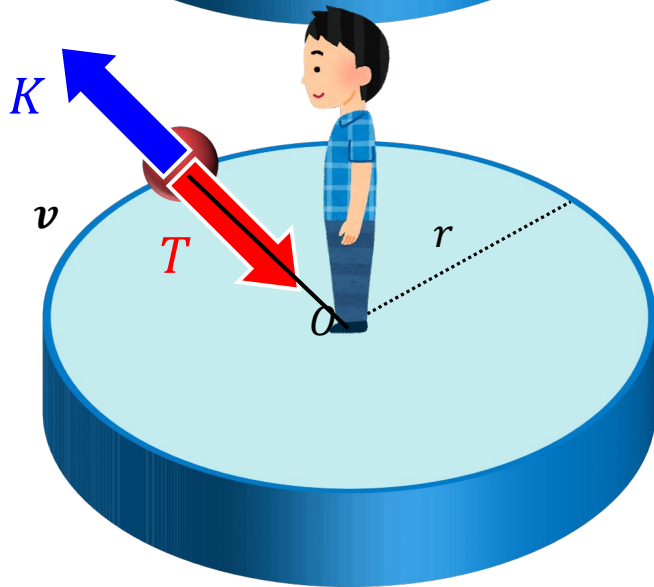
向心力を生み出している

紐が球を引っ張る力

T

$$m \frac{v^2}{r} = T$$

一緒に乗っている人 (慣性座標系) からみると



$$ma = F$$

止まっているのだから0

T と同じ大きさの外側にはたらく遠心力がはたらく

$$0 = T - m \frac{v^2}{r}$$

円錐振り子 (conical pendulum)

一端を固定したひもの下端につけられた質点の
水平面内で等速円運動

このとき、水平面内に運動が限定されるためには、
重力 mg と張力 S の合力が向心力になる必要がある

$$f = -mg \tan \theta$$

$$f = -m\omega^2 r \text{ より } -m\omega^2 r = -mg \tan \theta$$

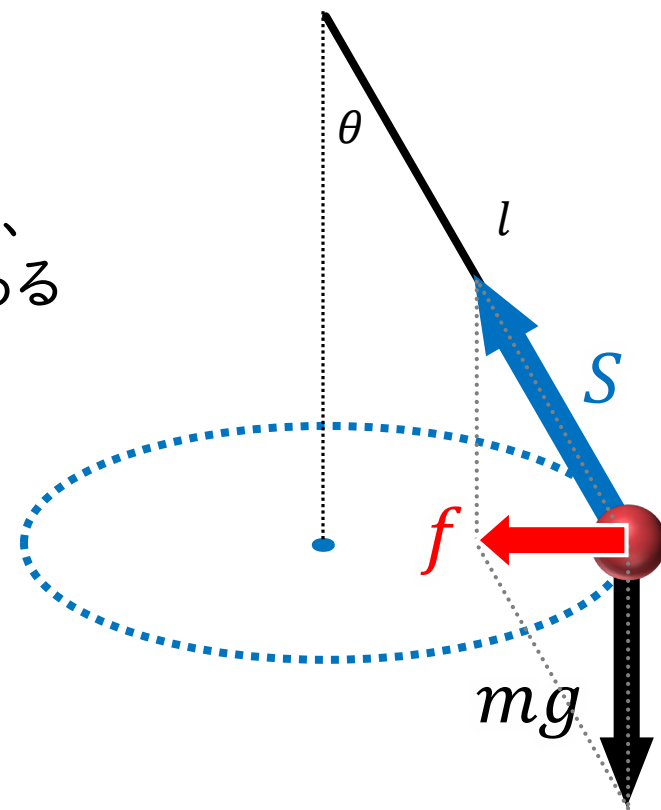
$$\omega^2 r = g \tan \theta$$

$$\text{また } r = l \sin \theta \text{ より}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

よって、周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$



$$\text{また、張力 } S \text{ は } S = \frac{mg}{\cos \theta}$$

2つの単振動の組み合わせ

x 方向と y 方向の単振動を組み合わせると
それぞれの振幅や位相差によって
楕円運動を描く

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = b \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ のとき $ay = bx$: 直線

