

力学 I

(第3回) 運動とエネルギー (I)

【今日の内容】

微分方程式 (I)

運動とエネルギー

- 直線上の運動
- 斜面に沿う運動

【本日のポイント】

運動の三法則

慣性の法則 (law of inertia)

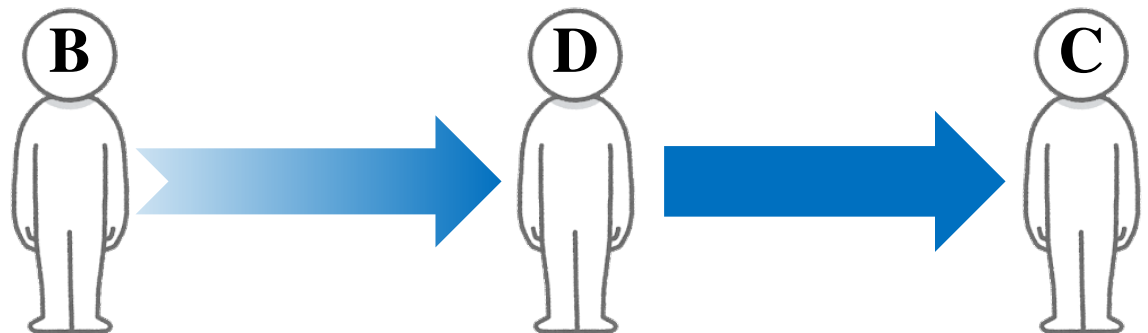
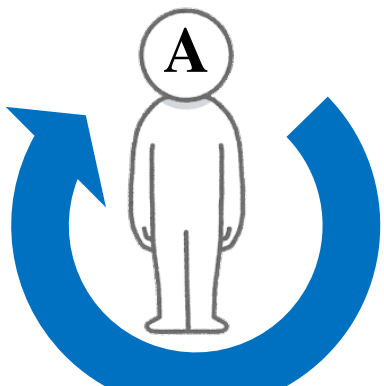
すべての物体は、外部から力を加えられない限り、
静止している物体は静止状態を続け、
運動している物体は等速直線運動を続ける。

運動の法則 (law of motion)

慣性系（第1法則が成り立つ座標系）において
運動量が時間によって変化する割合は
その物体にはたらく**力に比例し、その力の向きに生じる。**

作用反作用の法則 (Law of action and reaction)

物体Aが物体Bに力 F を及ぼすときは、
物体Bは必ず物体Aに対して、
大きさが等しく逆向きの力 $-F$ を及ぼす



微分方程式

ここでは力学を学ぶ上で必要な要素のみを学ぶ。数学的な微分方程式については後期の微分積分II(西沢担当)で体系的に学ぶ

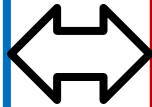
微分方程式とは

方程式

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

→ $x = 1, -4$ (解)

→ 未知数 x を求める



微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 5$$

→ $x = t^2 - 5t + C$ (C は任意定数): 一般解

→ 未知関数 $x(t)$ を求める

初期条件(境界条件)が与えられた場合、
 C が一意に決まる

$$x(t = 0) = 0 \text{ のとき } C = 0$$

→ $x = t^2 - 5t$: 特殊解(特解)

一般解の任意定数 C にどのような値を入れても成り立たない解 : 特異解

微分方程式の種類

→ **階数**: 微分の最高階数
(一般解中の任意定数の数と一致) $\frac{d^2x}{dt^2}$: 2階

→ **同次、非同次 (斉次、非斉次)**
関数を含まない定数項を含む: 同次 (斉次)
含まない: 非同次 (非斉次)

定数係数 2階 同次 線形 常微分方程式

→ **常微分、偏微分**
1変数関数の微分のみ: 常微分
多変数関数の微分: 偏微分

→ **線形、非線形**
一次の微分の和のみで構成: 線形
微分の累乗を含む: 非線形 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$: 非線形

→ **定数係数** $\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = R(t)$

と書かれたとき、 $P(t), Q(t)$ が t によらない定数

微分方程式の解法(力学関連のみ) 1.2.

1. 直接積分形(前回を参照)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t)} \Rightarrow x = \int f(t) dt \Rightarrow \boxed{x = F(t) + C \quad (C \text{は任意定数})}$$

2. 変数分離形

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x) \quad h(x) \neq 0 \qquad \frac{1}{h(x)} \frac{dx}{dt} = g(t)$$

左辺には x のみ右辺には t のみを
集めて変数を分離

$$\frac{1}{h(x)} dx = g(t) dt$$

両辺に「 $\int$ 」をつけて

$$\boxed{\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt}$$

数学的に正しくは

両辺を t で積分して

$$\int \frac{1}{h(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int g(t) dt$$

