

力学 I

(第4回) 運動とエネルギー (2)

【今日の内容】

微分方程式 (2)

運動とエネルギー

- 単振動
- 単振り子
- 1次元運動におけるエネルギー

【前回の数学範囲の復習】 微分方程式

1. 直接積分形

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

$$x = F(t) + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

2. 変数分離形

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x)$$

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

3. 定数係数 2階 同次 線形 常微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + Qx = 0$$

- ① $x = e^{\lambda t}$ とおき、特性方程式を解く
- ② 特性方程式を解き、基本解 X_1, X_2 を出す
- ③ 基本解の線形結合が一般解となる

(i) 相異実数解

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

(ii) 重解

$$X = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}$$

(iii) 相異共役虚数解

$$X = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

微分方程式の解法 4

4. 定数係数 2階 非同次 線形 常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + Qx = R \quad \cdots (1) \quad P, Q, R \text{ は定数}$$

(1)において定数項を $R = 0$ とした式(2)を(1)に対する
 同伴方程式 (companion equation) と呼ぶ。

それぞれの一般解、特殊解をそれぞれ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + Qx = R \quad \cdots (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + Qx = 0 \quad \cdots (2)$$

x x_0
 コレを知りたい

X とおく
 さっき求めた

x と x_0 は(1)の解であるから $\frac{d^2}{dt^2}x + P \frac{d}{dt}x + Qx = R \quad \cdots (3)$

$$\frac{d^2}{dt^2}x_0 + P \frac{d}{dt}x_0 + Qx_0 = R \quad \cdots (4)$$

(3) - (4)より

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} x - \frac{d^2}{dt^2} x_0 \right\} + P \left\{ \frac{d}{dt} x - \frac{d}{dt} x_0 \right\} + Q \{x - x_0\} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \{x - x_0\} + P \frac{d}{dt} \{x - x_0\} + Q \{x - x_0\} = 0$$

この式は(2)の形なので、 $\{x - x_0\}$ が(2)の解 X であることを表している

すなわち、

$$X = x - x_0 \quad \therefore x = \underbrace{x_0}_{\text{[(1)の一般解]}} + \underbrace{X}_{\text{[(1)の特殊解]}}$$

{同伴方程式(2)の一般解}
↓
あとはこれだけ
求めれば良い!!

非同次微分方程式の特殊解は

R が単純な形の場合は以下のように求める。

- i. R が n 次の整式のとき $\rightarrow At^n + Bt^{n-1} + \dots$
- ii. R が ke^{rx} のとき $\rightarrow Ae^{rx}$
- iii. R が $k \sin rx + h \cos rx$ のとき $\rightarrow A \sin rx + B \cos rx$

であると予測して満たす解を探す : 未定係数法

(Method of Undetermined Coefficients)

例題Ⅰ 定数係数2階非同次線形常微分方程式

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t + 1$$

$X = At^1 + B$ とおいて代入すると

$$\frac{dX}{dt} = A$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0$$

であるから

$$0 - 3A + 2(At + B) = 2t + 1$$

$$2At + (-3A + 2B) = 2t + 1$$

$$\therefore A = 1, B = 2$$

$$x_0 = \underline{t + 2}$$

同伴方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1, 2$$

よって同伴方程式の一般解は

$$X = \underline{C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$$


$$\therefore x = \underline{t + 2 + C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$$

例題Ⅰ 定数係数2階非同次線形常微分方程式

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 4e^t$$

$X = Ae^t$ とおいて代入すると

$$\frac{dX}{dt} = Ae^t \quad \frac{d^2X}{dt^2} = Ae^t$$

であるから

$$Ae^t + 2Ae^t + Ae^t = 4e^t$$

$$4Ae^t = 4e^t$$

$$\therefore A = 1$$

$$x_0 = \underline{e^t}$$



同伴方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda = -1$$

よって同伴方程式の一般解は

$$X = \underline{(C_1 + tC_2)e^t}$$



$$\therefore x = (C_1 + tC_2)e^t + e^t = \underline{(C_1' + tC_2)e^t}$$

例題Ⅰ 定数係数2階非同次線形常微分方程式

$$(3) \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 5 \sin 2t$$

$X = A \sin 2x + B \cos 2x$ において
代入すると

$$\frac{dX}{dt} = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

であるから、代入して整理すると

$$(-4A + 4B + 2A) \sin 2x + (-4B - 4A + 2A) \cos 2x = 5 \sin 2t + 0 \cdot \cos 2x$$

$$\therefore A = -\frac{1}{2}, B = 1 \quad x_0 = \underline{-\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x}$$

$$\therefore x = \underline{-\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x + e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}$$