$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ のとき

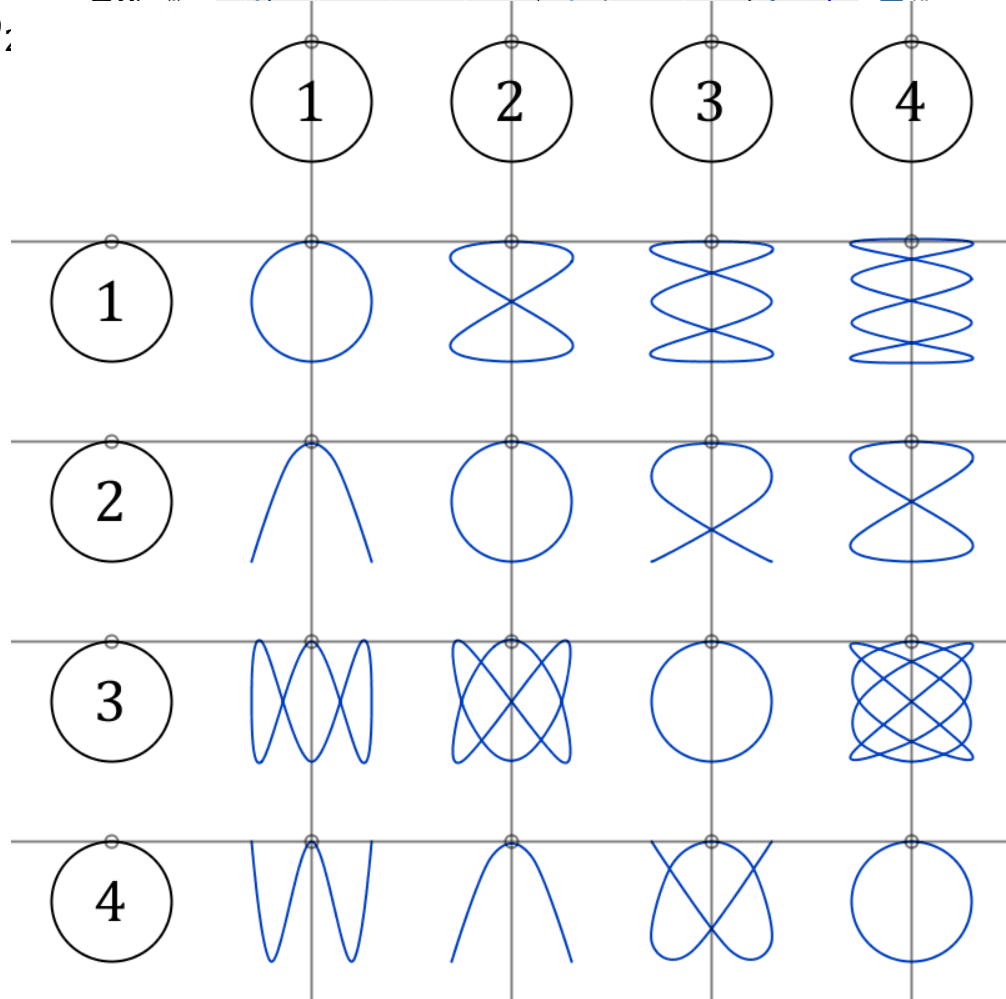
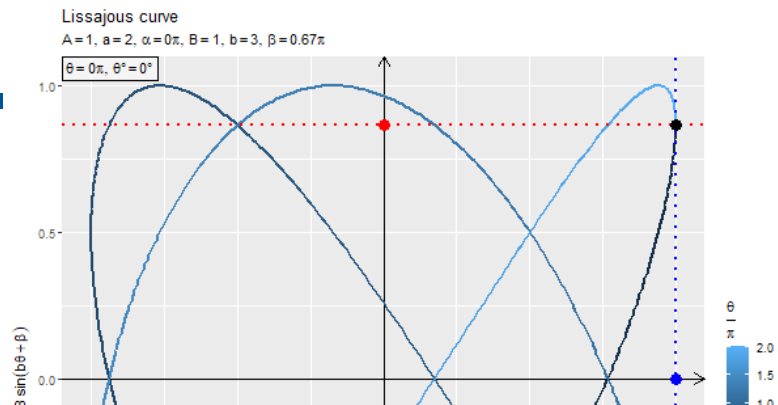
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad : \text{楕円}$$