置換積分

$$\boxed{\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt}$$

例題Ⅰ 変数分離形

$$(1) \frac{dx}{dt} = 2xt$$

左辺には x のみ

右辺には t のみを集めて

$x \neq 0$ のとき $\frac{dx}{x} = 2t dt$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 2t dt$$

$$\log|x| = t^2 + C$$

$$|x| = e^{t^2+C} = e^C e^{t^2}$$

$$x = \pm e^C e^{t^2}$$

$\pm e^C \rightarrow C$ と置き直して

$$x = C e^{t^2}$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{\cos x}$$

左辺には x のみ

右辺には t のみを集めて

$$\cos x dx = \sin t dt$$

$$\int \cos x dx = \int \sin t dt$$

$$\sin x = -\cos t + C$$

$$\underline{x = \sin^{-1}\{-\cos t + C\}}$$

$x = 0$ のとき $x = 0$ も明らかに解

$\Rightarrow C = 0$ とすれば含まれるので
特異解ではない

$$\underline{x = C e^{t^2}}$$

微分方程式の解法 3

3. 定数係数 2階 同次 線形 常微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + Qx = 0$$

P, Q は定数

解法

① $x = e^{\lambda t}$ とおく

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + P \frac{d}{dt} e^{\lambda t} + Q e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + P \lambda e^{\lambda t} + Q e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} \{ \lambda^2 + P \lambda + Q \} = 0$$

$$\underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} \underbrace{\{ \lambda^2 + P \lambda + Q \}}_{= 0} = 0$$

$\lambda^2 + P \lambda + Q = 0$: 特性方程式
(characteristic equation)

微分方程式の解法

② 特性方程式を解き、
基本解 X_1, X_2 を出す

③ 基本解の線形結合が
一般解となる

(i) 相異なる実数解 λ_1, λ_2 をもつとき

$$\begin{aligned} \text{基本解: } X_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ X_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

一般解:

$$X = \underline{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$

(ii) 重解 λ_1 をもつとき

$$\begin{aligned} \text{基本解: } X_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ X_2 &= t e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

一般解:

$$X = \underline{(C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}}$$

(iii) 相異なる共役虚数解 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ をもつとき

$$\begin{aligned} \text{基本解: } X_1 &= e^{\alpha t} \cos \beta t \\ X_2 &= e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

一般解:

$$X = \underline{e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)}$$

例題2 定数係数2階同次線形常微分方程式

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = -3, +2$$

基本解は

$$X_1 = e^{-3t}, X_2 = e^{2t}$$

一般解は

$$X = \underline{C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}}$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 9x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

基本解は

$$X_1 = e^{-3t}, X_2 = t e^{-3t}$$

一般解は

$$X = \underline{(C_1 + C_2 t) e^{-3t}}$$

例題2 定数係数2階同次線形常微分方程式

$$(3) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$$

基本解は

$$X_1 = e^t \cos \sqrt{2}t$$

$$X_2 = e^t \sin \sqrt{2}t$$

一般解は

$$X = \underline{e^t (C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t)}$$

$$(4) \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 0 \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 0\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm \omega i$$

基本解は

$$X_1 = \cos \omega t$$

$$X_2 = \sin \omega t$$

一般解は

$$X = \underline{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}$$

直線上の運動



位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$$x(t)$$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

加速度を表す

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

微分

積分

微分

積分

積分すると積分定数が必要
⇒初期条件(初期位置、初速度)

1次元(直線上)の運動の場合、
運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f}{m}$$

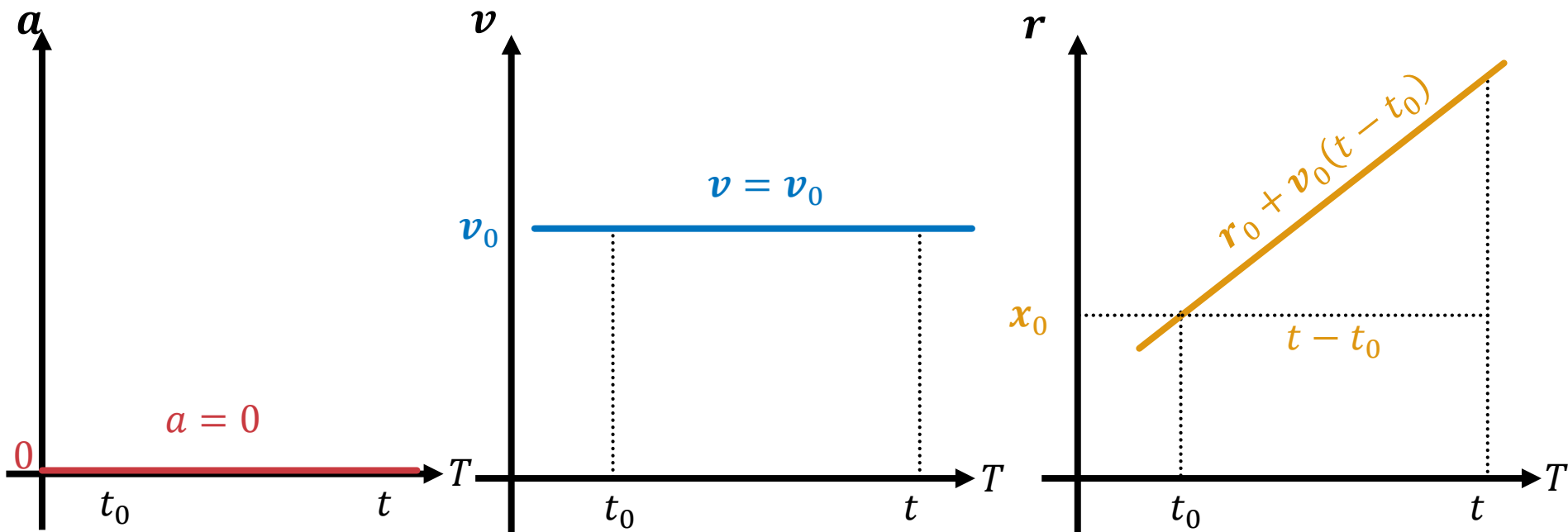
その運動を支配している
加速度が分かれば、
速度や変位は計算できる

等速運動 (uniform motion)

