

力学 I

(第2回) 運動の法則

【今日の内容】

オイラーの公式

運動の三法則

- 慣性の法則 (第一法則)
- 運動方程式 (第二法則)
- 作用・反作用の法則 (第三法則)

【先週の復習】



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$r(t)$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

加速度を表す

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

微分

積分

微分

積分

積分すると積分定数が必要
⇒初期条件(初期位置、初速度)

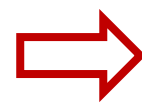
実験的に変位や速度変化を計測、関数化できれば、
その運動を支配する加速度を求めることができる

その運動を支配している加速度が分かれば、
速度や変位は計算できる

オイラーの公式

オイラーの公式 (Euler's formula)

- 自然対数の底 e (ネイピア数、オイラー数) $\rightarrow 2.718 \dots$
- 虚数単位 $i \rightarrow i^2 = -1$
- 三角関数 $\cos, \sin$



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

世界で一番美しい数式

【導出】

複素数 $z = x + iy$ に対して、
複素指数関数 e^z の定義は

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

この式の定義については、マクローリン展開
によって理解されるので各自学習されたし
(微分積分Iでも扱う)

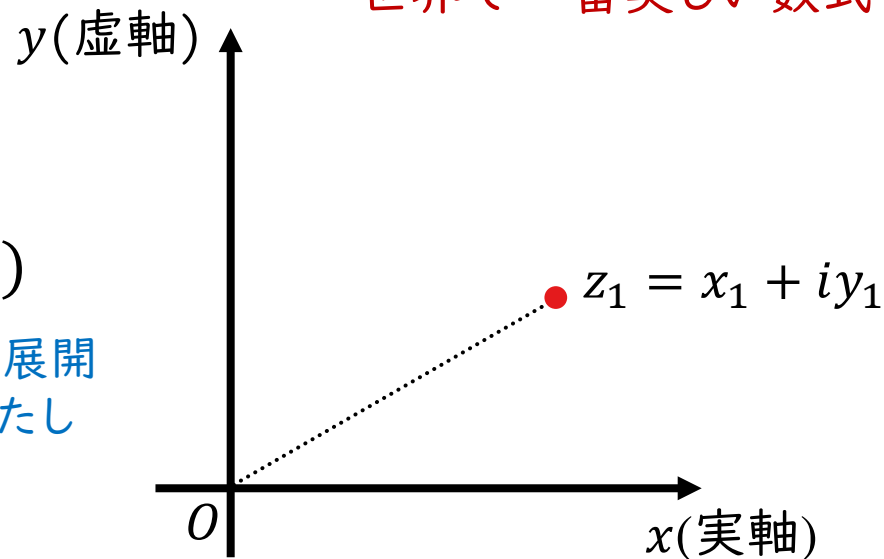
ここで $x = 0, y = \theta$ とすれば、

$$e^{0+i\theta} = e^0 (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore \underline{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$



回転を表す複素数



オイラーの公式

オイラーの公式 (Euler's formula)

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_1' = x_1' + iy_1'$$

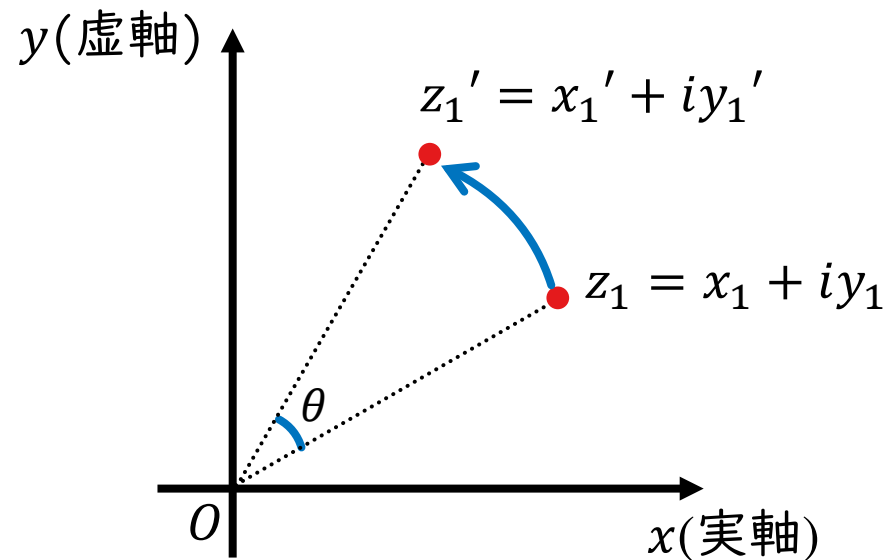


$$z_1' = e^{i\theta} z_1 \quad \text{とおけるならば}$$

z_1' は z_1 を原点 O 周りに
 θ 回転したものである。

$$\begin{aligned} (i) \quad (e^{i\theta})^{-1} &= e^{-i\theta} \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad (e^{i\theta})^n &= e^{i(n\theta)} \\ &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$



オイラーの公式

$$e^{+i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{array}{r} + \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline e^{+i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \end{array}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{+i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{+i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{array}{r} - \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline e^{+i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \end{array}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{+i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

【オイラーの公式を用いた加法定理】

$$e^{i(x \pm y)} = \cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y) \quad \leftarrow$$

$$e^{i(x \pm y)} = e^{ix} e^{\pm iy}$$

$$= (\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \sin y)$$

$$= (\cos x \cos y \mp \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y \pm \cos x \sin y) \quad \leftarrow$$

$$\therefore \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\therefore \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