直交する単振動の組み合わせに
よって描く曲線を

リサージュ曲線 (Lissajous' figure)
という

$$\varphi_1 = 0, \quad 2\pi$$

$$\varphi_2$$



仕事とエネルギー

仕事 (work)

力 F の方向と変位 $\Delta \mathbf{r}$ が同じ方向であれば $W \equiv |\mathbf{F}| |\mathbf{r}|$

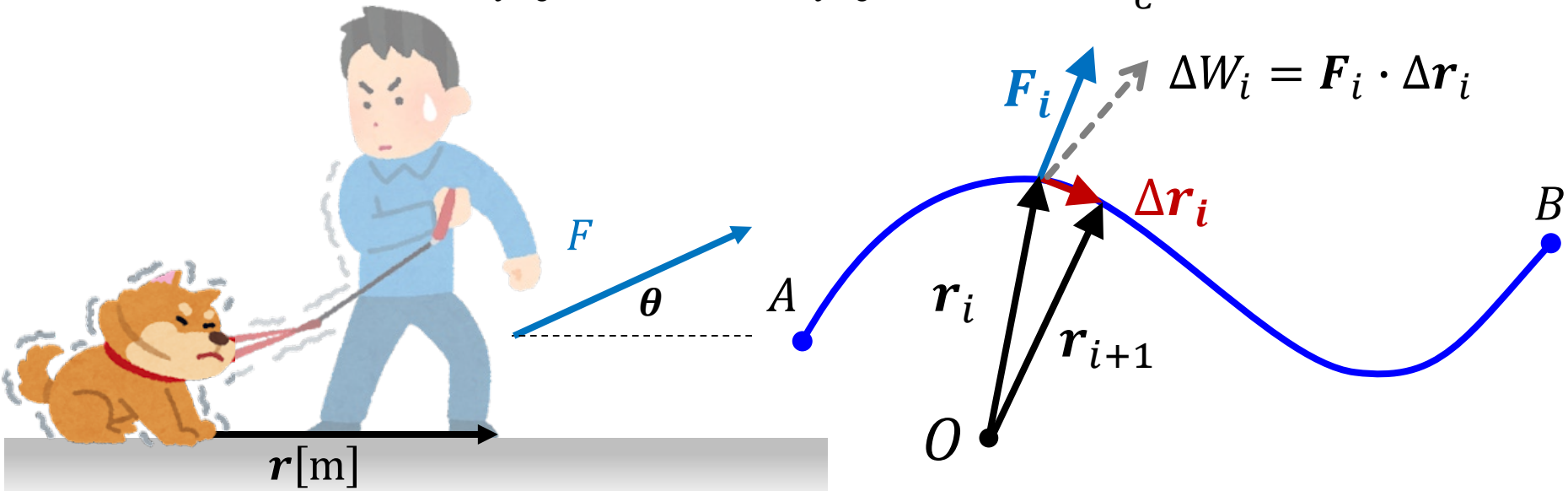
力 F の方向と変位 $\Delta \mathbf{r}$ が異なる方向のとき

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos \theta = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \cos \theta$$

力方向への変位 変位方向への力

微小区間の微小仕事 $\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$

$$\Rightarrow W_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \Delta W_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

