

力学 I

(第1回) はじめに

【今日の内容】

- 初等力学のための数学的準備
(スカラー、ベクトル、内積)
- 単位と次元、次元解析
- 運動の記述
(物体、時間、位置、速度、加速度)
: 微分と積分の復習

スカラーとベクトル

スカラー (*scalar*)

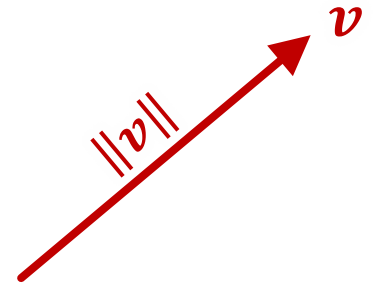
大きさだけをもち、方向には関係しない量

質量 m 、長さ l 、エネルギー E 、温度 T 、時間 t 、電荷 e
ベクトル A の大きさ $\|A\|$ (ノルム)

ベクトル量である速度 v に対して速さ $\|v\|$ はスカラー量である

ベクトル (*vector*)

大きさと向きをもった量、有向量ともいう
これまでは有向線分 ($\rightarrow$) で表してきたが、
物理では太字で表すことが多い。



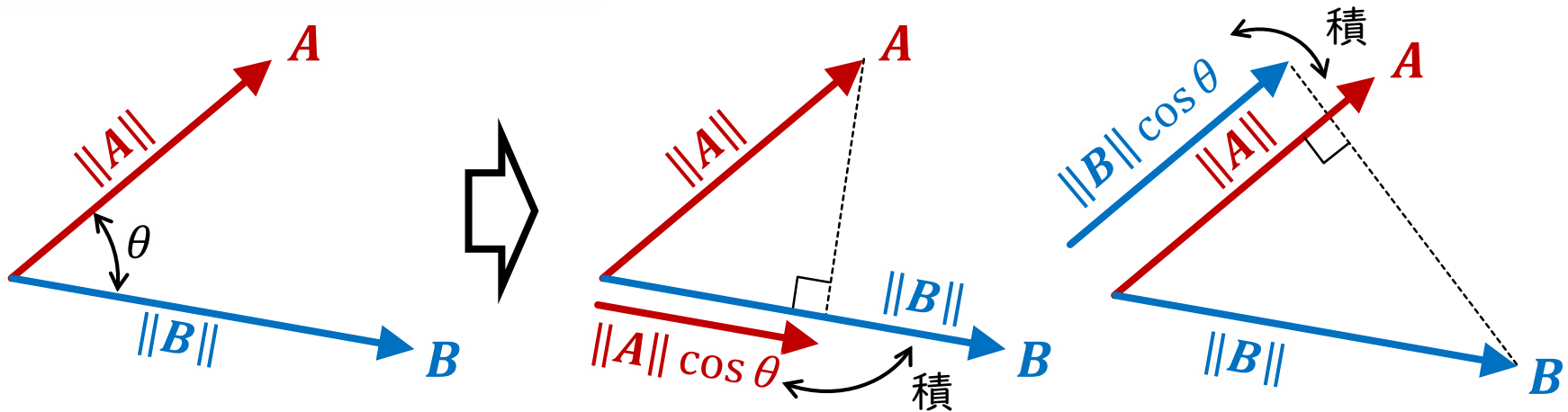
位置ベクトル x, r 、速度 v 、加速度 $a = \frac{d^2 r}{dt^2}$ 、
力 F 、運動量 p 、

ベクトルの内積

内積 (Scalar product, Inner product) 2つのベクトルから定義されるスカラー量

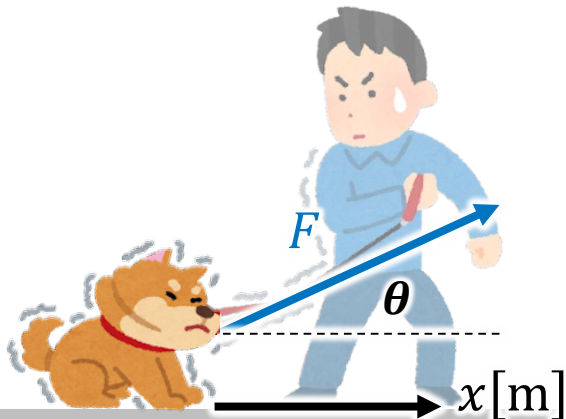
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

2次元、3次元空間 (ユークリッド空間; 後述) における定義
4次元以上 (ミンコフスキー空間など) では異なる定義となる



内積の物理的意味は、一方のベクトル量のもう一方のベクトルへの寄与 (射影)

正射影 (Orthogonal projection)
という。



(例) 仕事

$$W = F \cos \theta \cdot x$$

単位ベクトルと規格化

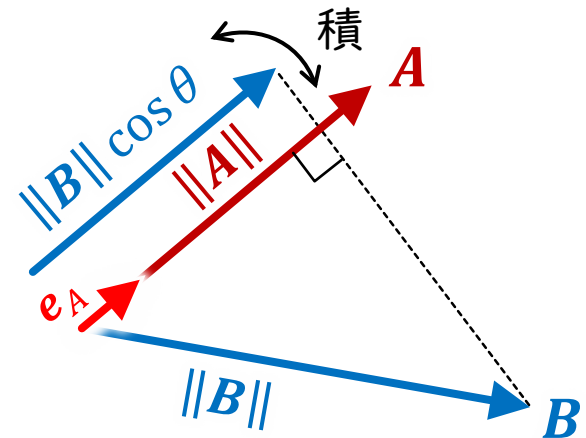
単位ベクトル (unit vector)

ベクトル A と同じ向きをもつ大きさ1のベクトル

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}, \quad \|\mathbf{e}_A\| = 1$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_A = \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{e}_A\| \cos \theta = \|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

単位ベクトルとの内積は射影の大きさを表す



ベクトルの大きさ(ノルム)を1にすることを
規格化 (Normalization) という。(数学では正規化)