オイラーの公式

【オイラーの公式を用いた三角関数の微積分】

$$\frac{d}{dt} \cos x = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin x$$

$$\frac{d}{dt} \sin x = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \int \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \, dx = \frac{e^{ix}}{2i} - \frac{e^{-ix}}{2i} + C = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + C = \sin x + C$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \, dx &= \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \, dx = \frac{e^{ix}}{2i \times i} - \frac{e^{-ix}}{2i \times (-i)} + C = -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} + C \\ &= -\cos x + C \end{aligned}$$

例題Ⅰ オイラーの公式

不定積分 $\int \sin^2 x \, dx$ をオイラーの公式を用いて求め、
倍角の定理で求めたものと同じであることを確認せよ。

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx & \int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \int -\frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{4} dx & &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\
 &= -\frac{e^{2ix}}{8i} + \frac{e^{-2ix}}{8i} + \frac{1}{2}x + C & &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} + \frac{1}{2}x + C & &= -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}x + C \\
 &= -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}x + C & & \text{よって確かめられた}
 \end{aligned}$$

第一法則 (The first law of motion) : 慣性の法則

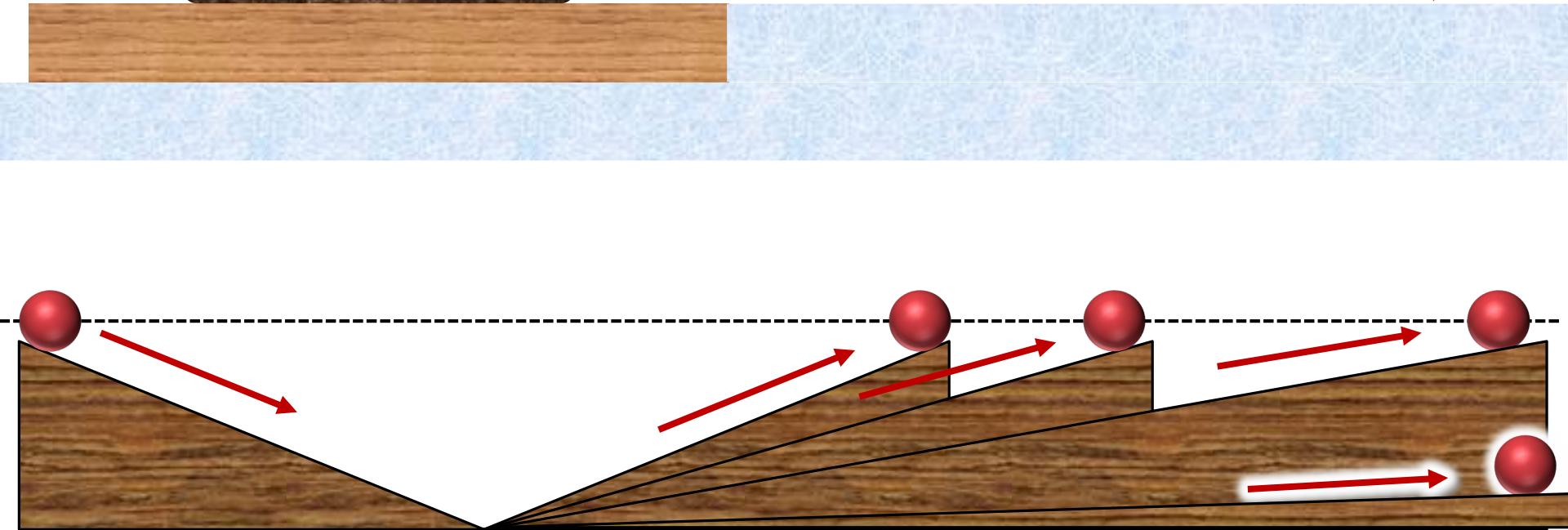
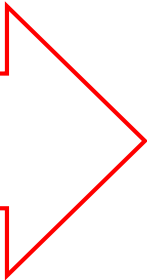
慣性の法則 (law of inertia)