同伴方程式は $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は
 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

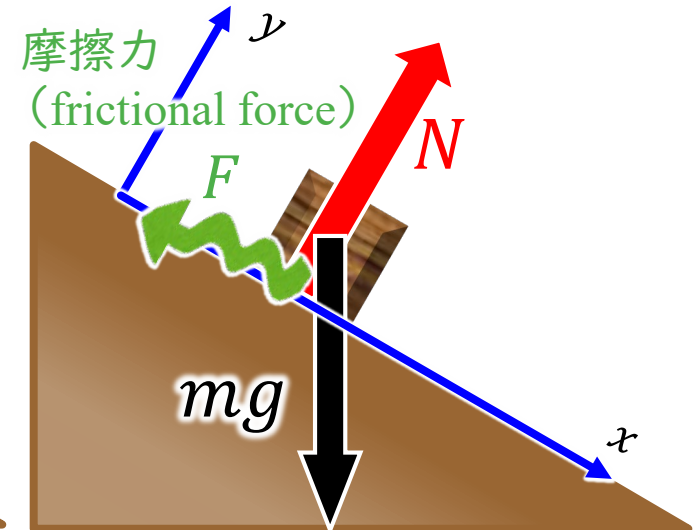
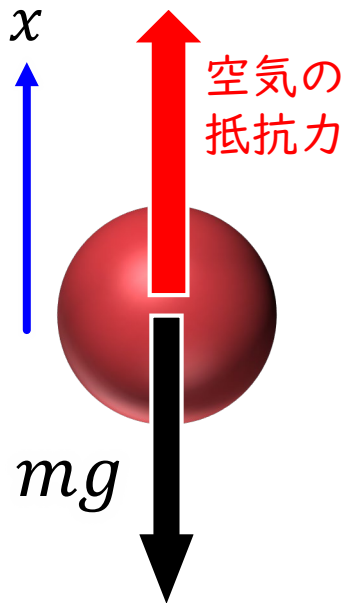
$$\lambda = 1 \pm i$$