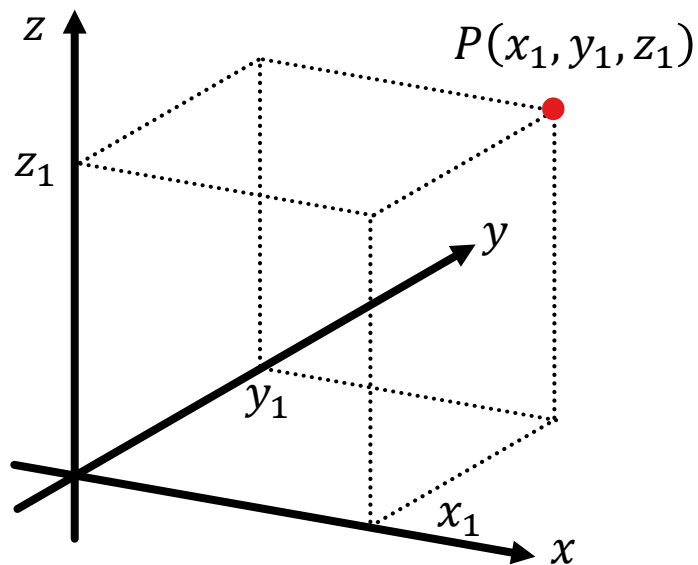
⇒ベクトル B のベクトル A への正射影の大きさは

$$\|\mathbf{B}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|}$$

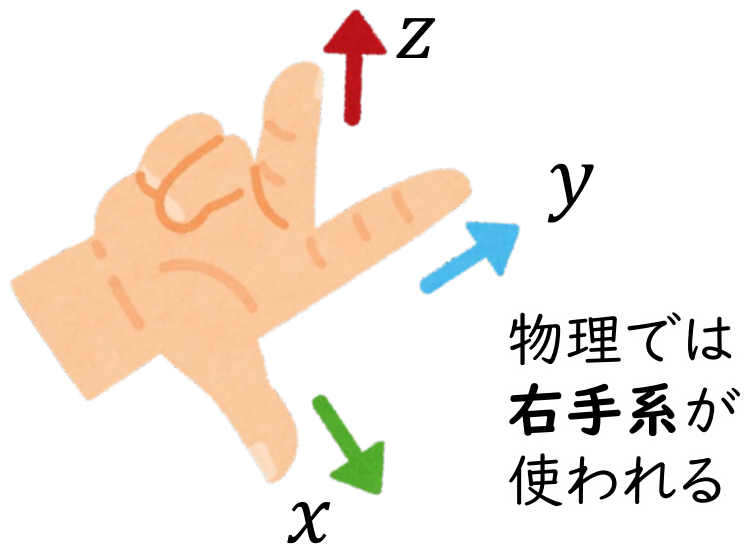
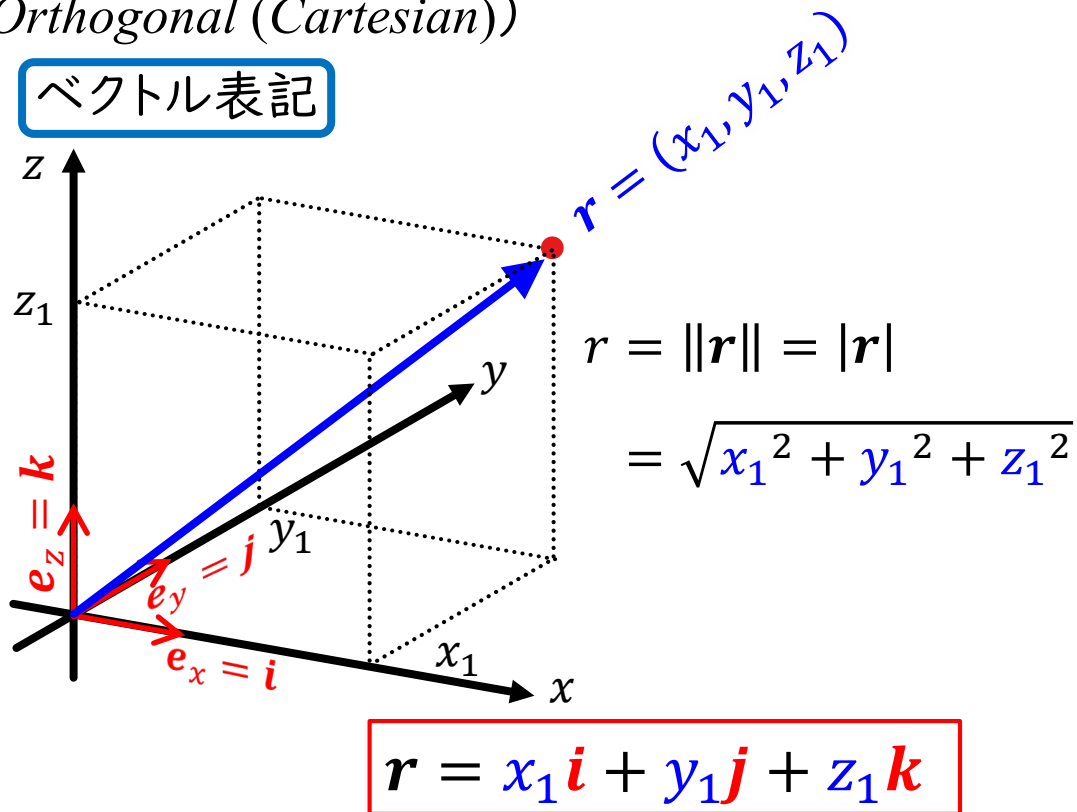
座標系 (coordinate system)

直交座標系 (デカルト座標系) (Orthogonal (Cartesian))

座標表記



ベクトル表記



物理では
右手系が
使われる

単位ベクトル同士の内積

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

任意ベクトルと単位ベクトルの内積

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = x_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + z_1 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = x_1$$

ベクトルの成分表示

3次元での2つのベクトル

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

のとき、内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

余弦は

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \neq 0$$

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \neq 0$$

のとき

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

一般化

n 次元の場合 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n A_i B_i$

可付番号次元の場合

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i B_i$$

連続無限次元

$$(A, B) = \int_{\alpha}^{\beta} A(k) B(k) dk$$

例題 I

2つの空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ とおくと $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である。このとき x の値と $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}$ への正射影の長さを求めよ。

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot x + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2x - 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \text{ に代入して } 2x - 1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + 5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{まず、(右辺)} > 0 \text{ より、(左辺)} > 0 \text{ なので } x > \frac{1}{2}$$

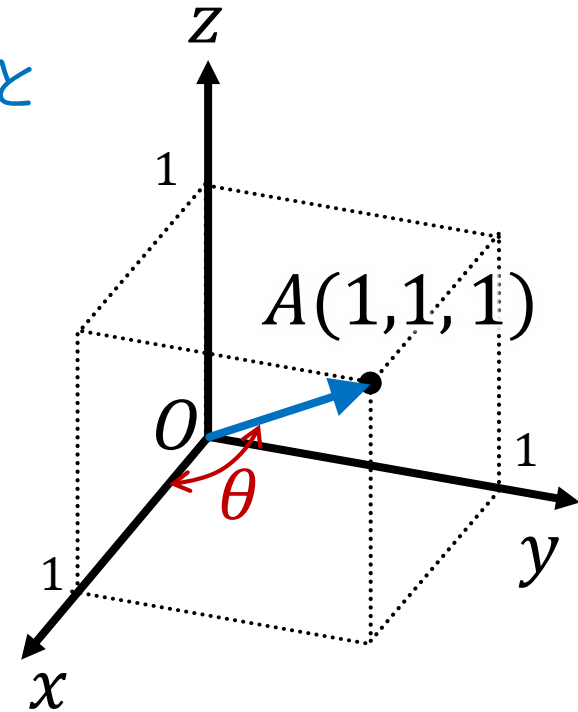
$$\sqrt{2} \text{ をかけて2乗して整理すると、} 3x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \therefore x = -\frac{2}{3}, 2 \quad \therefore x = \underline{2}$$

$$\mathbf{b} \text{ の } \mathbf{a} \text{ への正射影の長さは } \|\mathbf{b}\| = 3 \text{ より } \|\mathbf{b}\| \cos \theta = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{または } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \text{ より } \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}}}$$