すべての物体は、外部から力を加えられない限り、
静止している物体は静止状態を続け、
運動している物体は等速直線運動を続ける。



等速直線運動

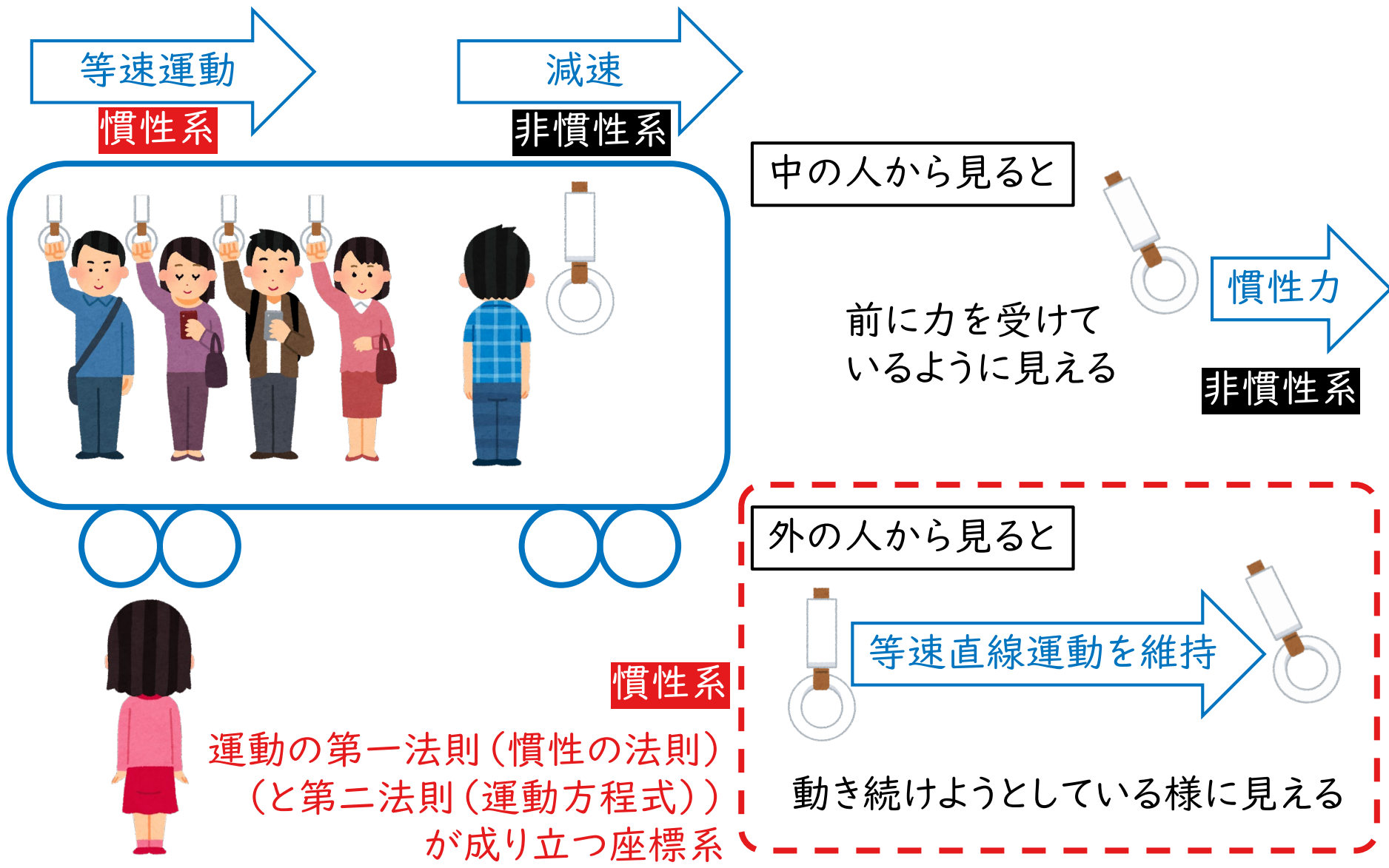
Uniform Linear Motion (ULM)

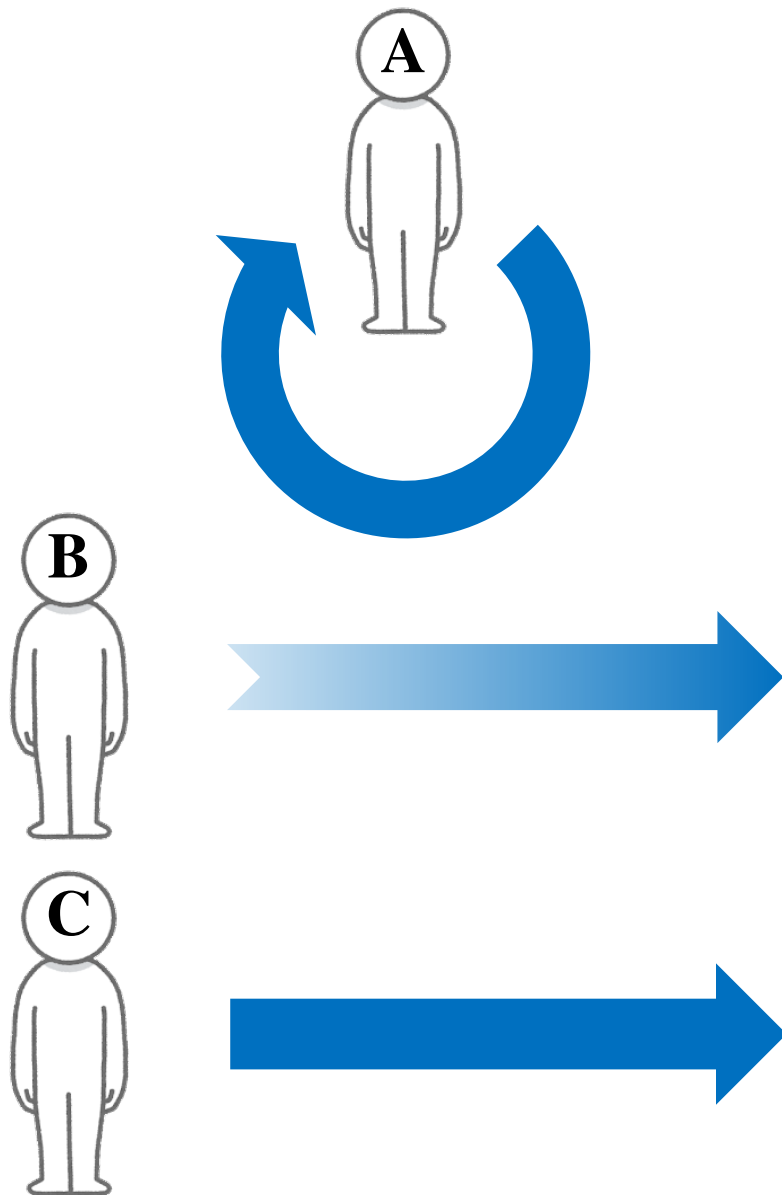


角度ゼロの極限を考えると、無限に転がり続けるはず $\Rightarrow$ 動き続ける

慣性系(Inertial system)

等速運動の場合、“どこから見て”等速であるかというのが、重要。





次の下線部に慣性系、非慣性系の
いずれかを入れよ。

Aさんからみた世界は_____である。

Bさんからみた世界は_____である。

Cさんからみた世界は_____である。

Dさんからみた世界は_____である。



第二法則 (The second law of motion) : 運動の法則

運動の法則 (law of motion)