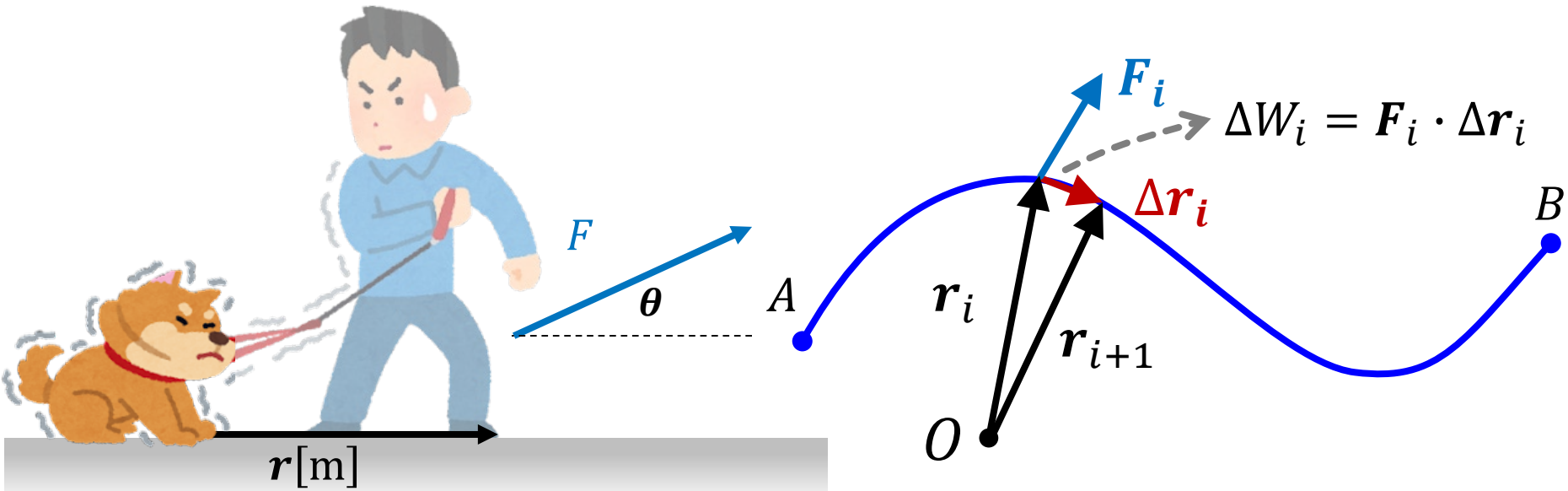


仕事とエネルギー

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_x(r) \\ F_y(r) \\ F_z(r) \end{pmatrix}, d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \{F_x(r)dx + F_y(r)dy + F_z(r)dz\} \\ &= \int_A^B F_x(r)dx + \int_A^B F_y(r)dy + \int_A^B F_z(r)dz \end{aligned}$$



仕事とエネルギー

運動方程式 $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}$

変位 $\Delta \mathbf{r}$ との内積

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

$\Delta \mathbf{r} \approx \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t$ を代入すると

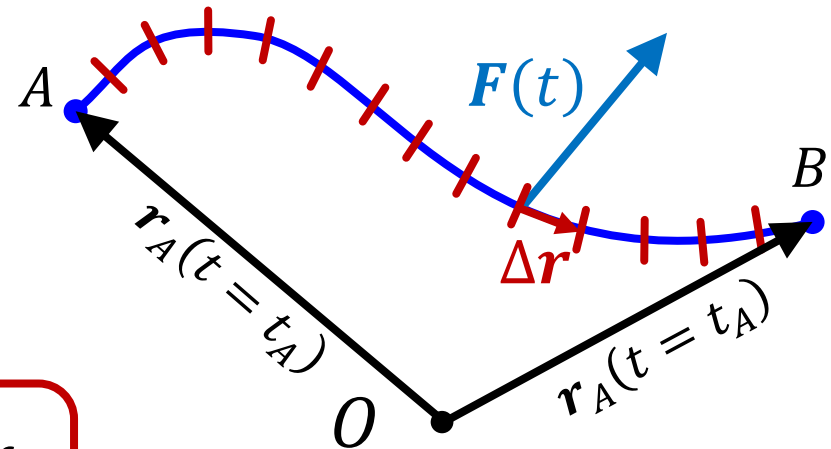
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) \Delta t = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) \Delta t$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) \Delta t = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t$$

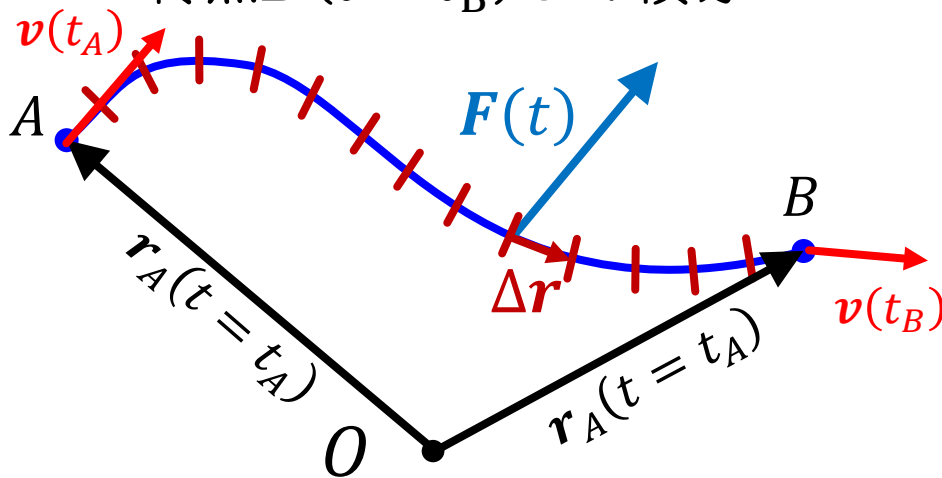
両辺を始点A ($t = t_A$) から
終点B ($t = t_B$) まで積分