問題 I

右の図で原点から $A(1,1,1)$ に向かうベクトルを A とするとき、 A と x 軸がなす角 θ の余弦を求めよ。



物理量（基本次元と基本単位）

物理量 …… 物質の構造や運動を記述する量
次元が決まっていて、それぞれの単位の倍数で表せる量

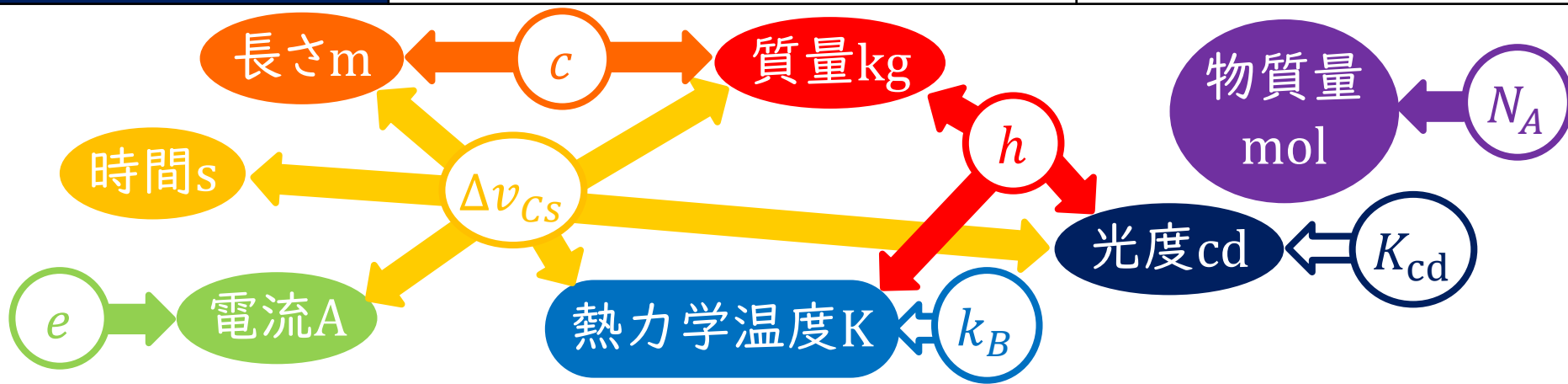
基本的物理量

	次元	単位 (SI単位系)	MKSA単位系
長さ	$[L]$	m	(メートル)
質量	$[M]$	kg	(キログラム)
時間	$[T]$	s	(セカンド、秒)
電流	$[I]$	A	(アンペア)
温度	$[\Theta]$	K	(ケルビン)
物質質量	$[N]$	mol	(モル)
光度	$[J]$	cd	(カンデラ)

次元 …… 基本的物理量と一般の物理量の関係を示す

各単位の定義値

基本単位	定義定数	定義値
長さ m	真空中の光の速さ c	299 792 458 [m/s]
質量 kg	プランク定数 h	$6.62607015 \times 10^{-34}$ [Js]
時間 s	セシウム133原子の摂動を受けない基底状態の超微細構造遷移周波数 $\Delta\nu_{Cs}$	9 192 634 770 [Hz]
電流 A	電気素量 e	$1.602176634 \times 10^{-19}$ [C]
熱力学温度 K	ボルツマン定数 k_B	1.380649×10^{-23} [J/K]
物質質量 mol	アボガドロ数 N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$ [/mol]
光度 cd	周波数 540×10^{12} [Hz]の単色放射の視感効果度 K_{cd}	683 [lm/W]



物理量（次元と組立単位）

一般化すると、任意の物理量 W が w を数係数として

$$W = wL^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$$

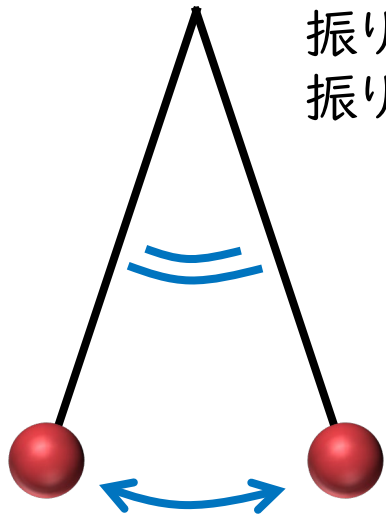
と表されるとき、

物理量 W の次元 $[W]$ は $[L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}]$ であるといい、
 α, β, γ を物理量 W の長さ、質量、時間についての次元という。
 このとき、 W の単位は $\text{m}^{\alpha}\text{kg}^{\beta}\text{s}^{\gamma}$ となる。これを組立単位という

物理量	次元	単位
面積 S	$[L^2]$	m^2
振動数 f	$[T^{-1}]$	s^{-1}
加速度 a	$[LT^{-2}]$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
圧力（応力） P	$[L^{-1}MT^{-2}]$	$\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
エネルギー E	$[L^2MT^{-2}]$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
質量密度 ρ	$[L^{-3}M]$	$\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}$
表面張力 σ	$[MT^{-2}]$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

次元の異なる量の掛け算、割り算はOK 足し算、引き算はNG

次元解析



振り子の周期 T を知りたいとする。

振り子の性質を決めていそうなものは、

長さを変えると変わりそう	系の長さ	l [L]
球にかかっている力は重力	重力加速度	g [LT^{-2}]
球の重さも関係するかも	球の質量	m [M]

なので、

$$T \propto l^x \times g^y \times m^z \quad \text{のようにかけるはず。}$$

両辺の次元は相等しいはずだから $[T] = [L^x] \times [(LT^{-2})^y] \times [M^z]$

$$= [L^{x+y} \times M^z \times T^{-2y}]$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ -2y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \quad \therefore T \propto l^{\frac{1}{2}} \times g^{-\frac{1}{2}} \times m^0 \quad \text{よって、}$$

$$\propto \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \therefore T = A \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (A \text{ は定数})$$

無次元の比例定数はわからない

ここから 振り子の周期は球の重さに依らないこと、
 重力加速度一定ならば系の長さだけに依ること、
 重力加速度が小さい場所では周期は長くなる などがわかる

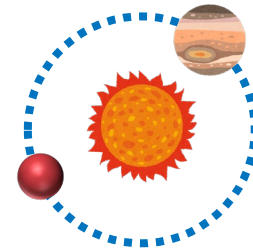
例題1 [次元解析]

万有引力の法則は $F = G \frac{Mm}{r^2}$ と書ける。

万有引力定数 G の次元を $[L], [M], [T]$ で表しなさい。

また、 G の単位をSI単位系であらわしなさい。

惑星の運動



G の単位 $[G]$ を $[L^x M^y T^z]$ であるとして、

力 F の次元は $[LMT^{-2}]$ 、質量 M, m の次元は $[M]$ 、距離 r の単位は $[L]$ であるから、

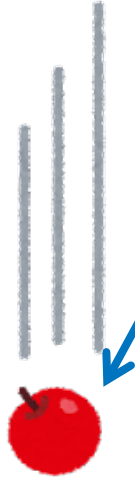
$$\begin{aligned} F = G \frac{Mm}{r^2} \text{ より、 } [LMT^{-2}] &= [L^x M^y T^z] \times [M] \times [M] \times [L^{-2}] \\ &= [L^{x-2} M^{y+2} T^z] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y + 2 = 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \quad \therefore [G] = [L^3 M^{-1} T^{-2}]$$