慣性系 (第1法則が成り立つ座標系) において
運動量が時間によって変化する割合は
その物体にはたらく力に比例し、その力の向きに生じる。

古典力学における運動量 p (momentum) の定義は質量と速度の積に等しい

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

運動量 p の時間変化は
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}$$

第2法則によりこれは力 F に比例するので、比例定数を1とすれば、

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad : \text{運動方程式 (equation of motion)}$$

または

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

2階の微分方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

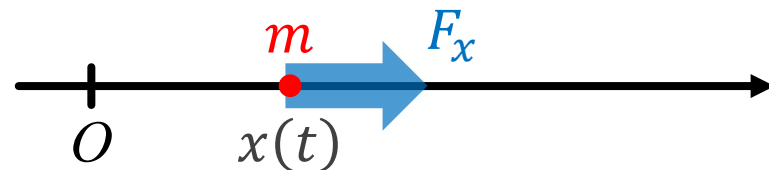
1階の微分方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

F が一定の場合

簡単のため1次元で考える

$F(=F_x)$ が一定、 a が一定の運動



$$ma = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_x}{m} \quad \text{2階の微分方程式}$$

$$\Rightarrow m \frac{dv_x}{dt} = F_x \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \quad \text{1階の微分方程式}$$

→ 両辺を t で積分する

$$\Rightarrow \int \frac{dv_x}{dt} dt = \int \frac{F_x}{m} dt \quad \text{:不定積分}$$

F_x が一定(t によらない)ので、定数扱い

$$\Rightarrow v_x = \frac{F_x}{m} t + A$$

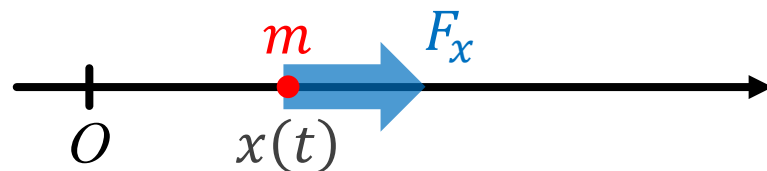
A は積分定数(物理においてはただの定数ではない)

$t = 0$ とすると A は初速度 v_{x0} を表す。

F が一定の場合

簡単のため1次元で考える

$F(=F_x)$ が一定、 a が一定の運動



$$v_x(t) = \frac{F_x}{m}t + A \quad \begin{array}{l} A \text{ は積分定数} \\ \text{(物理においてはただの定数ではない)} \end{array}$$

$t = 0$ とすると A は初速度 v_{x0} (初期条件)を表す。

$$v_x(t) = \frac{F_x}{m}0 + A = v_{x0} \quad \therefore v_x(t) = \frac{F_x}{m}t + v_{x0}$$

➡ もう一度両辺を t で積分すれば変位が得られる

$v_x(t)$ は一次関数

$$x(t) = \int v_x dt = \int \left\{ \frac{F_x}{m}t + v_{x0} \right\} dt = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + v_{x0}t + B$$

$t = 0$ とすると B は初期位置 x_0 (初期条件)を表す。

B は積分定数

$$x(0) = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} 0^2 + v_{x0}0 + B = x_0 \quad \therefore x(t) = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + v_{x0}t + x_0$$

$x(t)$ は2次関数

一般の F の場合

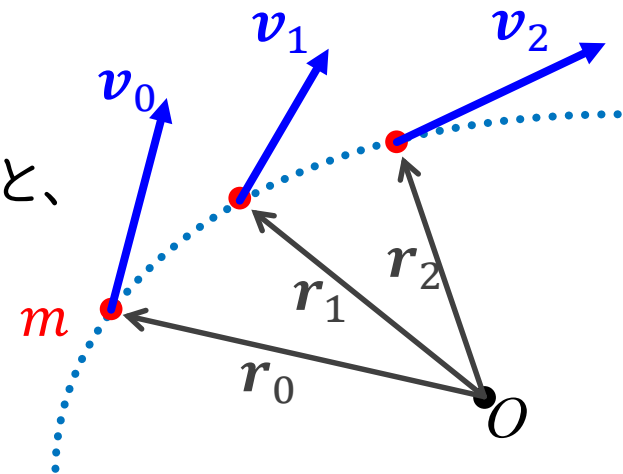
F が時々刻々と変化する一般的な場合
(各位置、各時間で与えられる場合)

$t = 0$ で位置 $\mathbf{r}_0$ と速度 $\mathbf{v}_0$ が与えられたとすると、
微小時間 τ 後の位置は、

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \tau$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0} &= \mathbf{v}_0 \tau \\ &= d\mathbf{r} &= dt \end{aligned}$$

これは、 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ に等しい



速度 $\mathbf{v}_0$ が微小時間 τ 後に $\mathbf{v}_1$ になったとすると、運動の法則より

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_0 \Rightarrow d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} dt \Rightarrow \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \tau \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}_0}{m} \tau$$

同様にすれば、

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \tau$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{F}_1}{m} \tau$$

となって、順次運動が決定される

例題3 運動の法則

はじめ静止していた物体が摩擦の無視できる斜面を滑り落ちるとき、その距離は経過した時間 t の2乗に比例する。斜面に沿って下向きに x 方向を取ると、距離と時間の関係は $x = at^2$ と書ける。次の問いに答えよ。

- (1) 物体の質量を m とするとき、物体の運動量の大きさを求めよ。

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{at^2\} = 2at$$

であるから、運動量 p の大きさは $p = mv = \underline{2mat}$

- (2) 物体にはたらく x 方向の力の大きさを求めよ。

$$\text{運動方程式 より、 } F = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2}\{at^2\} = m \frac{d}{dt}\{2at\} = \underline{2ma}$$

または

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\{2mat\} = \underline{2ma}$$