等速運動 --- 速度 v が一定 ($v = v_0$) $\Rightarrow$ 加速度 $a = 0 \Rightarrow$ 力 $f = 0$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t 0 dT = v_0$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t v_0 dT = r_0 + v_0(t - t_0)$$



厳密な等速運動はほとんど起こらない。

速度が変化する運動を平均的な動きとして簡素化するとき用いられる。

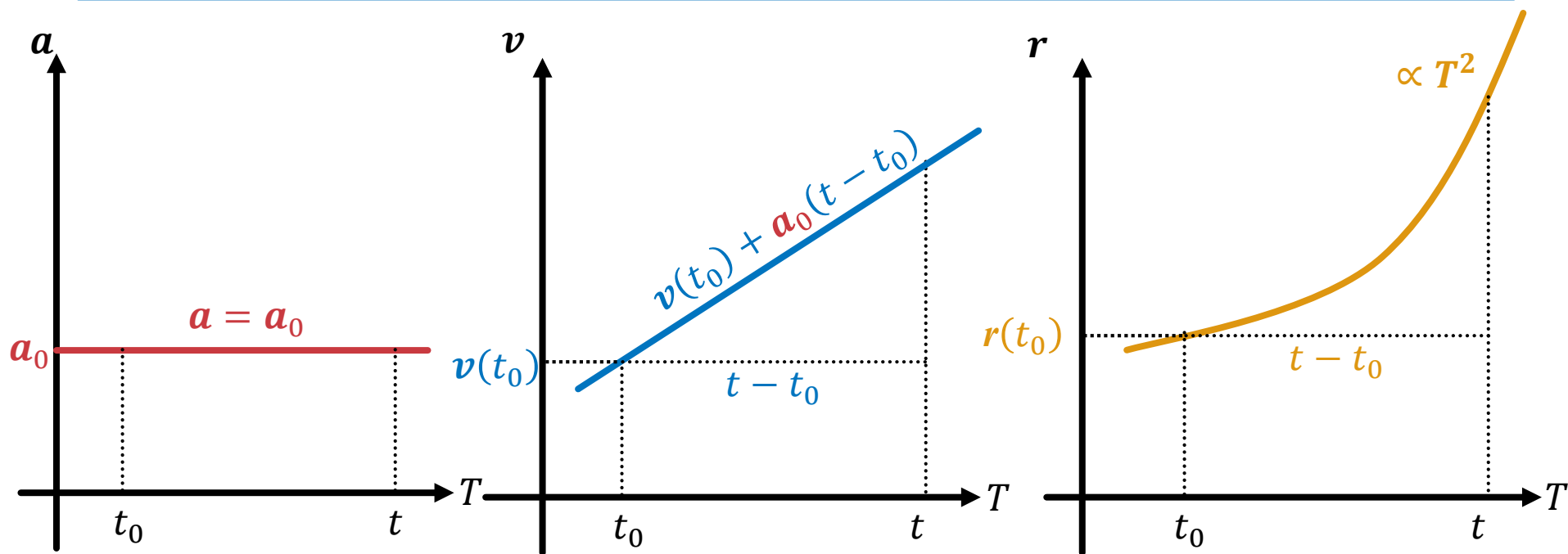
等加速度運動 (uniformly accelerated motion)

等加速度運動 --- 加速度 a が一定 ($a = a_0$)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t a_0 dT = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t \{v_0 + a_0(t - t_0)\} dT$$