これより G の単位は

$$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$$

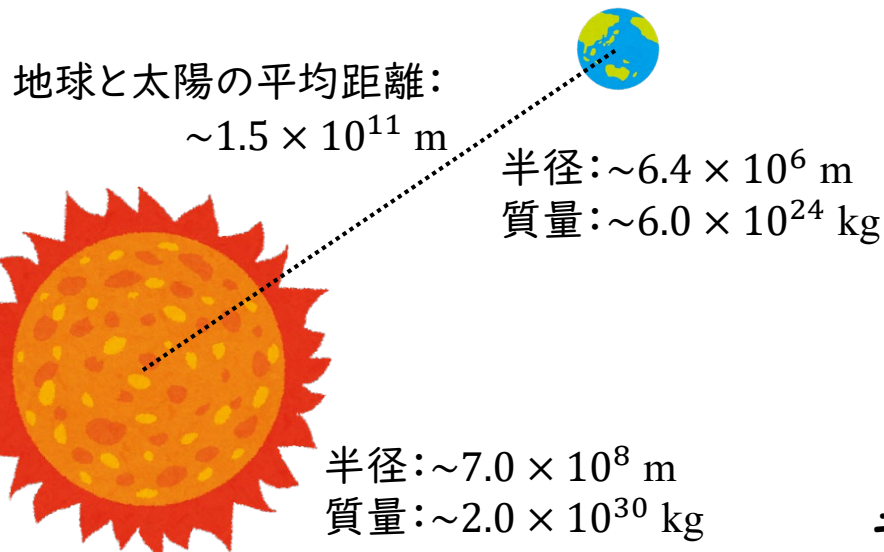
運動を記述するために



物体を表す

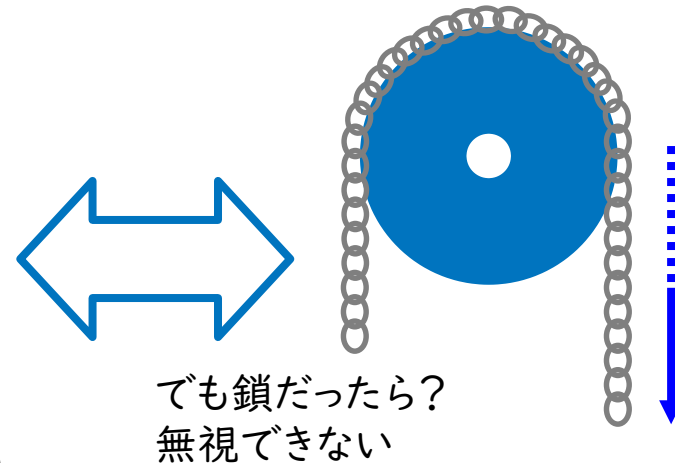
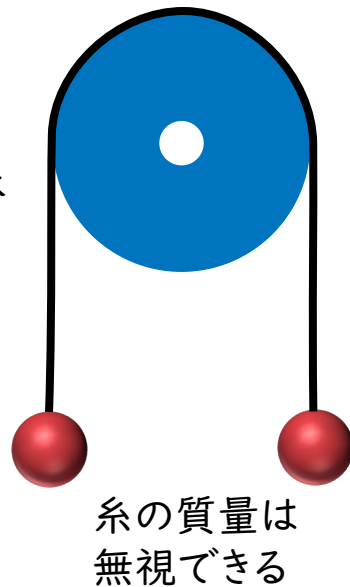
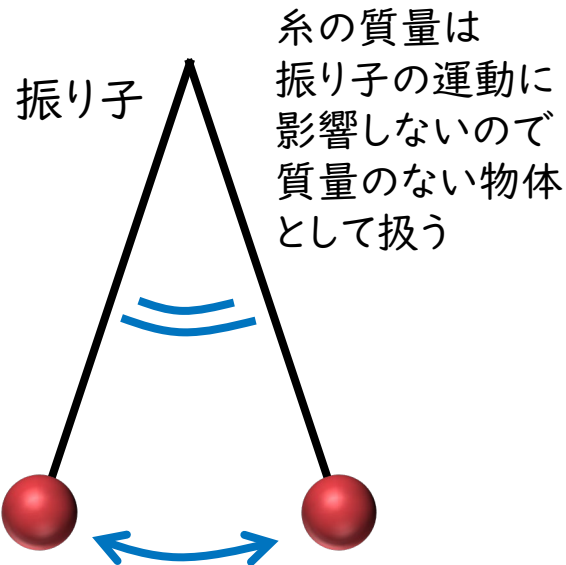
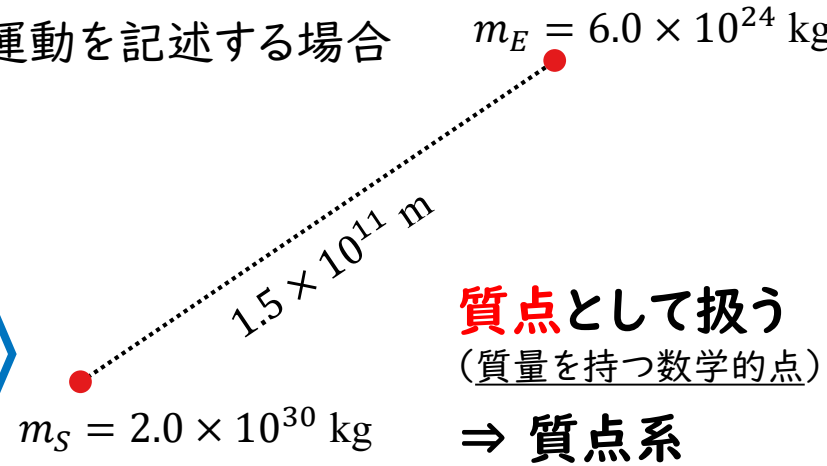
大きさのある物体 or ない物体

物体を表す



運動を記述する場合 $m_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$

モデル化



剛体(変形しない物体)
 として扱う(本講義後半)

他にも弾性体、流体などがある

運動を記述するために



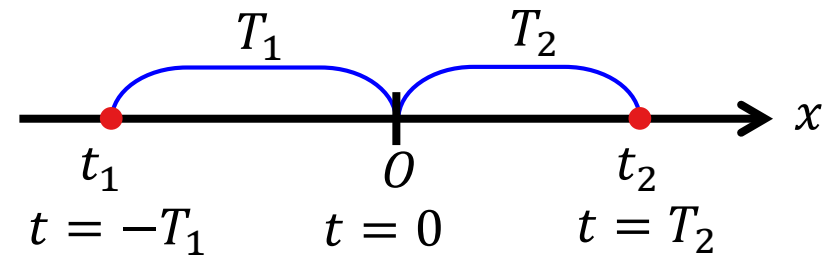
物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

時間は1次元かつ不可逆な物理量



過去

現在

未来

運動前

運動開始

運動終了

運動1開始

運動2開始

運動終了

運動を記述するために



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

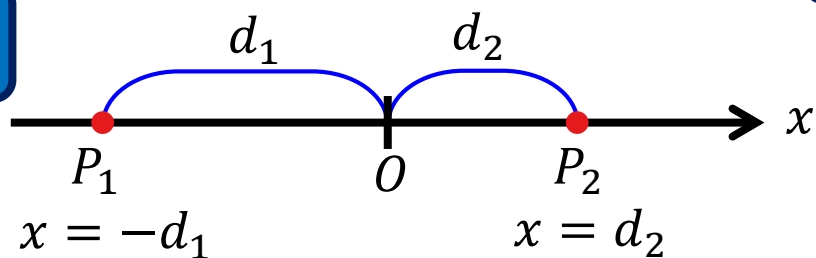
位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか

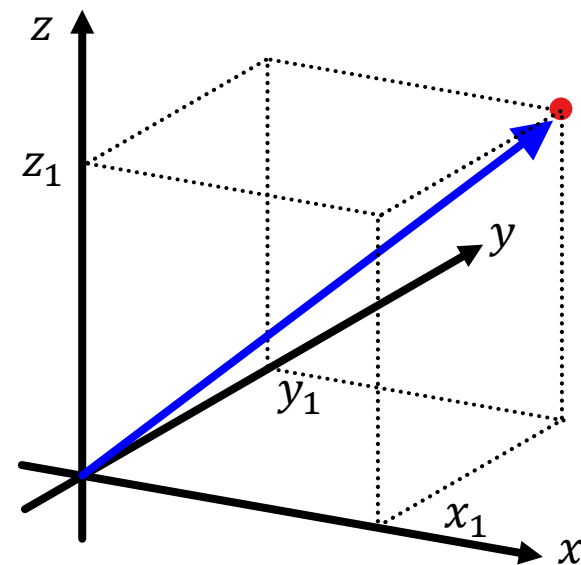
位置を表す 一直交座標系

ユークリッド空間 (Euclidean space)