第三法則 (The third law of motion) : 作用反作用の法則

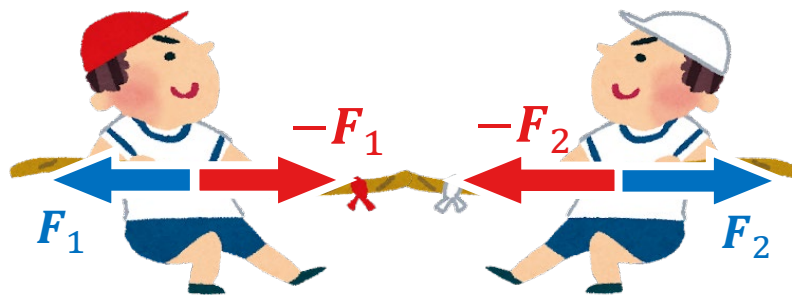
作用反作用の法則 (Law of action and reaction)

物体Aが物体Bに力 F を及ぼすときは、
物体Bは必ず物体Aに対して、
大きさが等しく逆向きの力 $-F$ を及ぼす



注意: 力のつり合いと
混同しないこと!

F_1 と $-F_1$ は、作用・反作用
 F_2 と $-F_2$ (綱と手との間)



$F_1 = F_2$ ならば、
力のつり合い
(綱の運動を考える場合)

第三法則（作用反作用の法則）

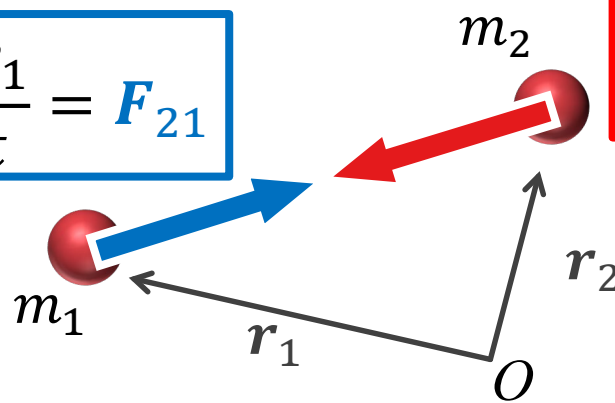
作用反作用の法則 (Law of action and reaction)

物体Aが物体Bに力 F を及ぼすときは、
物体Bは必ず物体Aに対して、
大きさが等しく逆向きの力 $-F$ を及ぼす



$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F_{21}$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = F_{12}$$



作用反作用の法則より

$$F_{21} = -F_{12}$$

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F_{21} = -F_{12} = -m_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -m_2 \frac{dv_2}{dt} \quad \therefore m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

第三法則（作用反作用の法則）

作用反作用の法則 (Law of action and reaction)

物体Aが物体Bに力 F を及ぼすときは、
物体Bは必ず物体Aに対して、
大きさが等しく逆向きの力 $-F$ を及ぼす

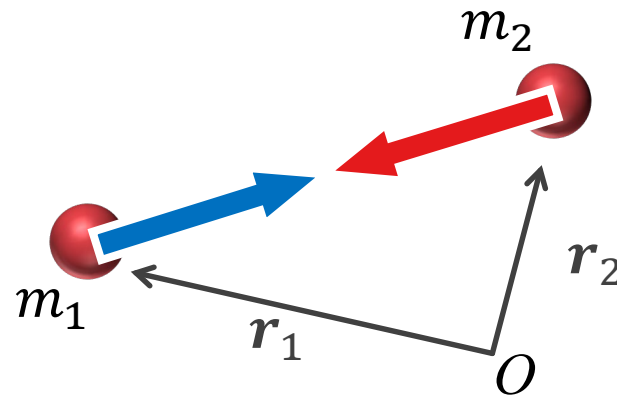
$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{Const}$$



運動量保存則 (law of momentum conservation)

質点系に働く外力の総和が0の場合、

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

運動量と力積

第二法則より

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)$$

→ 両辺を積分する

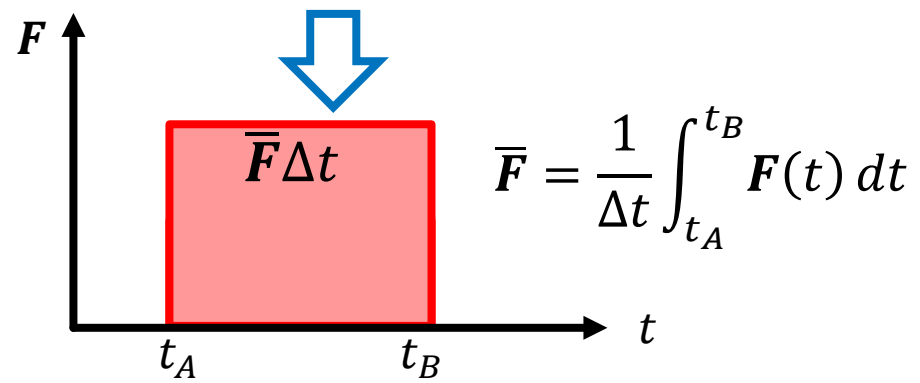
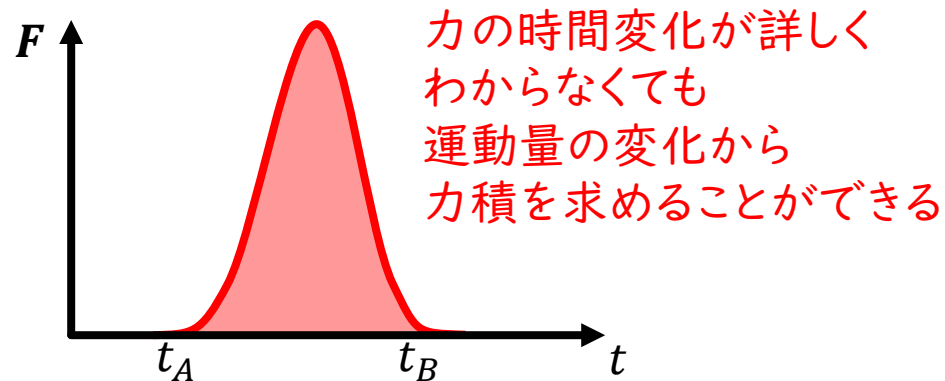
$$\int \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} dt = \int \mathbf{F}(t) dt$$