よって同伴方程式の一般解は

$$X = \underline{e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}$$

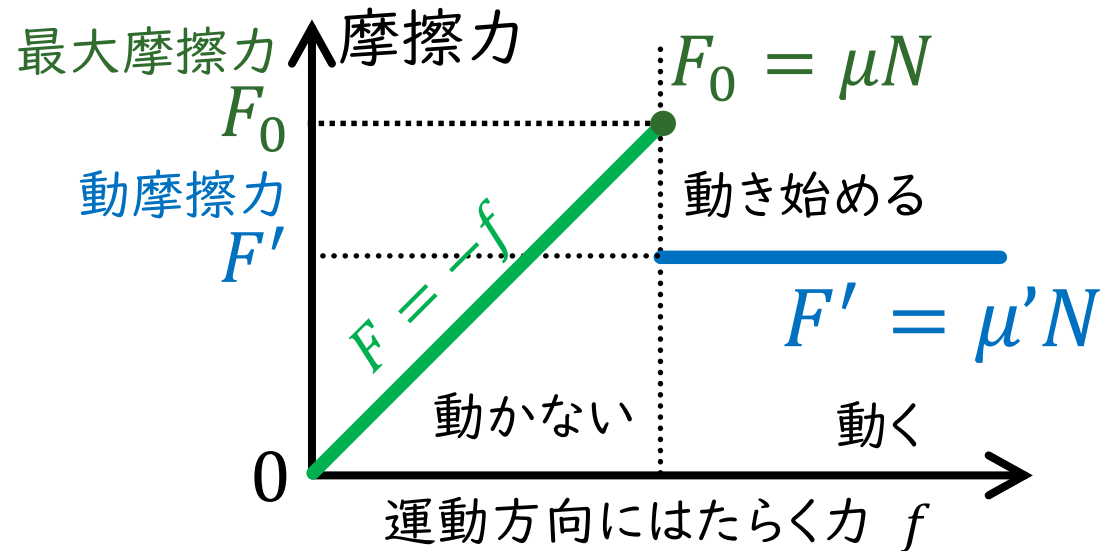


【前回の復習】

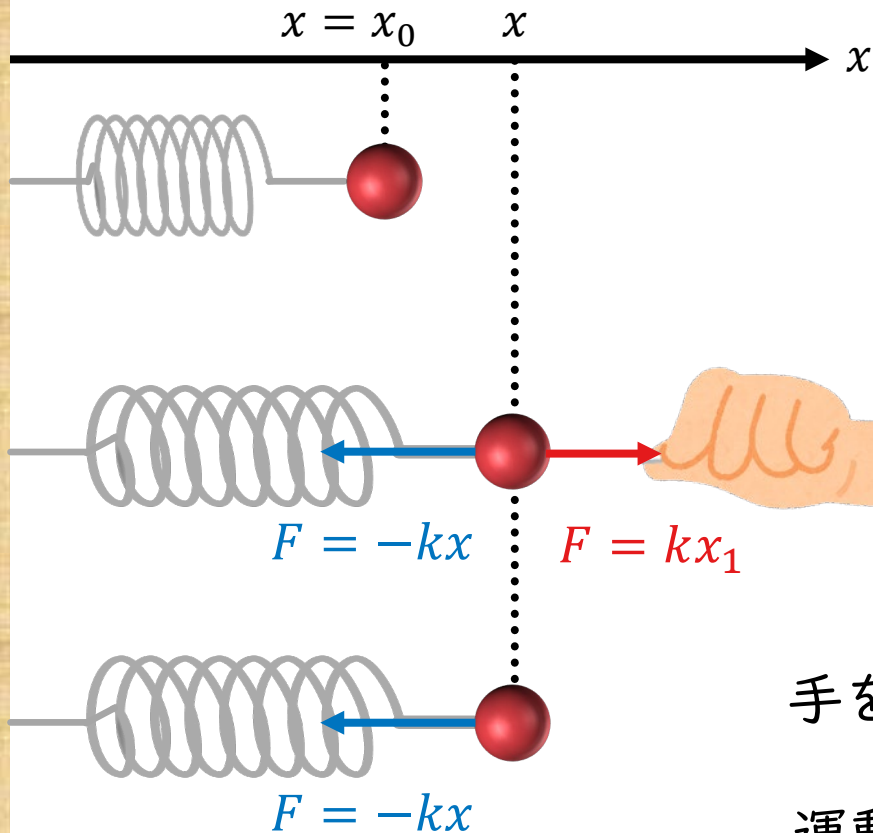


運動方程式の立て方

- ① 物体に力を探し尽くす
- ② 状況を理想化する
- ③ 適切な軸を選ぶ
- ④ 運動方程式を立てる



単振動（調和振動）



フックの法則 (Hooke's law)

ばねの伸びは力の大きさに比例する

ばねの復元力 F [N]、
ばねの伸びを x [m] とすると、

$$F = -kx$$

k [N/m] をばね定数
(Spring constant) と呼ぶ

手を離れた後の x 軸方向の運動を考える

運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k \{x(t) - x_0\}$$

単振動（調和振動）

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k\{x(t) - x_0\}$$

$$y(t) = x(t) - x_0 \text{ とおくと}$$

$$x(t) = y(t) + x_0$$

$$m \frac{d^2 \{y(t) + x_0\}}{dt^2} = -ky(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -ky(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

↑定数係数 2階 同次
線形常微分方程式

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 0\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$$

一般解は

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

よって

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + x_0$$

単振動（調和振動）

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + x_0$$

特殊解を求める。

初期条件として $x(0) = x_0 + a$ と $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ とすると、

$$x(0) = C_1 + x_0 = x_0 + a \quad \therefore C_1 = a$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$\dot{x}(0) = C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \quad \therefore C_2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore x(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + x_0$$

単振動（調和振動）

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \text{ とおくと } x(t) = a \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0$$