$$= r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2$$



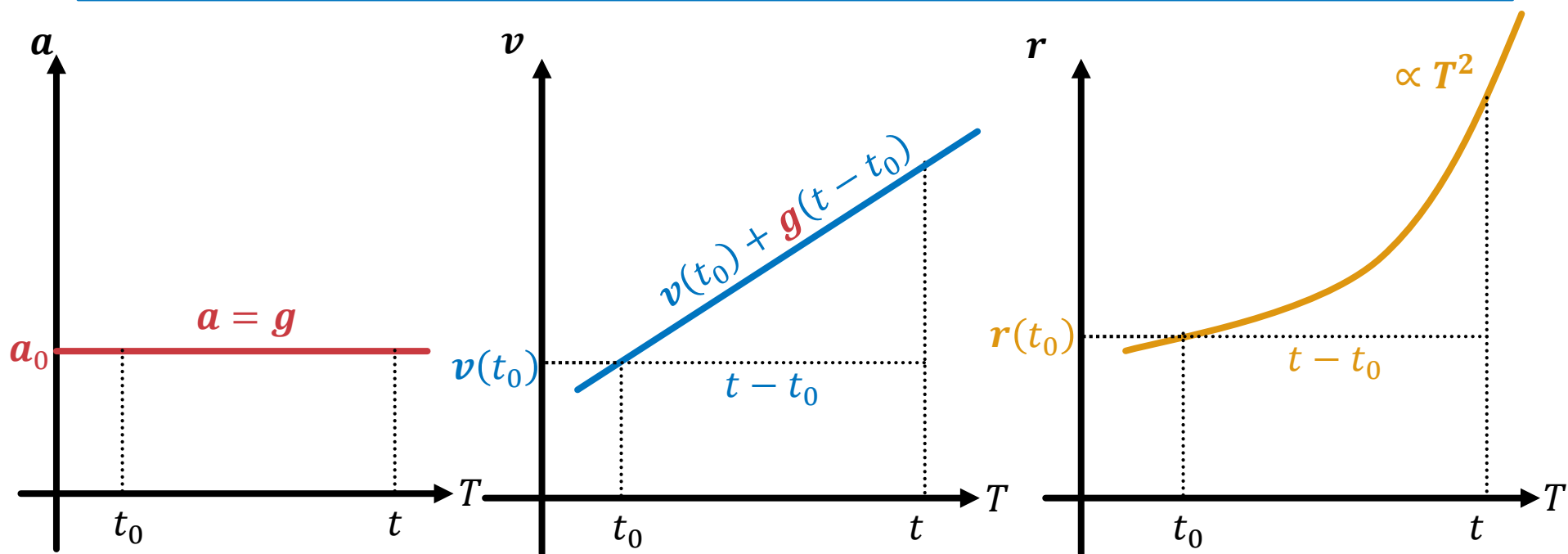
自由落下 (free fall)

自由落下運動 --- 加速度が重力加速度 g で一定 ($g = 9.8 [\text{m/s}^2]$:地球上では)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t g dT = v_0 + g(t - t_0)$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t \{v_0 + g(t - t_0)\} dT$$

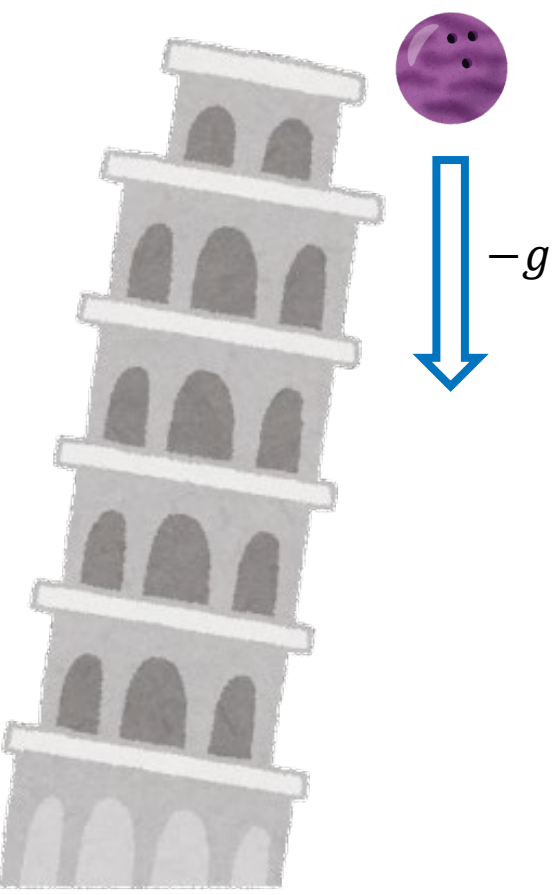
$$= r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$$



例題4 [自由落下]

ピサの斜塔（高さ55 m）から重さ10 kgの鉄球を初速 0 で落とした。地面に当たるまでの時間はいくらか。また地面に衝突するときの球の速度はいくらか。空気抵抗は無視する。

下向きの加速度 g の運動であり、初速度は 0、初期位置は h とすると、



$a =$	$-g$	 時間 t で積分 時間 t で積分	
$v =$	0 初速度 0		$-gt$
$x =$	h 初期位置 h		$-\frac{1}{2}gt^2$

塔の高さが 55 m であるから

$$0 = 55 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 55}{9.8}} = 3.35 \text{ [s]}$$

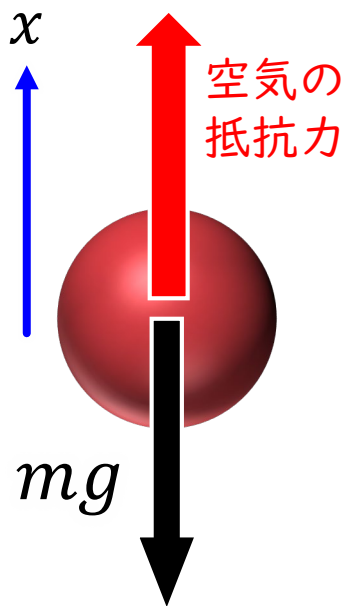
$$\therefore \underline{3.4 \text{ [s]}}$$

この時の速度は

$$\begin{aligned}
 v &= -gt \\
 &= -9.8 \times 3.35 \\
 &= 32.8 \text{ [m/s]}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{33 \text{ [m/s]}}$$