$t = t_0$ から $t = t$ まで考えると

$$\mathbf{p}(t_B) - \mathbf{p}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F}(t) dt$$

力積 (Impulse)

運動量変化は力積と等しい。



例題 (教科書P.26)

自由落体について力積が運動量の変化に等しいことを確かめよ。

落体を質点として上向きに1次元座標系をとると

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = m \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{dmv_z(t)}{dt} = \frac{dp_z(t)}{dt} = -mg$$

→ 両辺を $t = t_0$ から $t = t$ まで t で積分すると

$$\int_{t_0}^t \frac{dp_z(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^t -mg dt$$

$$[p_z(t)]_{t_0}^t$$

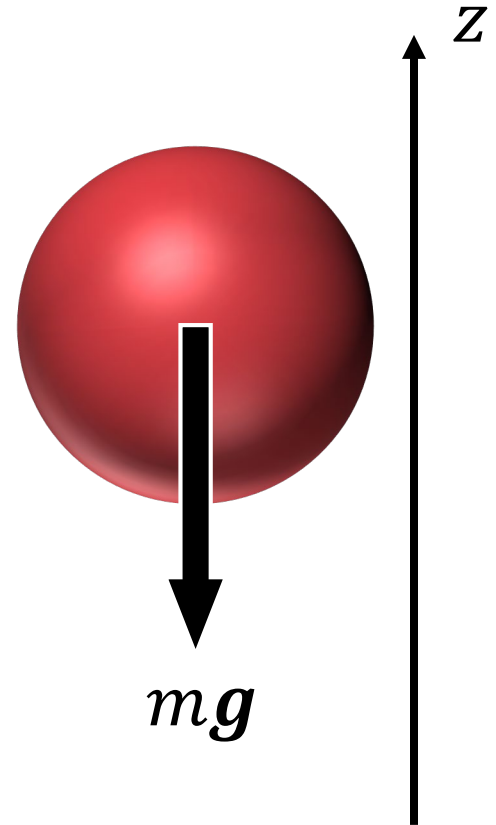
$$= p_z(t) - p_z(t_0)$$

$$[-mgt]_{t_0}^t$$

$$= -mgt - mgt_0$$

$$\therefore p_z(t) - p_z(t_0) = -mg(t - t_0)$$

→ これは力 $F = mg$ が $(t - t_0)$ の間はたらいだ力積にほかならない



例題2

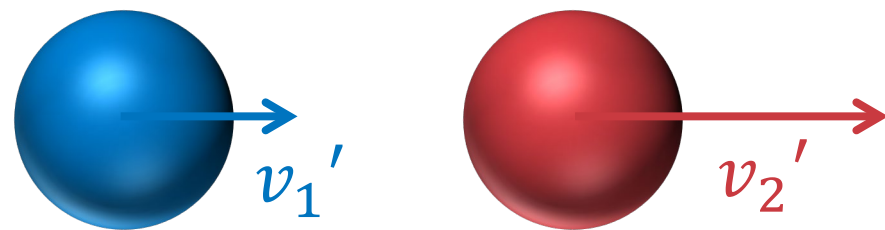
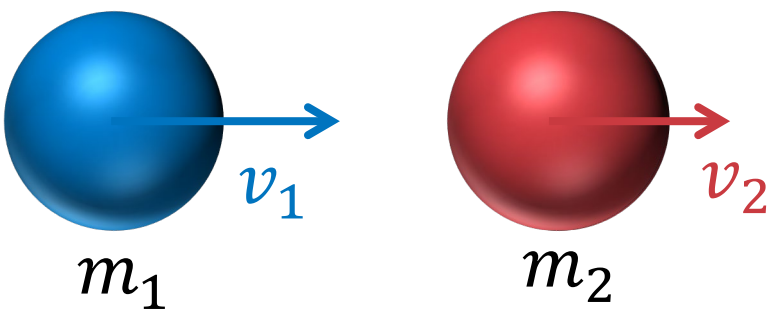
$t = 2$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(t = 2) = [-1, 2]$ をもっていた物体に、時刻 $2 \leq t \leq 4$ の範囲で力 $\mathbf{f}(t) = [1 - 2t, 3t^2]$ が作用したとき、時刻 $t = 4$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(4)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(4) - \mathbf{p}(2) &= \int_2^4 \mathbf{f}(t) dt \\ \Rightarrow \mathbf{p}(4) &= \mathbf{p}(2) + \int_2^4 \mathbf{f}(t) dt \\ &= [-1, 2] + \int_2^4 [1 - 2t, 3t^2] dt \\ &= [-1, 2] + \left[\int_2^4 (1 - 2t) dt, \int_2^4 3t^2 dt \right] \\ &= [-1, 2] + [[t - t^2]_2^4, [t^3]_2^4] \\ &= [-1, 2] + [-12 + 2, 64 - 8] \\ &= [-1, 2] + [-10, 56] &= \underline{[-11, 58]}\end{aligned}$$