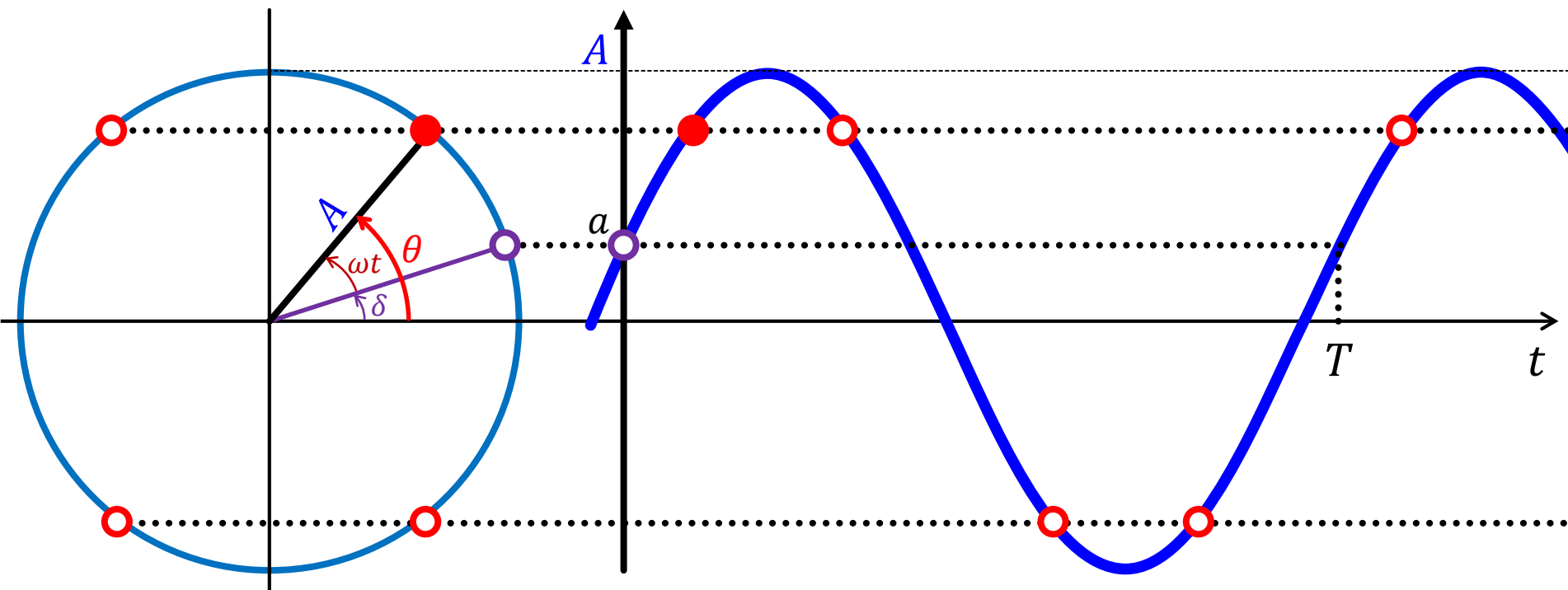
この式は次のように書き換えられる

角振動数 ω
(Angular frequency)

位相定数 δ (Phase constant)
初期位相 δ (Initial phase)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) + x_0$$

(Amplitude) 振幅 位相 θ (Phase)



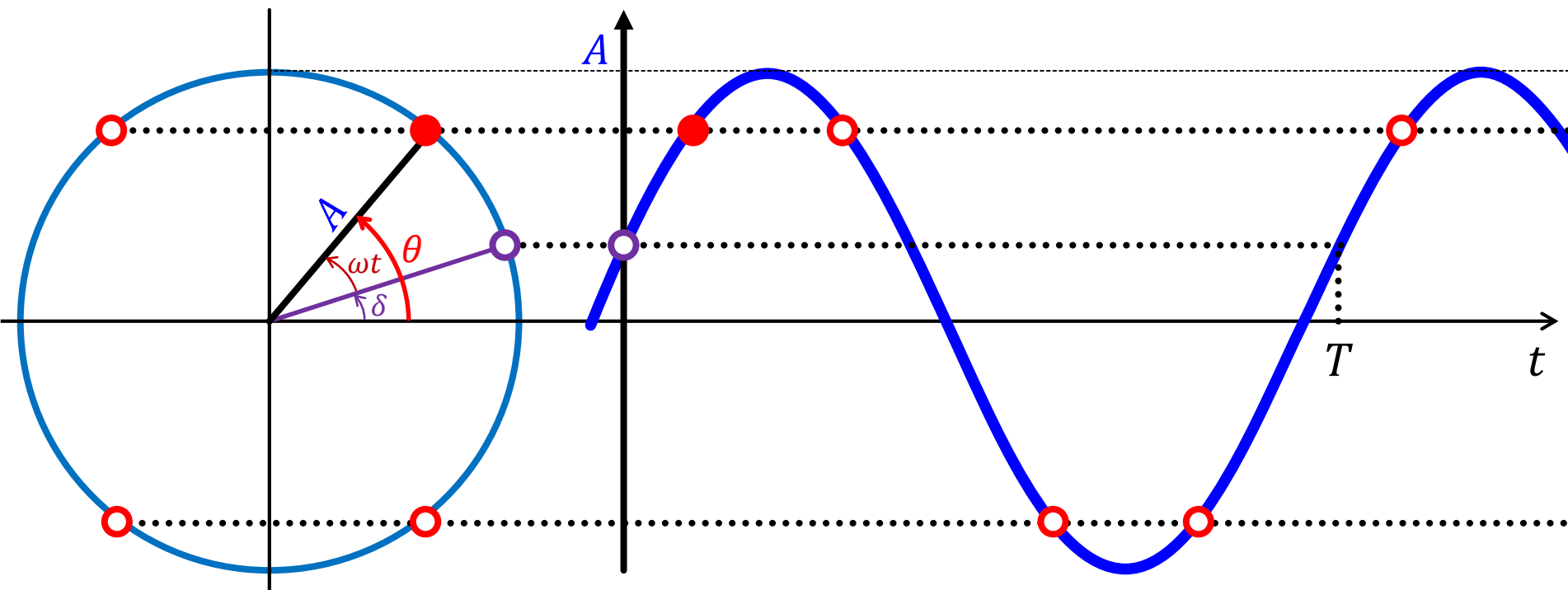
単振動 (調和振動)