$$\begin{aligned} \int_{t=t_A}^{t=t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) dt \\ = \int_{t=t_A}^{t=t_B} \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) \Delta t = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t$$

両辺を始点A ($t = t_A$) から
終点B ($t = t_B$) まで積分



$$\int_{t=t_A}^{t=t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right) dt = \int_{t=t_A}^{t=t_B} \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

$$(\text{左辺}) = \left[\frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 \right]_{t_A}^{t_B}$$

$$= \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}(t_B)}{dt} \right|^2 - \frac{1}{2} m \left| \frac{d\mathbf{r}(t_A)}{dt} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}(t_B)|^2 - \frac{1}{2} m |\mathbf{v}(t_A)|^2$$

$$(\text{右辺}) = U(\mathbf{r}(t_B)) - U(\mathbf{r}(t_A))$$

$$= W_{AB}$$

$$\frac{1}{2} m |\mathbf{v}(t_B)|^2 - \frac{1}{2} m |\mathbf{v}(t_A)|^2$$

$$= K_B - K_A = W_{AB}$$

保存力とポテンシャル

一般の力 $\mathbf{F}$ の中で、その成分がすべて1つのポテンシャル U に対し

$$\mathbf{F} = \left[-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

と書くことができるとき、 $\mathbf{F}$ を**保存力 (Conservative force)** という

$\mathbf{F}$ が保存力であるとき、力のする仕事は、

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \left[-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right] \cdot [dx, dy, dz]$$

$$= - \int_A^B \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right\}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$= - \int_A^B dU = -(U_B - U_A)$$

これを**全微分**という
(total derivative)

保存力

2点間を移動させる仕事が、その移動経路によらず始点と終点のみで決まる力

保存力

保存力

2点間を移動させる仕事、その移動経路によらず始点と終点のみで決まる力

→始点と終点を同一にする(周回させる)と仕事の総和が0となる

【保存力】 重力、弾性力、静電気力、磁力 など

【非保存力】 動摩擦力、空気抵抗、張力

演算子 ∇

ベクトル微分演算子
ナブラと読む

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \text{grad } f$$

↑
スカラー

ベクトル



ナブラをスカラー場に作用させたものをgradと呼ぶ
(gradient (傾斜) より)

ナブラを用いて表すと、保存力とポテンシャルは

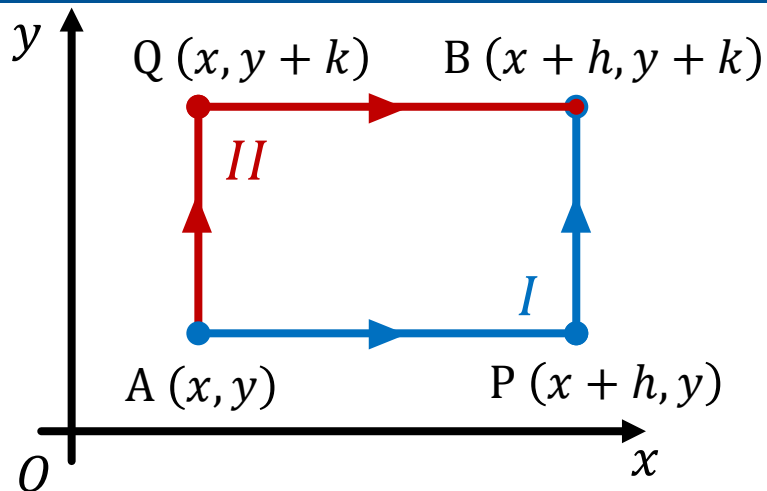
$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\text{grad } U$$

保存力かどうか

右図のようなA (x, y) から B ($x + h, y + k$) までの経路IとIIを考えたとき、

$$W_I = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x(x, y) \cdot h + F_y(x + h, y) \cdot k$$

$$W_{II} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_y(x, y) \cdot k + F_x(x, y + k) \cdot h$$