空気抵抗を受ける自由落下



空気抵抗 (粘性抵抗) は、その起源にかかわらず

速度が小さいときは、速さに比例した

速度が大きいときは、速さの2乗に比例した 抵抗を受ける

速さに比例する場合を考える

速さに比例した抵抗力は $-m\gamma v$ (γ は正の定数) とかける
運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - m\gamma v$$

m で割ってまとめると

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = -g - \gamma v$$

$$\frac{d}{dt} v = -\gamma v - g$$

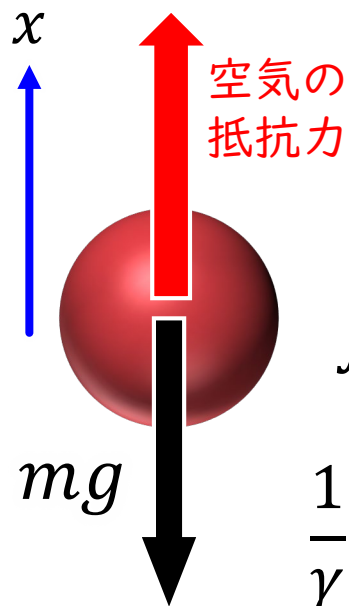
これを変数分離形の
微分方程式として解く

左辺には v のみ

右辺には t のみを集めて

$$\frac{dv}{\gamma v + g} = dt$$

空気抵抗を受ける自由落下



$$\frac{dv}{\gamma v + g} = -dt$$

$$\int \frac{1}{\gamma v + g} dv = - \int 1 dt$$

$$\frac{1}{\gamma} \log|\gamma v + g| = -t + C_1$$

$$\log|\gamma v + g| = -\gamma t + \gamma C_1$$

$$|\gamma v + g| = e^{-\gamma t + \gamma C_1}$$

$$= e^{\gamma C_1} e^{-\gamma t}$$

$$\gamma v + g = \pm e^{\gamma C_1} e^{-\gamma t}$$

$\pm e^{\gamma C_1} \rightarrow C$ と置き直して

$$\gamma v + g = C e^{-\gamma t}$$

$$v = \frac{1}{\gamma} \{C e^{-\gamma t} - g\}$$

: 一般解

$v(0) = 0$ とすると

$$C = g$$

$$\therefore v = \frac{g}{\gamma} \{e^{-\gamma t} - 1\} \quad : \text{特解}$$

終端速度と緩和時間

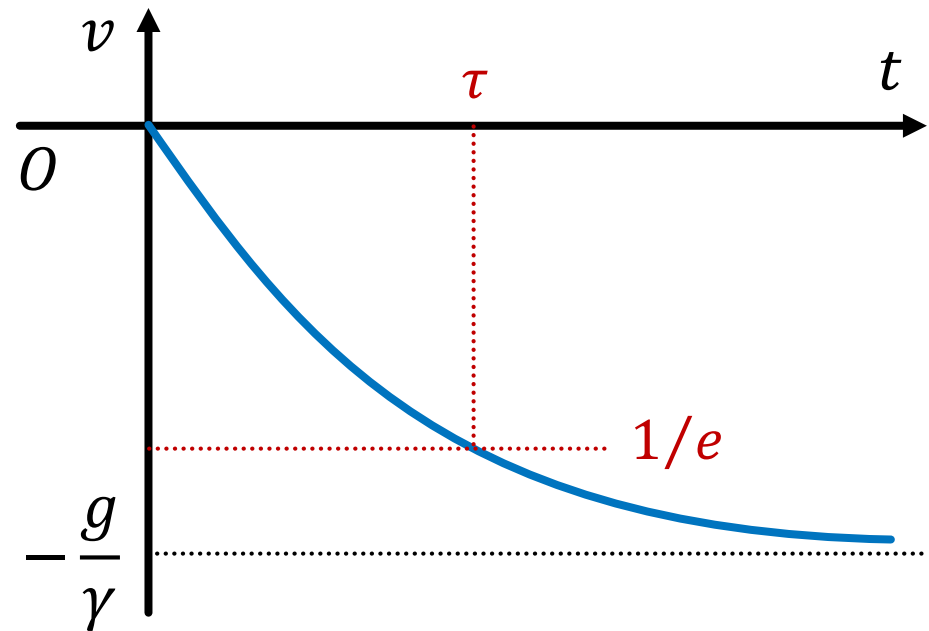
$$v = \frac{g}{\gamma} \{e^{-\gamma t} - 1\}$$

$t \rightarrow \infty$ での速度を
終端速度 (terminal velocity)
 v_{term} という

$$v_{term} = \left| -\frac{g}{\gamma} \right| = \frac{g}{\gamma}$$

終端速度に達する時間の
指標 (時定数) を
緩和時間 (relaxation time) τ という

$$v = \frac{g}{\gamma} \{e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\} \quad \tau = \frac{1}{\gamma}$$