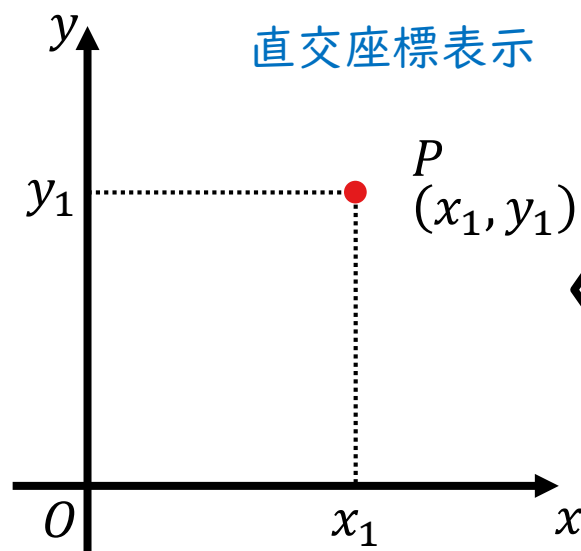
1次元



3次元



2次元

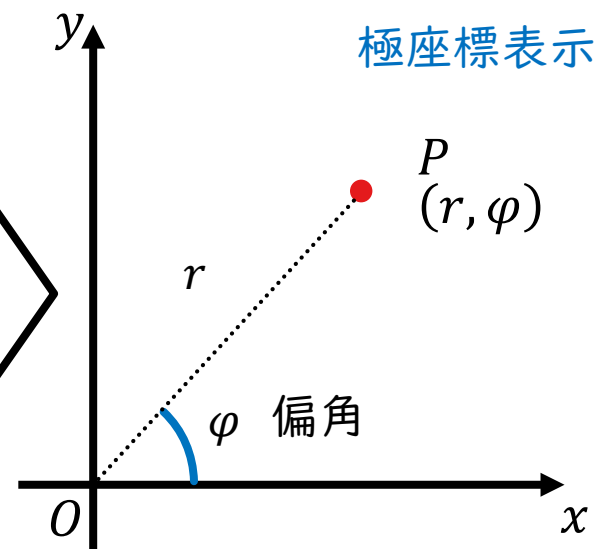


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



位置を表す 一極座標系

3次元

球面座標系 (Spherical)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

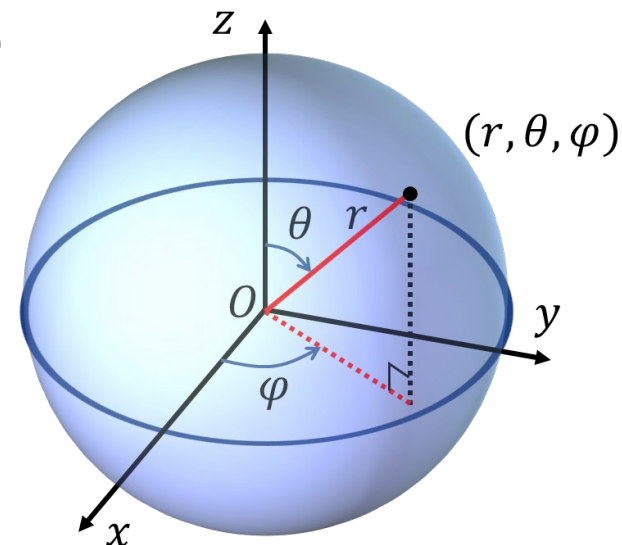
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

ただし
 $0 \leq \theta \leq \pi$
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



極座標 (球面座標)

円筒座標系 (cylindrical)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

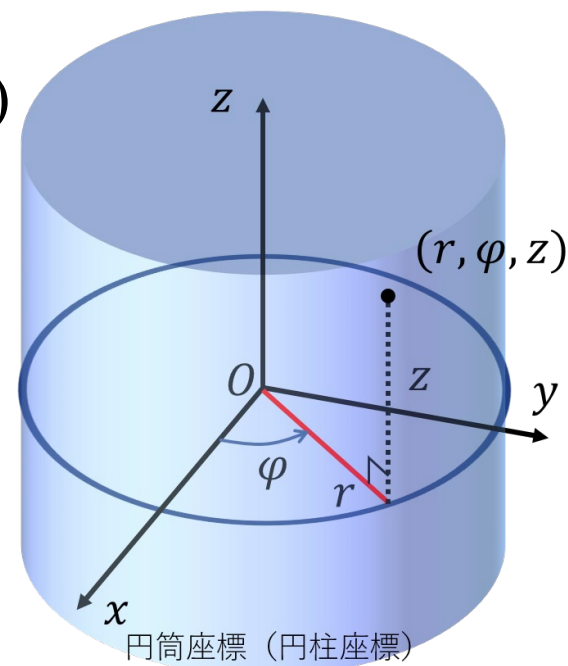
$$z = z$$

$$x = r \cos \varphi$$

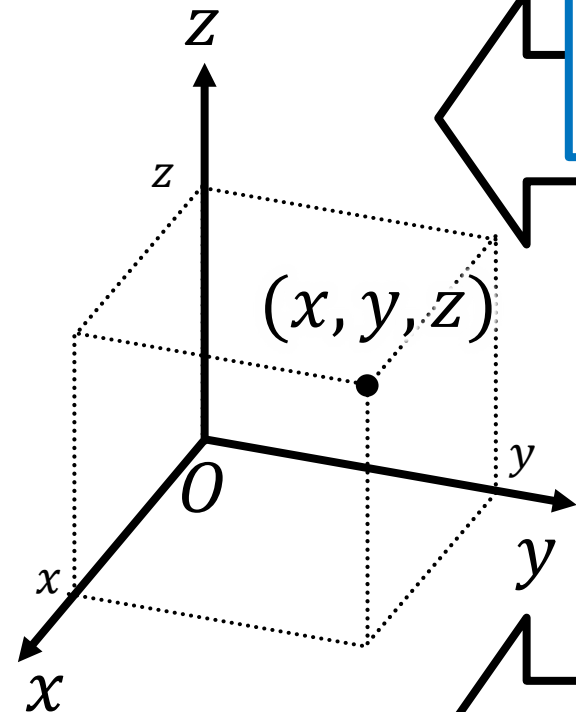
$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

ただし
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



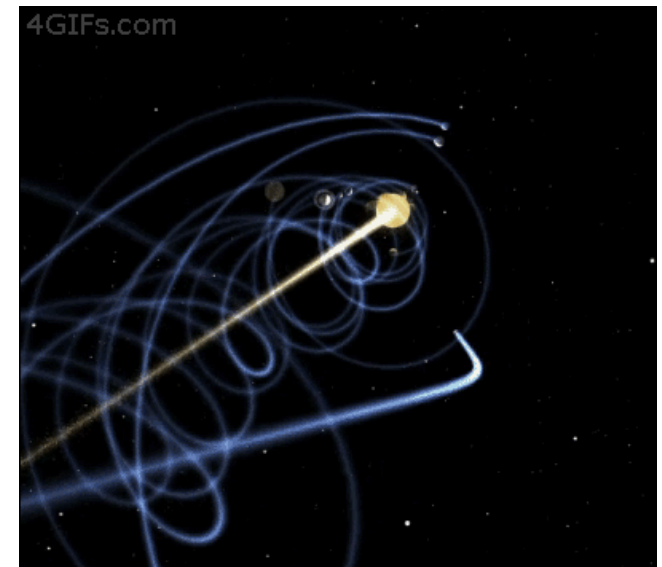
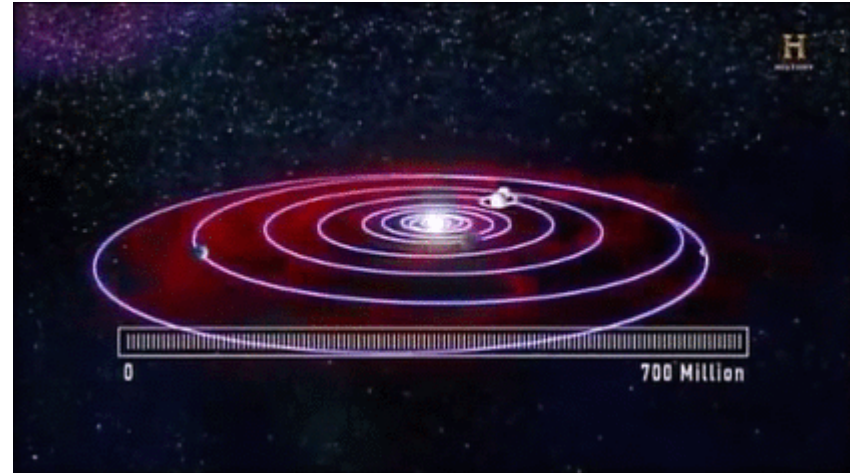
円筒座標 (円柱座標)