保存力であればこれらが等しくなる

$$F_x(x, y) \cdot h + F_y(x + h, y) \cdot k = F_y(x, y) \cdot k + F_x(x, y + k) \cdot h$$

$$\{F_y(x + h, y) - F_y(x, y)\} \cdot k = \{F_x(x, y + k) - F_x(x, y)\} \cdot h$$

$$\frac{F_y(x + h, y) - F_y(x, y)}{h} = \frac{F_x(x, y + k) - F_x(x, y)}{k}$$

$\rightarrow \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y}$

$$\therefore \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} : \text{保存力である条件 (2次元)}$$

例題3 保存力

1. 平面内で運動する質点にはたらく力 $F = [axy, by^2]$ で与えられるとき、この力が保存力かどうか調べよ。

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = ax \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad \text{であるから保存力ではない}$$

2. x 軸上の点 $A(r, 0)$ から y 軸上の点 $C(0, r)$ まで半径 r の円周に沿って動く場合と弦 AC に沿って動く場合の力 F のする仕事を比べよ。

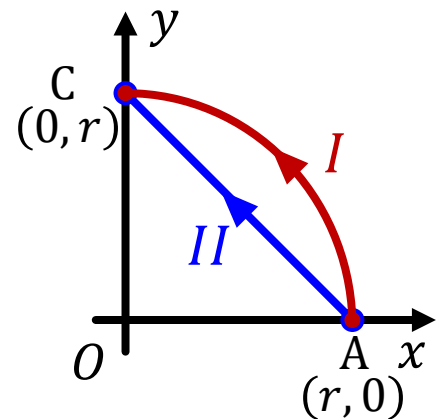
経路I 極座標を取ると $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$dx = -r \sin \theta d\theta, \quad dy = r \cos \theta d\theta$$

$$F_x = ar^2 \sin \theta \cos \theta \quad F_y = br^2 \sin^2 \theta$$

$$\int_A^C (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ar^2 \sin \theta \cos \theta (-r \sin \theta d\theta) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} br^2 \sin^2 \theta (r \cos \theta d\theta)$$



$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ar^3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} br^3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= (b - a)r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (\sin \theta)' d\theta$$

$$= (b - a)r^3 \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{3} (b - a)r^3}}$$