角振動数 ω ... 単位時間あたりの位相変化

周期 T
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動数 ν
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

このような定点からの距離に比例する力を受けて
定点を中心に振動する系を
調和振動 (harmonic oscillator)
という



単振り子

1つの質点を吊り下げた振り子（単振り子）

運動自体は2次元であるが、 r 固定で θ のみの
1次元運動とみなせる

変位を円弧の長さ s とすると

$$s = l\theta$$

$$ds = l d\theta$$

s 方向の速度 v は

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$$

s 方向の加速度 a は

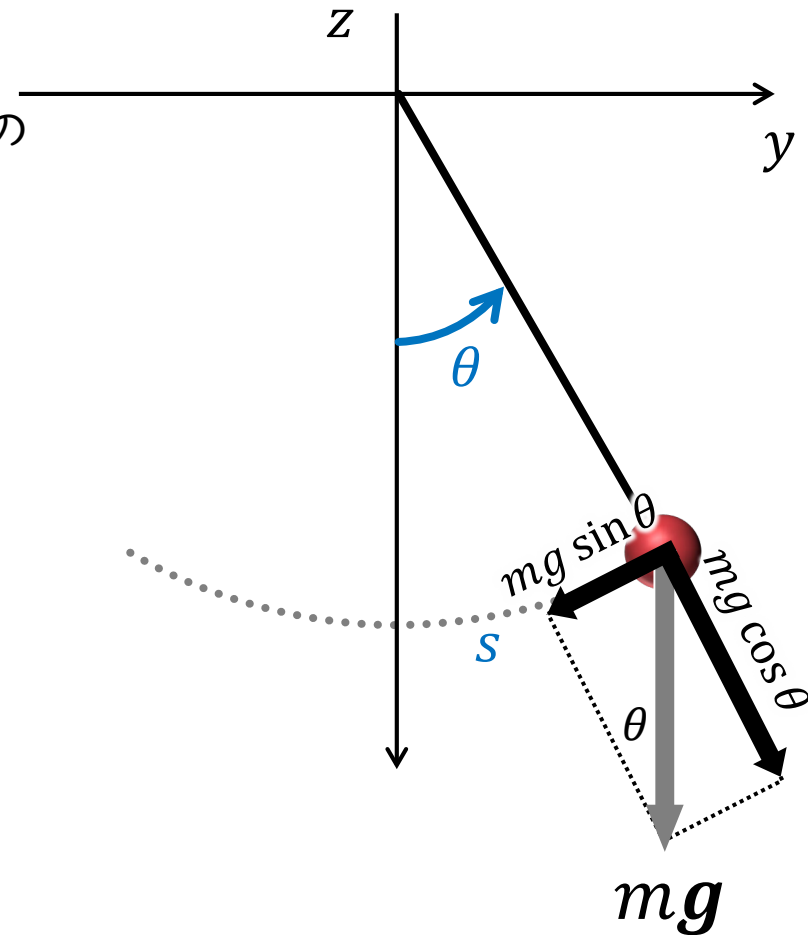
$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

よって、運動方程式は

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

微分

微分



$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

単振り子

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\theta \ll 1$ のとき、 $\sin\theta \sim \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2\theta(t) = 0$$