位置を表す

座標を決める際に大切なこと

1. どこに原点を取るか
(何を固定するか)
2. 直交座標系か極座標系か



運動を記述するために



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか

→ 位置 (変位) ベクトル r

速度を表す

変位ベクトルの時間微分 $\frac{dr}{dt}$

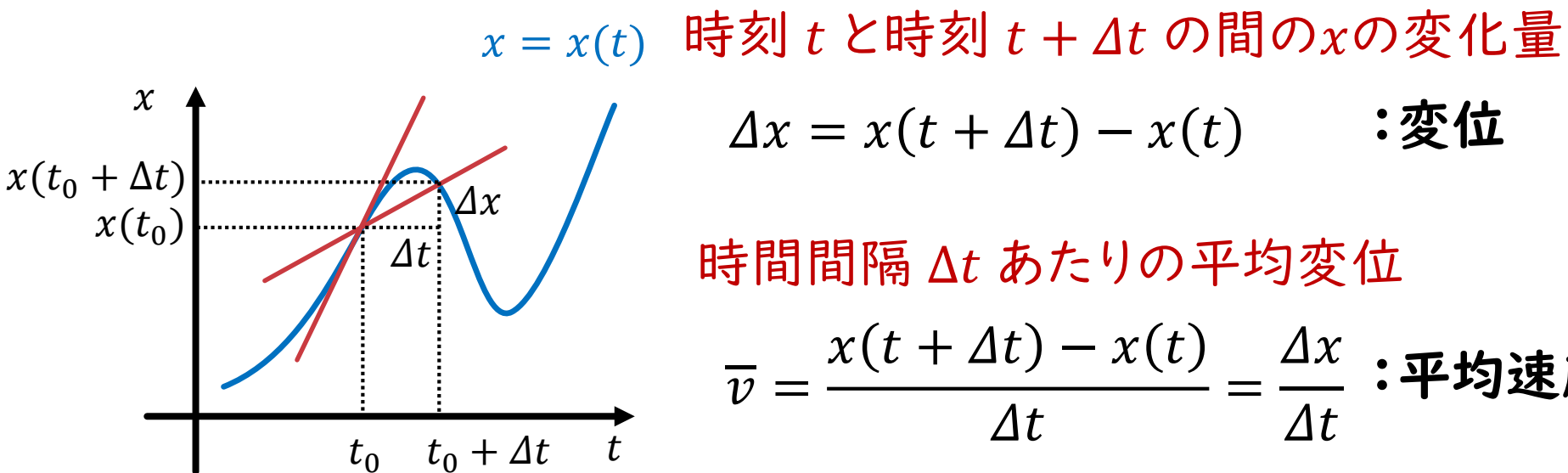
微分

スカラー関数の微分
(復習)



ベクトル関数の微分
(大学での物理)

スカラー関数の場合 (復習)



時刻 t での瞬間的な変位の変化(速さ) = 接線の傾き (導関数)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv v(t) : \text{速度}$$

$\equiv \dot{x}(t)$ 関数 x の時間 t での微分を
特に物理では $\dot{x}(t)$ と書く

微分計算(復習)

$$(1) \frac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha-1}$$

$$(2) \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

$$(3) \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

$$(4) \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t} (= \sec^2 t)$$

$$(5) \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$$

$$(6) \frac{d}{dt}(a^t) = a^t \cdot \log a$$

$$(7) \frac{d}{dt}(\log t) = \frac{1}{t} \quad (t > 0)$$

$$(8) \frac{d}{dt}(\log f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)} \quad (f(t) > 0)$$

積の微分、商の微分

積の微分

$$\{f(t)g(t)\}' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

商の微分

$$\left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \right\}' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{\{g(t)\}^2}$$

合成関数の微分

$x = g(y)$ が微分可能なとき

$$x = g(f(t)) \text{ の微分は } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt}$$

三角関数

指数関数

対数関数

例題2 (教科書P.8)

はじめ静止していた球が小さな斜面を転がり落ちるとき、その距離は経過した時間 t の2乗に比例する(ガリレオの実験)。
球の速さは時間 t に比例することを示せ。

a を定数として、進んだ距離 l は

$$l(t) = at^2$$

時刻 $t + \Delta t$ では

$$l(t + \Delta t) = a(t + \Delta t)^2 = at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2$$

変位 Δl は

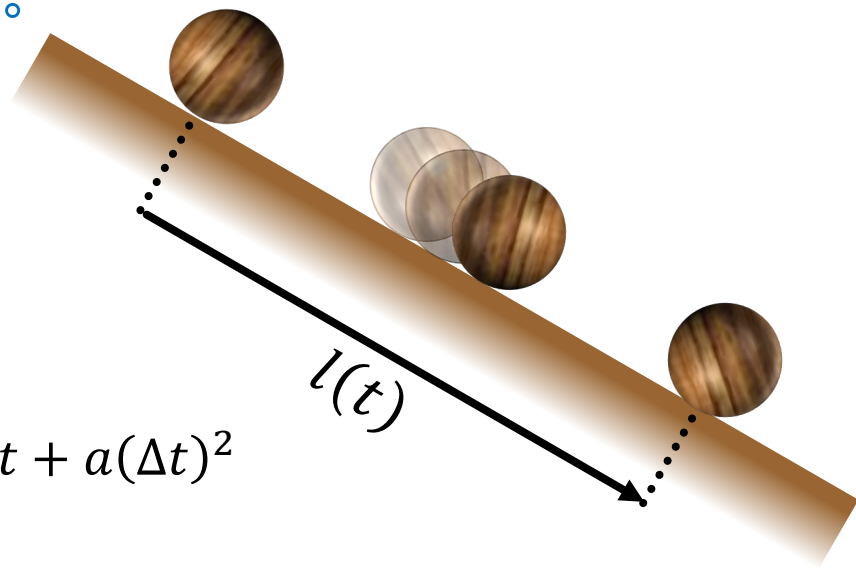
$$\Delta l = l(t + \Delta t) - l(t) = \{at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2\} - at^2 = 2at\Delta t + a(\Delta t)^2$$

時刻 t における習慣的な速さは

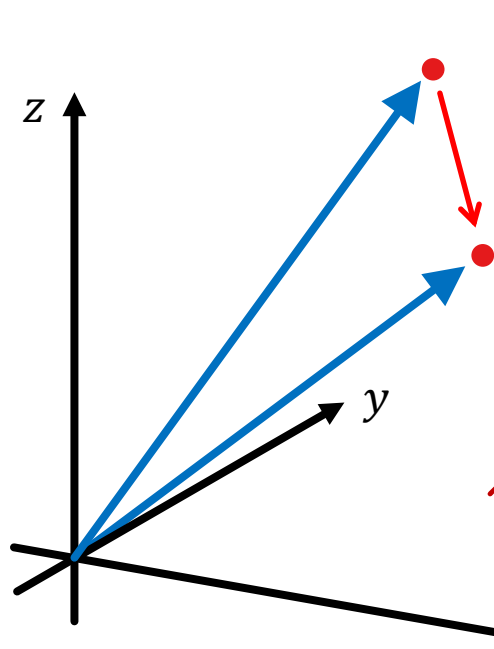
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2at + a\Delta t) = 2at$$