演習2

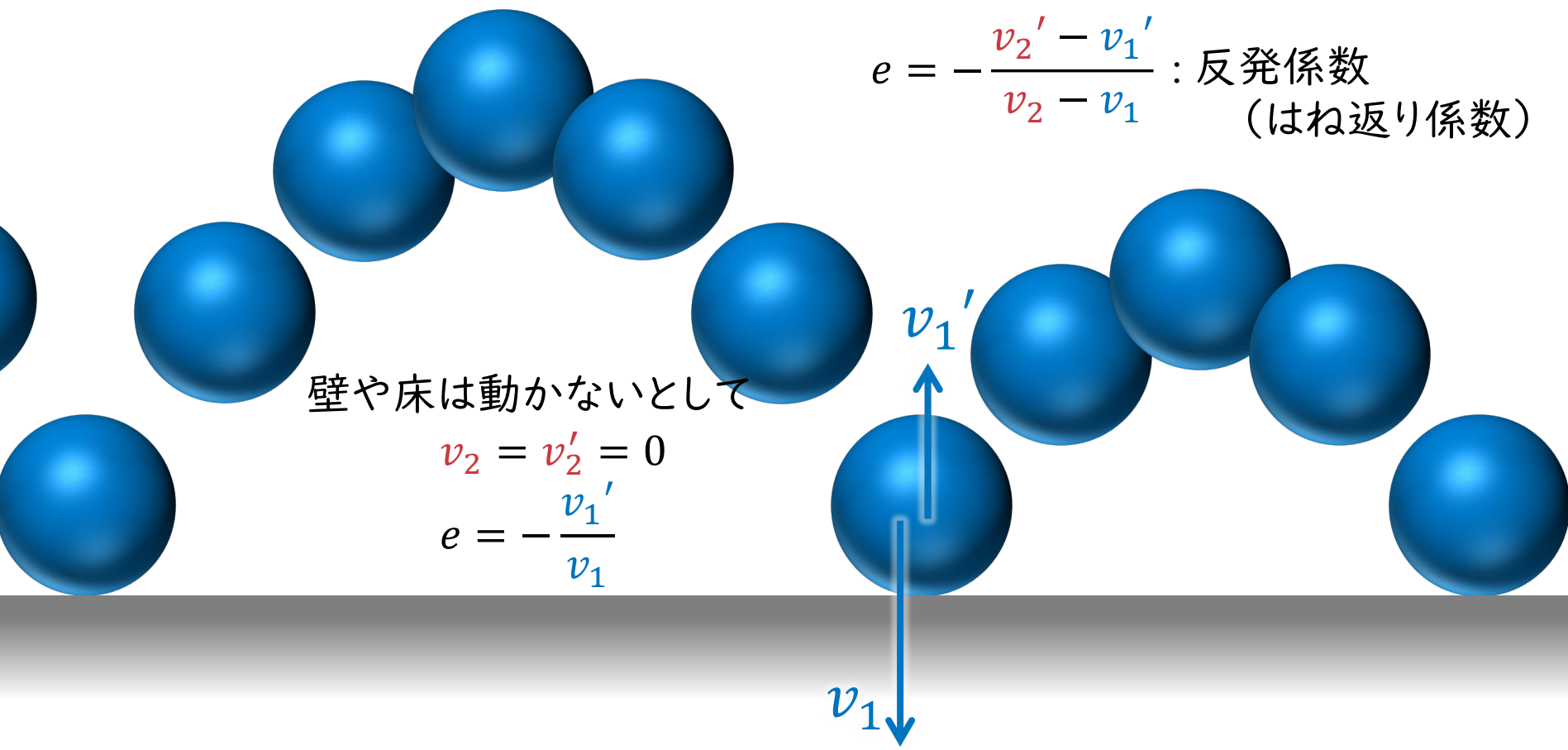
$t = 0$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(0) = [1, 0, \pi]$ をもっていた物体に、
時刻 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で力 $\mathbf{f}(t) = [\cos t, \sin t, 2]$ が作用したとき、
時刻 $t = \pi$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(\pi)$ を求めよ。

反発係数(coefficient of rebound)