経路II $x + y = r$ より $x = r - y$ $y = r - x$ $dx = -dy$

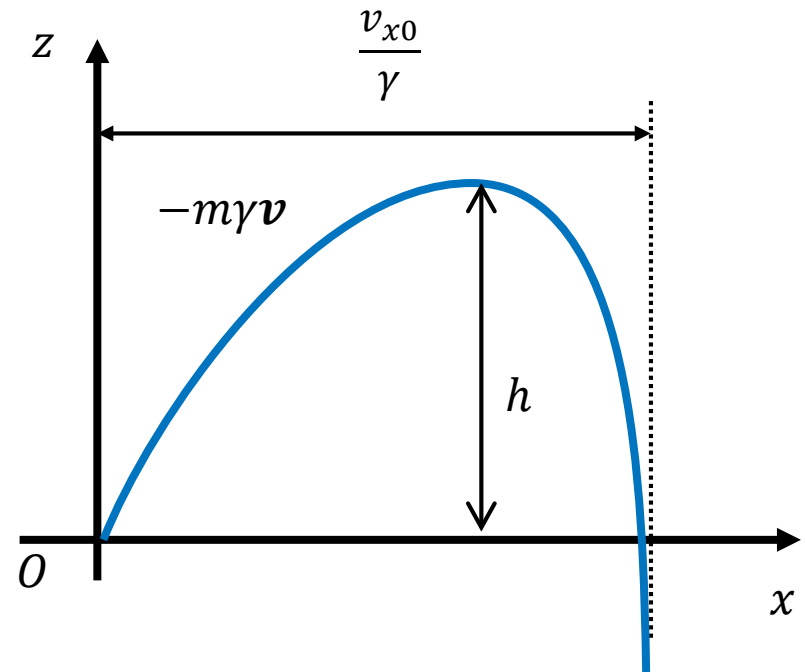
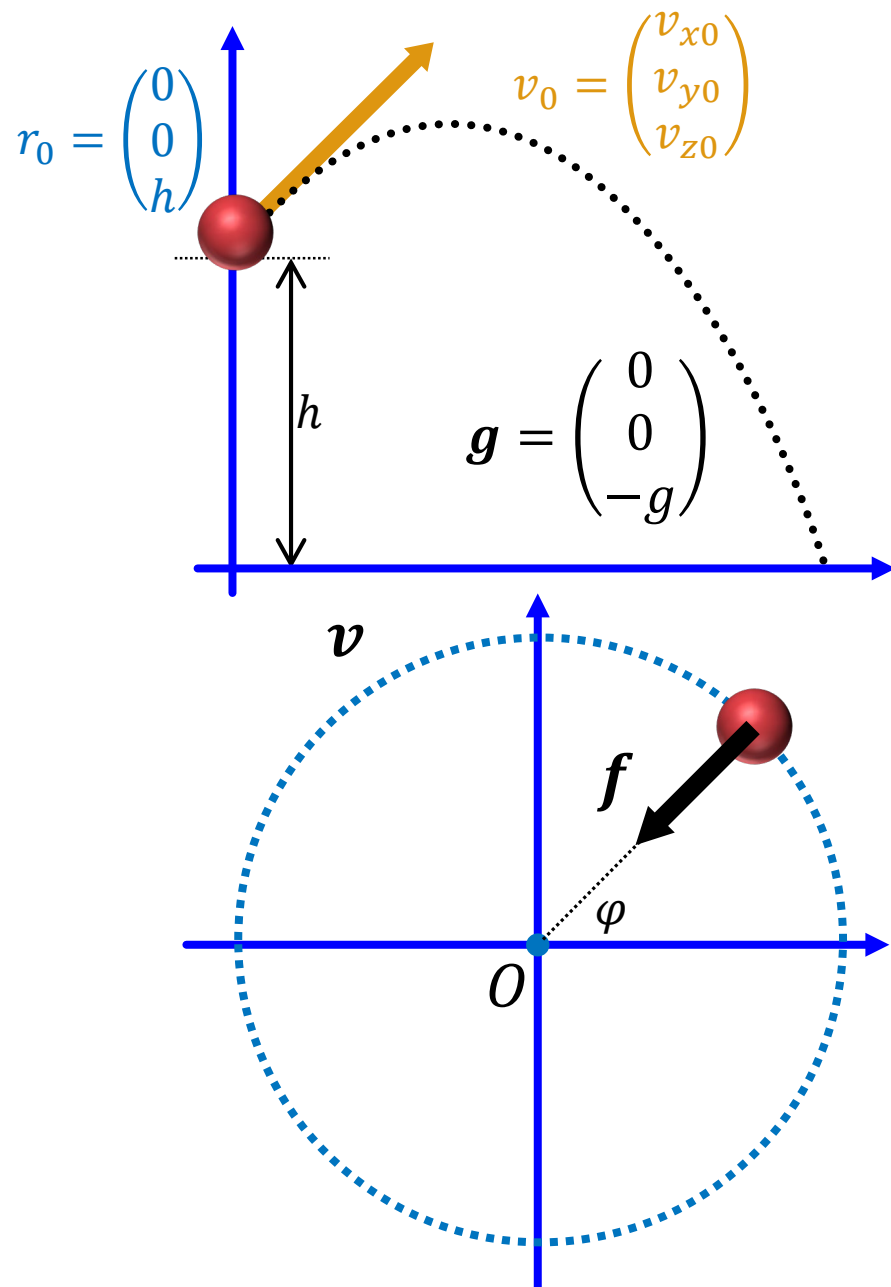
$$\int_A^C (F_x dx + F_y dy) = \int_r^0 axy dx + \int_0^r by^2 dy$$

$$= \int_r^0 ax(r - x) dx + \int_0^r by^2 dy = \left[\frac{1}{2} arx^2 - \frac{1}{3} ax^3 \right]_r^0 + \left[\frac{1}{3} by^3 \right]_0^r$$

$$= - \left(\frac{1}{2} ar^3 - \frac{1}{3} ar^3 \right) + \left(\frac{1}{6} br^3 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6} (2b - a)r^3}}$$

保存力ではないので確かに一致しない

【本日のポイント】



保存力

2点間を移動させる仕事、
その移動経路によらず
始点と終点のみで決まる力

$$\mathbf{F} = \left[-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$