これは

$$v(t) = \frac{d}{dt}(at^2) = 2at \quad \text{と等しく、確かに微分になっている!}$$



ベクトル関数での速度



$$\mathbf{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = (r_x(t + \Delta t), r_y(t + \Delta t), r_z(t + \Delta t))$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) \quad \text{: 変位}$$

ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ の導関数

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

導関数もベクトル関数

$$\mathbf{r}(t) = r_x(t)\mathbf{i} + r_y(t)\mathbf{j} + r_z(t)\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dr_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dr_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dr_z(t)}{dt}\mathbf{k} = \left(\frac{dr_x(t)}{dt}, \frac{dr_y(t)}{dt}, \frac{dr_z(t)}{dt} \right)$$

$$\equiv \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$$

演習2

(1) 位置ベクトル $r(t)$ が $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のとき、速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) 位置ベクトル $r(t)$ が $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ b \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$ のとき、速度 $v(t)$ を求めよ。

運動を記述するために



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$$r(t)$$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

加速度を表す

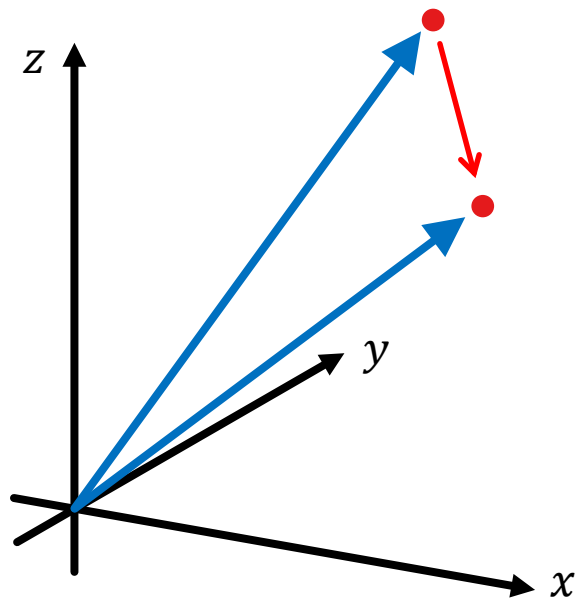
速度ベクトルの時間微分

$$\frac{dv(t)}{dt}$$

微分

微分

ベクトル関数での速度と加速度



変位関数 (ベクトル)

$$\mathbf{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$$

速度関数 (ベクトル)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{dr_x(t)}{dt}, \frac{dr_y(t)}{dt}, \frac{dr_z(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

加速度関数 (ベクトル)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{dr_x(t)}{dt}, \frac{d}{dt} \frac{dr_y(t)}{dt}, \frac{d}{dt} \frac{dr_z(t)}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{d^2 r_x(t)}{dt^2}, \frac{d^2 r_y(t)}{dt^2}, \frac{d^2 r_z(t)}{dt^2} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \end{aligned}$$

運動を記述するために



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$r(t)$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