衝突の前後での速度の比は一定

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} : \text{反発係数 (はね返り係数)}$$



壁や床は動かないとして

$$v_2 = v_2' = 0$$

$$e = -\frac{v_1'}{v_1}$$

反発係数

$$e = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

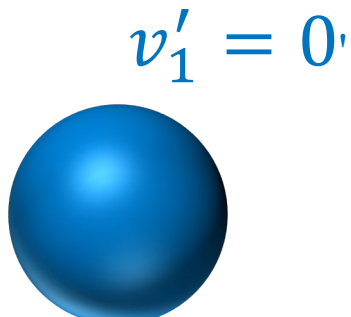
反発係数 (はね返り係数) は

$$0 \leq e \leq 1$$



$$e = 0$$

完全非弾性衝突



$$v_1' = 0$$

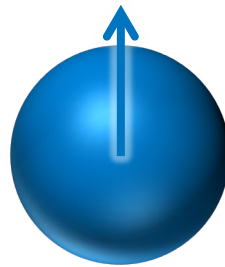
ほとんどの
エネルギーが散逸



$$0 \leq e \leq 1$$

非弾性衝突

$$v_1' < v_1$$



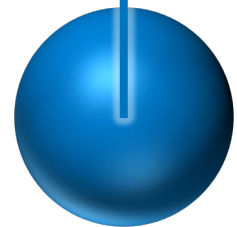
殆どがこれ
エネルギーが散逸



$$e = 1$$

完全弾性衝突

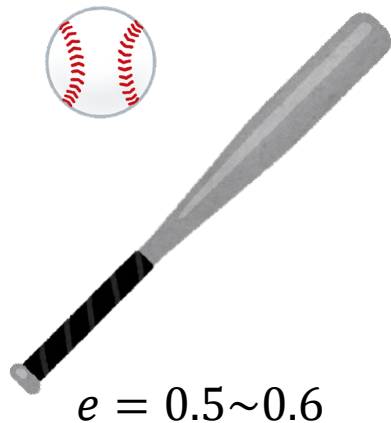
$$v_1' = v_1$$



元の高さまで
跳ね返る

反発係数の例

野球のボール
と金属バット



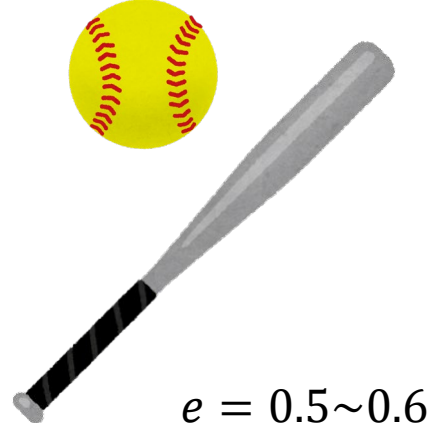
$e = 0.5 \sim 0.6$

野球のボール
と木製バット



$e = 0.3 \sim 0.5$

ソフトボール
と金属バット



$e = 0.5 \sim 0.6$

サッカーボール
と壁

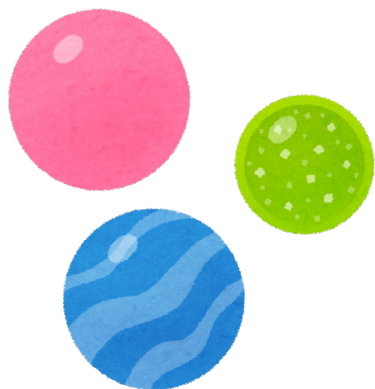


$e = 0.7 \sim 0.8$
フットサル用ボール
と壁



$e = 0.5 \sim 0.6$

スーパーボール



$e = 0.8 \sim 0.9$

ゴルフクラブと
ゴルフボール



$e < 0.83$

テニスボール
と地面



$e = 0.73 \sim 0.76$



テニスボール
とラケット

$e = 0.81 \sim 0.87$

バスケットボール
と壁(床)

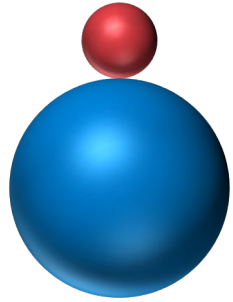


$e = 0.727 \sim 0.806$

※ただし、柔らかいボールは衝突時の変形が大きく、速度に依存して変化する

すっとびボール

別名：多段式垂直衝突球、ガリレオ砲、ボールピラミッド



③ 衝突後の速度は
運動量保存則が成立

衝突前

衝突後

$$MV' + mv_0 = MV + mv$$

② 跳ね返った大ボール
と落ちてくる小ボールが
衝突

④ また、反発係数の式は

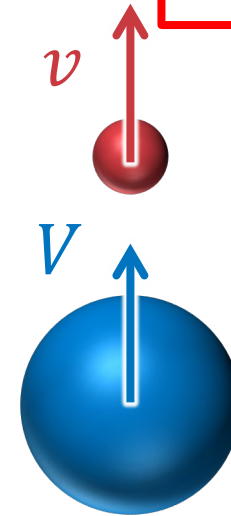
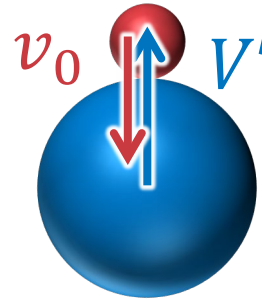
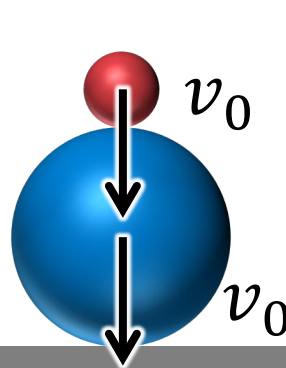
$$e_1 = -\frac{V - v}{V' - v_0}$$

① 大ボールと小ボール
が同じ速度で落下

$$e_0 = -\frac{V'}{v_0}$$

大ボールと小ボール
の間の反発係数： e_1

床と大ボールの間
の反発係数： e_0



注意：矢印は運動の方向を示しているだけでその方向を正に取っているのではない
すべて下向きを正にしていると考え

すっとびボール

別名：多段式垂直衝突球、ガリレオ砲、ボールピラミッド

$$e_0 = -\frac{V'}{v_0}$$

$$MV' + mv_0 = MV + mv$$

$$e_1 = -\frac{V - v}{V' - v_0}$$

計算省略

$$V = \frac{-e_0 M + (e_0 e_1 + e_1 + 1)m}{M + m} v_0$$

$$v = \frac{-(e_0 e_1 + e_0 + e_1)M + m}{M + m} v_0$$

簡単のため $e_0 = e_1 = 1$ とすると、

$$V = \frac{-M + 3m}{M + m} v_0 \quad v = \frac{-3M + m}{M + m} v_0$$

$M = 3m$ のとき、

$$V = 0 \quad v = -2v_0$$

エネルギーで計算すると、小ボールはもとの高さの4倍まで高く飛ぶ。

$\frac{m}{M} \rightarrow 0$ つまり、小ボールが大ボールに比べて十分小さい時、 $V \rightarrow v_0$ $v = -3v_0$

となって、このとき9倍の高さまで飛ぶ。

【本日のポイント】

運動の三法則

慣性の法則 (law of inertia)

すべての物体は、外部から力を加えられない限り、
静止している物体は静止状態を続け、
運動している物体は等速直線運動を続ける。

運動の法則 (law of motion)

慣性系（第1法則が成り立つ座標系）において
運動量が時間によって変化する割合は
その物体にはたらく**力に比例し、その力の向きに生じる。**

作用反作用の法則 (Law of action and reaction)

物体Aが物体Bに力 F を及ぼすときは、
物体Bは必ず物体Aに対して、
大きさが等しく逆向きの力 $-F$ を及ぼす