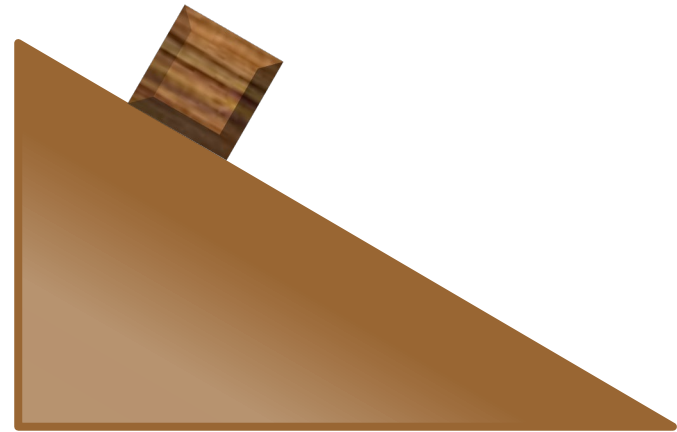
一般にexpで変化する物理量で
 $1/e$ になるまでの時間を緩和時間という

斜面に沿う運動（摩擦なし）

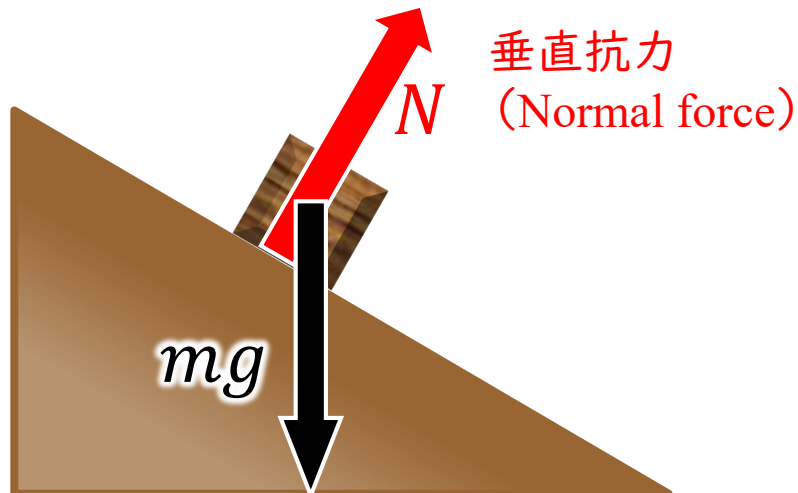
滑らかな斜面を滑り下りる物体

運動方程式の立て方

- ① 物体に力を探し尽くす
- ② 状況を理想化する
- ③ 適切な軸を選ぶ
- ④ 運動方程式を立てる

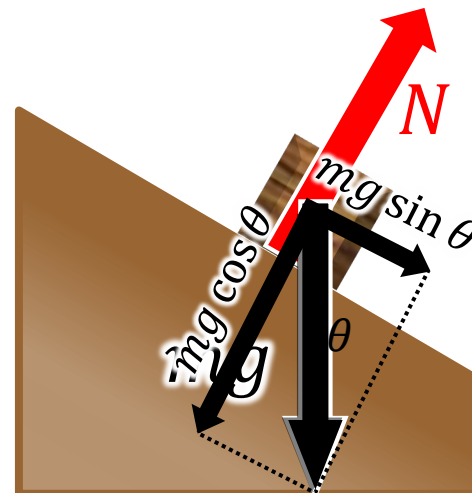


① 物体に力を探し尽くす



② 状況を理想化する

→ めり込まない、飛ばない、倒れない

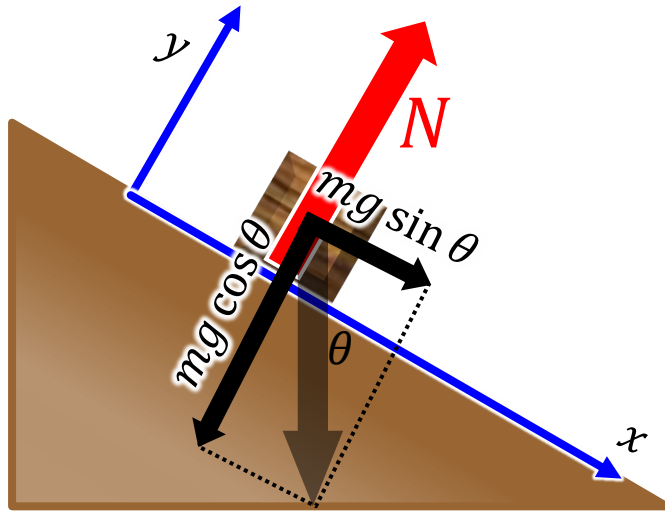


$$N = mg \cos \theta$$

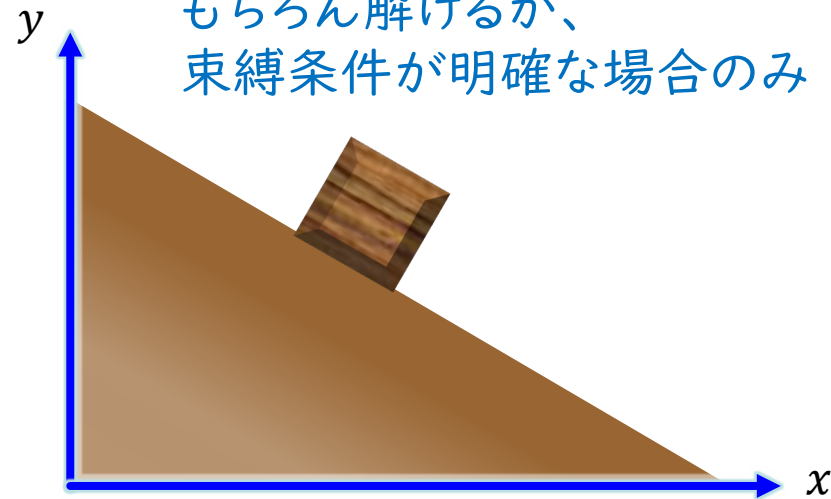
束縛条件
(binding
condition)