← 定数係数 2階 同次
線形常微分方程式

$\theta = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

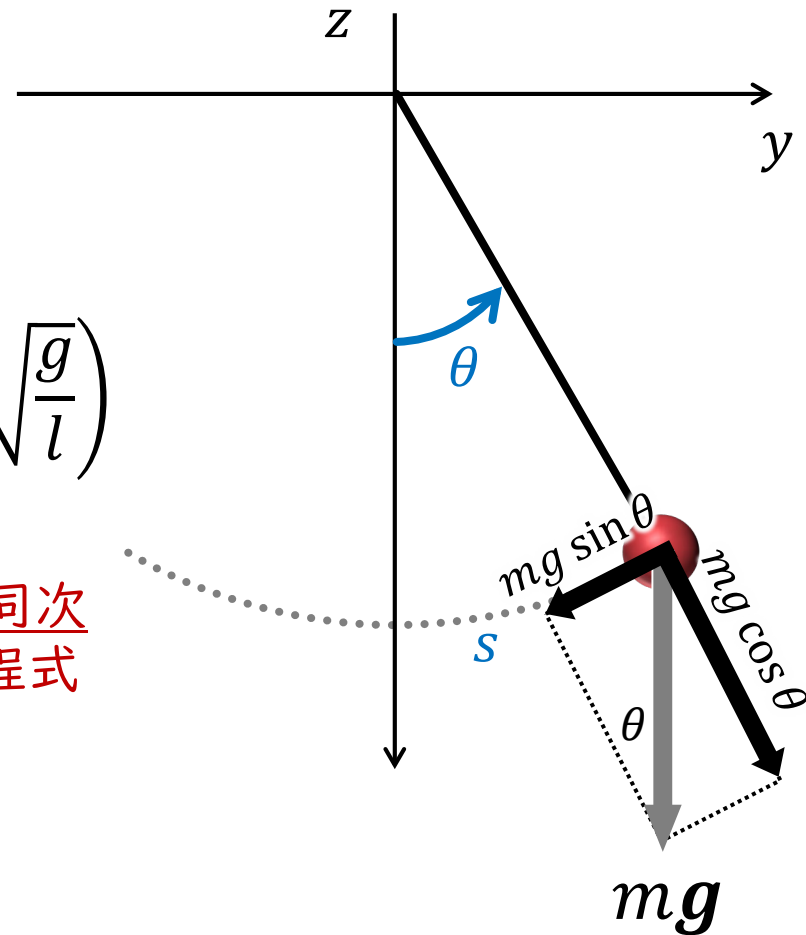
$$\lambda^2 + 0\lambda + \omega^2 = 0 \quad \lambda = \pm\omega i$$

一般解は $\theta(t) = \underline{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}$

$\theta(0) = \theta_0$ 、 $\dot{\theta}(0) = 0$ とすると、

$$C_1 = \theta_0, C_2 = 0$$

$$\therefore \theta(t) = \underline{\theta_0 \cos \omega t}$$



単振り子

16

角振動数 ω $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

周期 T $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

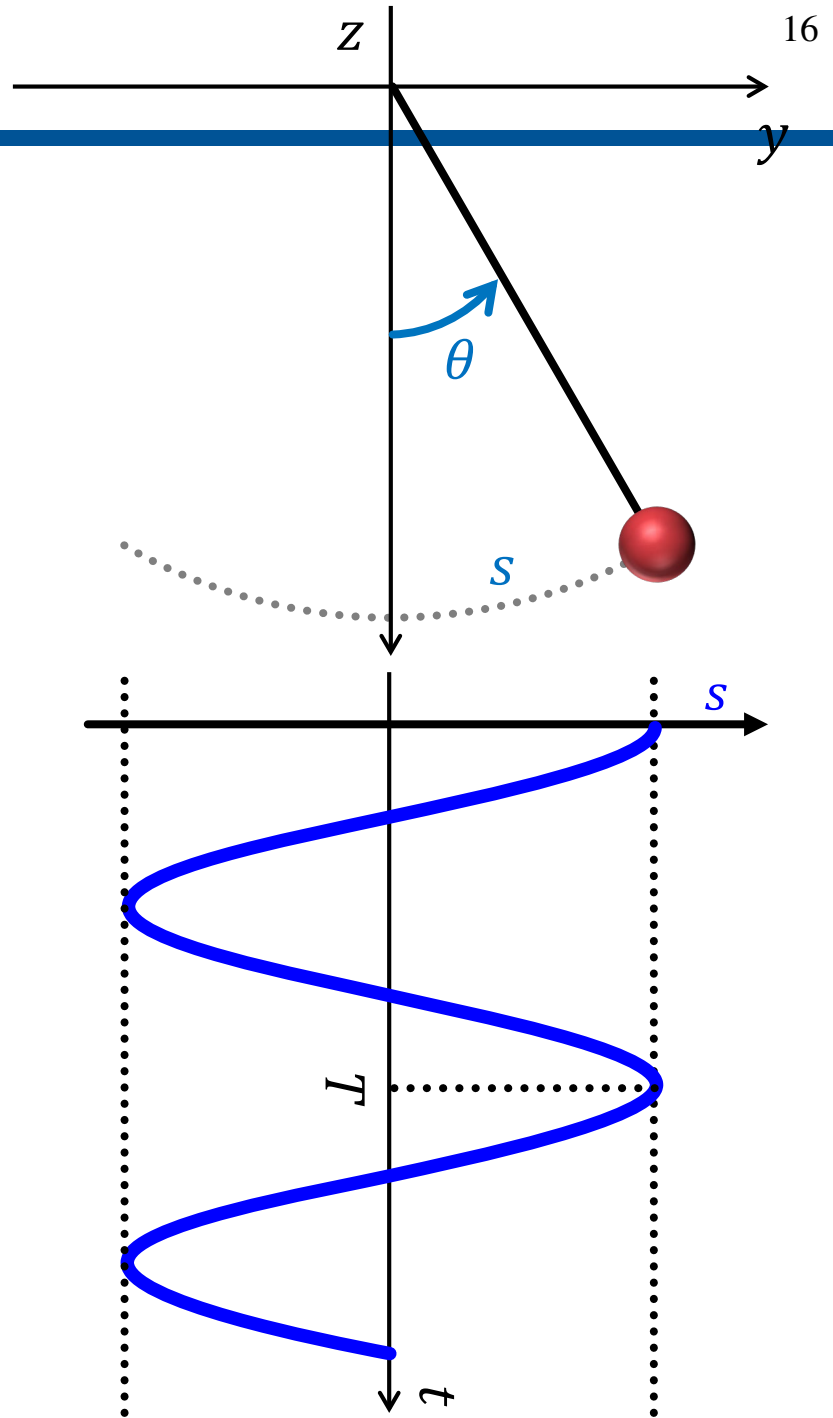
振動数 ν $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

単振り子の等時性 (isochronism)

弦の長さに対して振幅が十分に小さければ、
($\sin \theta \cong \theta$) 錘の質量の大小に関わらず弦の
長さのみで周期がきまる

近似と用いずに解くと

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2}$$



1次元の運動とエネルギー

運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)$

両辺に dx/dt を掛けると

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \frac{dx}{dt}$$

ここで

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

であるから

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2) = f(x) \frac{dx}{dt}$$

両辺を t で積分すると

$$\int_{t=t_0}^t \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2) dt = \int_{t=t_0}^t f(x) \frac{dx}{dt} dt$$

置換積分より

$$\frac{1}{2} m \int_{t=t_0}^t d(v^2) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} f(x) dx$$

$$\frac{1}{2} m \{v(t)^2 - v(t_0)^2\}$$

$$= \int_{x(t_0)}^{x(t)} f(x) dx$$

ここで

$$U(x) = - \int^x f(x) dx$$

と定義すると

1次元の運動とエネルギー

$$\frac{1}{2}m\{v(t)^2 - v(t_0)^2\} = \int_{x(t_0)}^{x(t)} f(x) dx$$

ここで $U(x) = - \int^x f(x) dx$ と定義すると $f(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$

$$U(x) - U(x(t_0)) = - \int_{x(t_0)}^{x(t)} f(x) dx$$

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv(t_0)^2 + U(x(t_0))$$

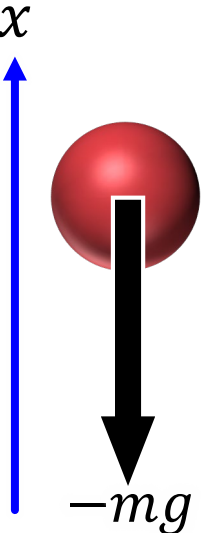
運動エネルギー (Kinetic energy) 位置エネルギー (Potential energy)

K

U

$\Rightarrow E = K + U = \text{const}$: 力学的エネルギー保存の法則
 力学的エネルギー (mechanical energy) (law of conservation of energy)