斜面に沿う運動（摩擦なし）

③ 適切な軸を選ぶ



このような軸をとっても
もちろん解けるが、
束縛条件が明確な場合のみ



④ 運動方程式を立てる

$$x: m\ddot{x} = mg \sin \theta$$

$$y: m\ddot{y} = -mg \cos \theta + N$$

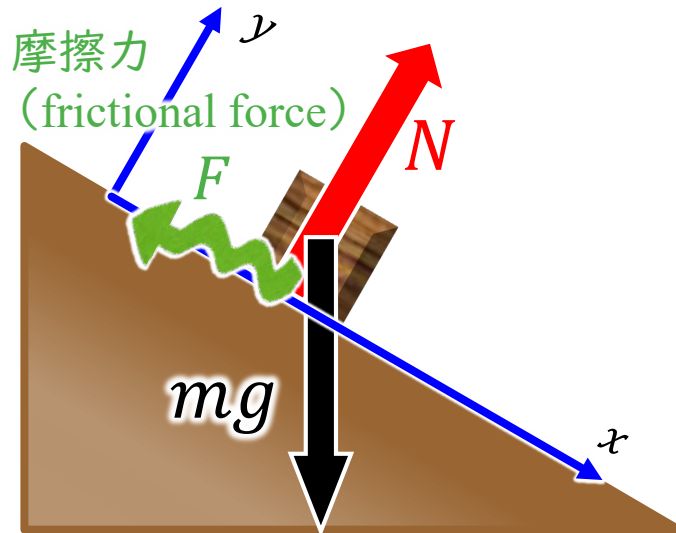
束縛条件より $\ddot{y} = 0$

$$\ddot{x} = g \sin \theta$$

斜面に沿う運動（摩擦あり）

摩擦がある斜面を滑り下りる物体

① 物体に力を探し尽くす



② 状況を理想化する

束縛条件は同じ

$$N = mg \cos \theta$$

③ 適切な軸を選ぶ 同じ

④ 運動方程式を立てる

$$x: m\ddot{x} = mg \sin \theta - F$$

静止している

$$0 = mg \sin \theta - F$$

$$F = mg \sin \theta$$

最大静止摩擦係数

(maximum static frictional force)

滑り出す

$$0 = mg \sin \theta_m - F_m$$

$$F_m = mg \sin \theta_m$$

摩擦角

(friction angle)

滑り下りる

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta - F'$$

$$\ddot{x} = g \sin \theta - \frac{F'}{m}$$

動摩擦係数

(dynamic frictional force)

斜面に沿う運動（摩擦あり）

静止している

$$F = mg \sin \theta$$

滑り出す

$$F_m = mg \sin \theta_m$$

滑り下りる

$$\ddot{x} = g \sin \theta - \frac{F'}{m}$$

最大静止摩擦係数
(maximum static frictional force)

摩擦角
(friction angle)

動摩擦係数
(dynamic friction force)

最大摩擦係数 = F_0

$$= \mu N$$

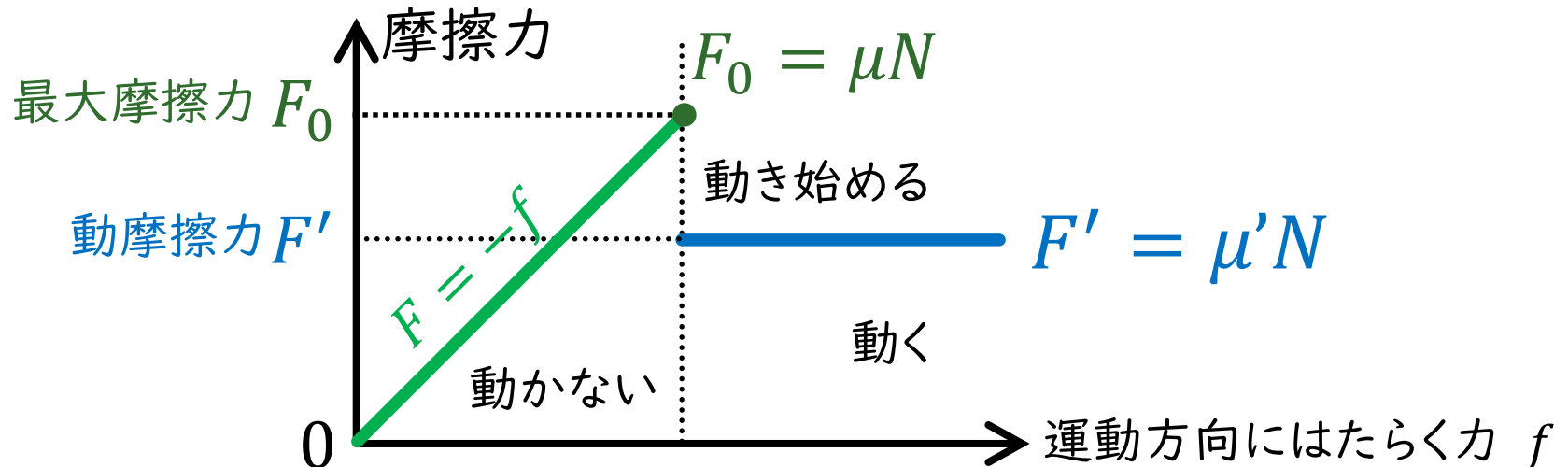
静止摩擦係数 垂直抗力

$$\mu > \mu'$$

動摩擦係数 = F'

$$= \mu' N$$

(運) 動摩擦係数 垂直抗力



例題Ⅰ (教科書P.36)