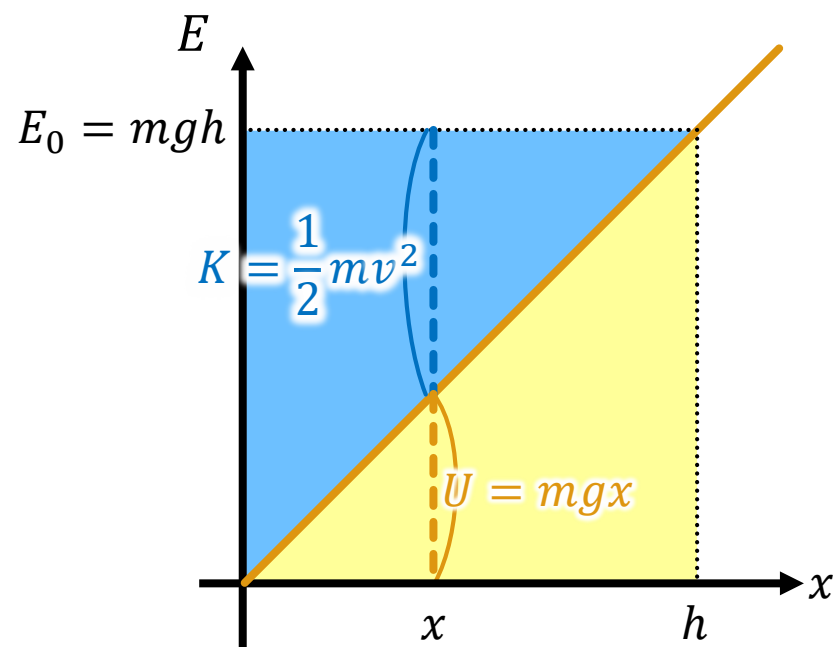
1次元運動のエネルギー

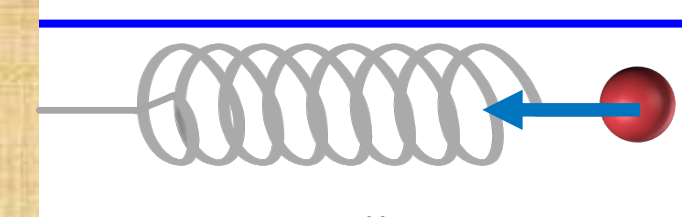


$$f = -mg$$

$$U(x) = - \int^x -mg \, dx = mgx$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$$



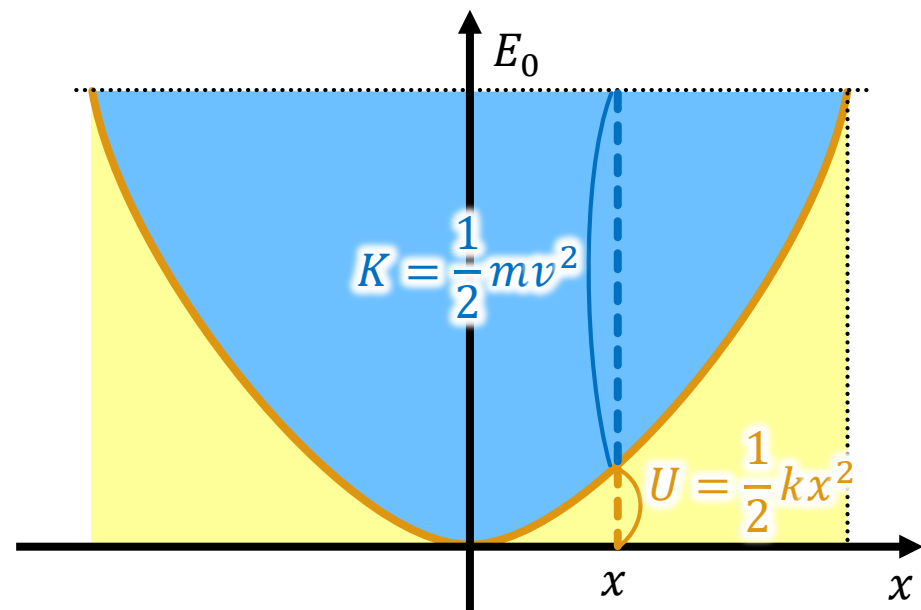


$$f = -kx$$

$$U(x) = - \int^x -kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

:弾性エネルギー (Elastic energy)



例題2 弾性エネルギー

単振動における質点の位置と速度の式からエネルギー保存則が成り立つことを示せ。

$$x(t) = a \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

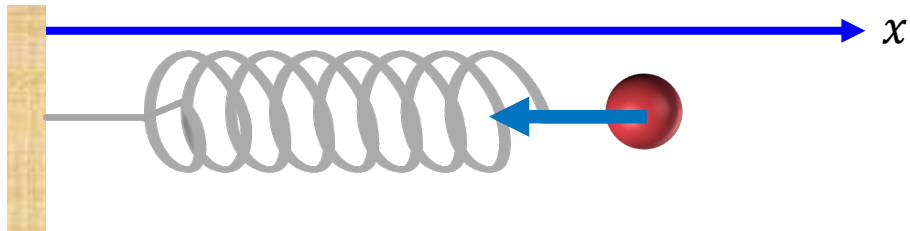
$$= \frac{1}{2}m(-a\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2}k \left(a \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ a^2 \omega^2 m \sin^2 \omega t - 2amv_0 \sin \omega t \cos \omega t + mv_0^2 \cos^2 \omega t \right. \\ \left. + a^2 k \cos^2 \omega t + 2ak \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + k \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \{ a^2 k \sin^2 \omega t - 2am\omega v_0 \sin \omega t \cos \omega t + mv_0^2 \cos^2 \omega t \\ + a^2 k \cos^2 \omega t + 2am\omega v_0 \sin \omega t \cos \omega t + mv_0^2 \sin^2 \omega t \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ a^2 k + mv_0^2 \} = \text{const}$$

【本日のポイント】



$$\Rightarrow E = K + U = \text{const}$$

:力学的エネルギー保存の法則
(law of conservation of energy)