はじめ静止していた物体が滑らかな斜面に沿って
距離 l だけ滑り下りたときの速度を求めよ。
高さ h だけ下りたときの速度はどれほどか

- ① 物体に力を探し尽くす
- ② 状況を理想化する
- ③ 適切な軸を選ぶ
- ④ 運動方程式を立てる

$$\frac{dx}{dt} = v = \int g \sin \theta \, dt = g \sin \theta \cdot t + C_1$$

$$v(t=0) = 0 \text{ より } C_1 = 0 \therefore v = g \sin \theta \cdot t$$

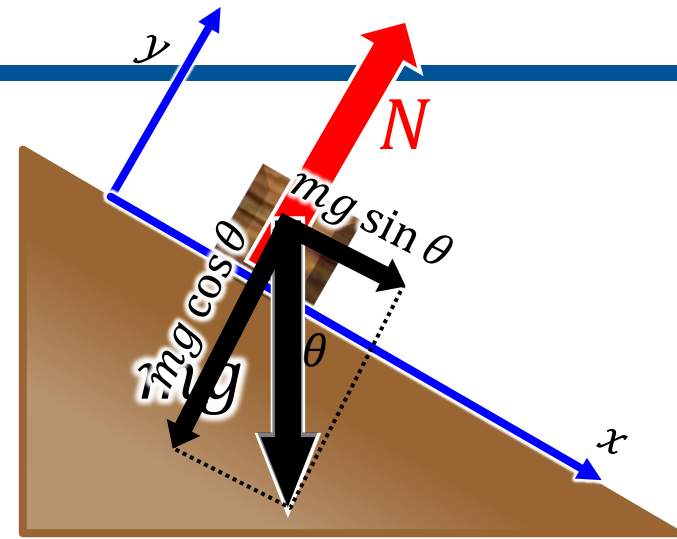
$$x = \int g \sin \theta \cdot t \, dt = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2 + C_2$$

$$x(t=0) = 0 \text{ より } C_2 = 0 \therefore x = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2$$

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta$$

$$\therefore \ddot{x} = g \sin \theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin \theta$$



距離 l だけ滑り下りるまでの時間を
 $t = T$ とすると

$$l = \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot T^2$$

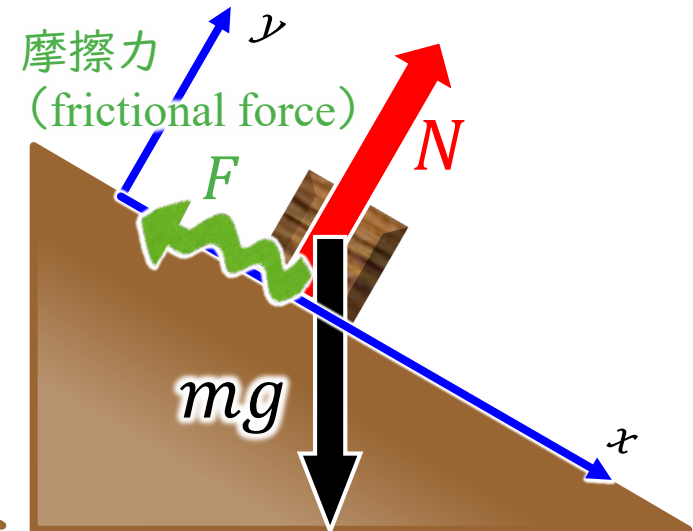
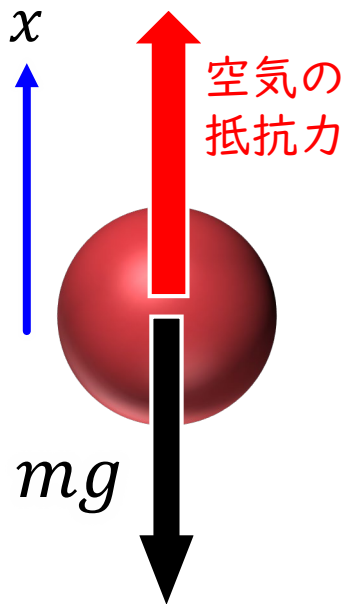
$$T = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}}$$

$$\therefore v(T) = \sqrt{2lg \sin \theta}$$

$h = l \sin \theta$ であるから
このときの速度 V は

$$\therefore V = \sqrt{2gh}$$

【本日のポイント】



運動方程式の立て方

- ① 物体に力を探し尽くす
- ② 状況を理想化する
- ③ 適切な軸を選ぶ
- ④ 運動方程式を立てる