微分

加速度を表す

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

微分

速度から変位を求める

速度が変化しなければ、その時間内の変位は
 (時間) × (速度)
 で求めることができる。

右図のように速度が変化して運動しているとき、 v
 時間を微小区間に分割する。

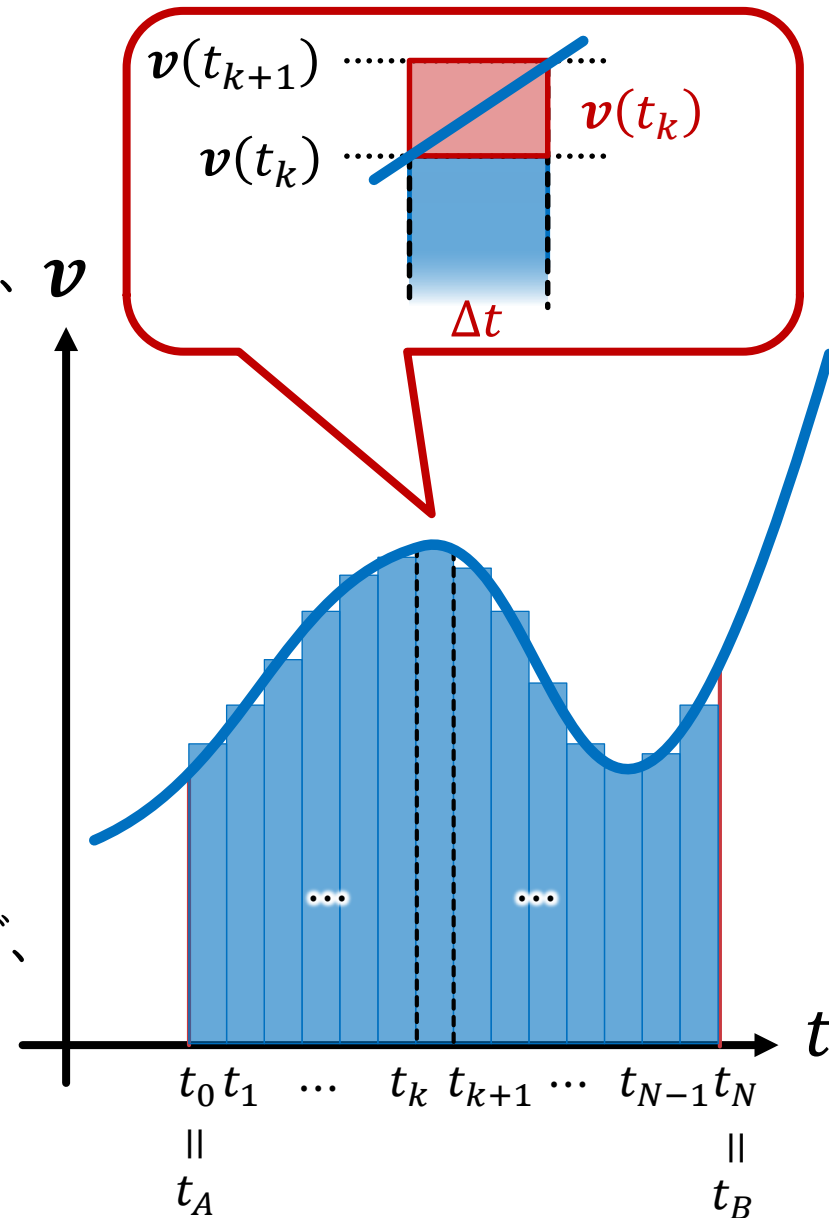
その間の平均速度を $v(t)$ とすると、
 この間の変位は

$$r(t_{k+1}) - r(t_k) \approx v(t_k) \cdot \Delta t$$

と書くことができる。

これを t_A から t_B まで
 集めればこの時間内の変位が求められるので、

$$r(t_B) - r(t_A) \approx \sum_{k=0}^{N-1} v(t_k) \cdot \Delta t$$



速度から変位を求める

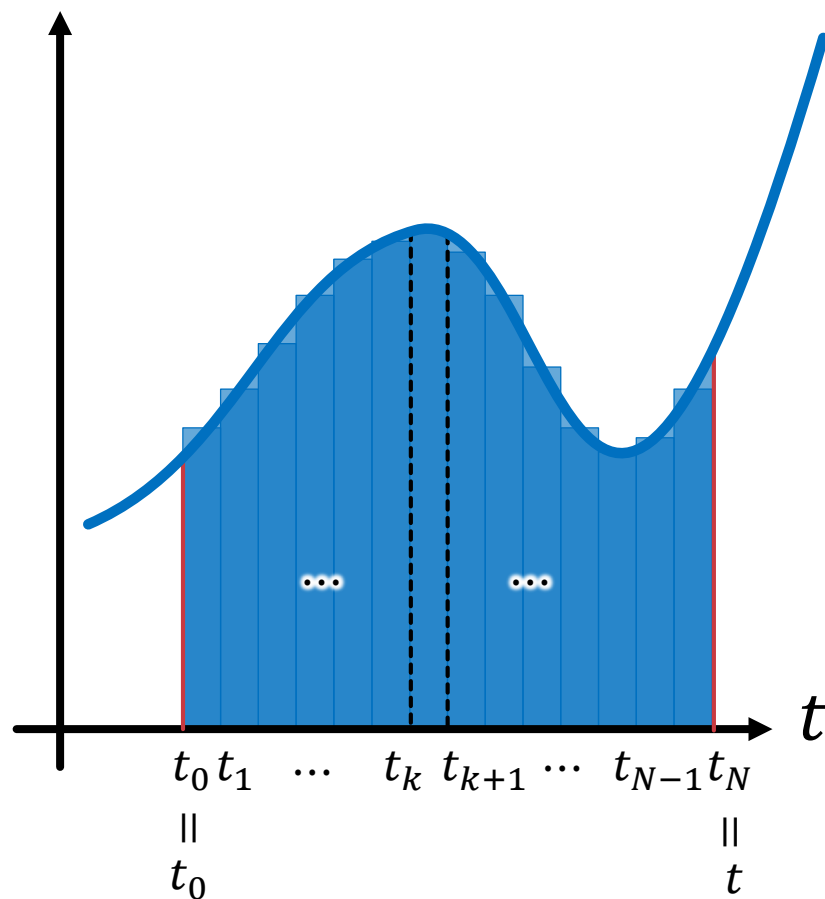
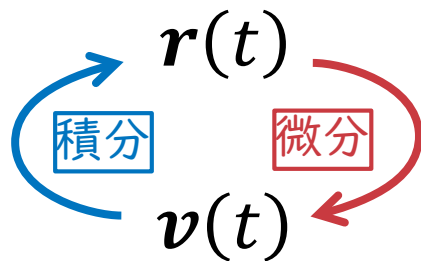
$\Delta t \rightarrow 0$ すなわち $N \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\mathbf{r}(t_B) - \mathbf{r}(t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}(t_k) \cdot \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{v}(t) dt$$

一般化 $\Rightarrow$ $t_A = t_0$ として、
 $t_B = t$

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(T) dT$$

数学的逆操作により



積分計算(復習)

三角関数

$$(1) \int t^{\alpha} dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + C$$

$$(2) \int \cos t dt = \sin t + C$$

$$(3) \int \sin t dt = -\cos t + C$$

$$(4) \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$$

指数関数

$$(5) \int e^t dt = e^t + C$$

$$(6) \int a^t dt = \frac{a^t}{\log a} + C$$

対数関数

$$(7) \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C$$

$$(8) \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log|f(t)| + C$$

部分積分

$$\begin{aligned} \int f(t)g'(t) dt \\ = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt \end{aligned}$$

置換積分

$t = g(y)$ とおけるとき

$$\int f(t) dt = \int f(g(y))g'(y) dy$$

微分方程式としての考え方

速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

両辺に dt をかける

$$\boldsymbol{v}(t)dt = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt$$

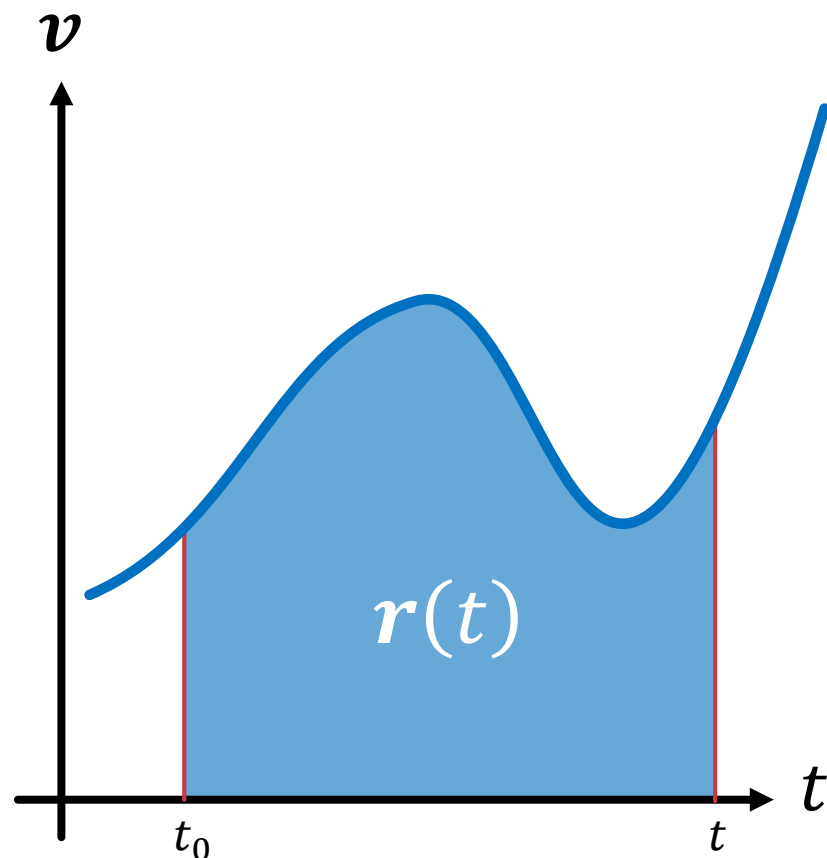
両辺 $t = t_0$ から $t = t$ まで積分

$$\int_{t_0}^t \boldsymbol{v}(T) dT = \int_{t_0}^t \frac{d\boldsymbol{r}(T)}{dT} dT$$

$$= [\boldsymbol{r}(T)]_{T=t_0}^{T=t}$$

$$= \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$$

$$\int_{t_0}^t \boldsymbol{v}(T) dT = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$$



$$\therefore \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{v}(T) dT$$

加速度から速度を求める

加速度に関しても同じ議論となる。

$$\begin{aligned}
 v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT = v(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dv(T)}{dT} dT \\
 &= v(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d^2x(T)}{dT^2} dT
 \end{aligned}$$

$\vdots$
 初速度

速度を積分すれば変位が求まる

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT = x(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^T a(T') dT' \right\} dT \\
 &= x(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^T \frac{dv(T')}{dT'} dT' \right\} dT \\
 &= x(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^T \frac{d^2x(T')}{dT'^2} dT' \right\} dT
 \end{aligned}$$

$\vdots$
 初期位置

その運動を支配している加速度が分かれば、速度や変位は計算できる

運動を記述するために



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$r(t)$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

加速度を表す

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

微分

積分

微分

積分

積分すると積分定数が必要
⇒初期条件(初期位置、初速度)

実験的に変位や速度変化を計測、関数化できれば、
その運動を支配する加速度を求めることができる

その運動を支配している加速度が分かれば、
速度や変位は計算できる

例題3

$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} at \\ b \\ c \end{pmatrix}$ で、 $\boldsymbol{r}(t_0 = 0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}(t_0 = 0) + \int_{t_0=0}^t \boldsymbol{v}(T) dT \\ &= \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t aT dT \\ \int_0^t b dT \\ \int_0^t c dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}at^2 \\ bt \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 + \frac{1}{2}at^2 \\ bt \\ ct \end{pmatrix} \end{aligned}$$

演習3

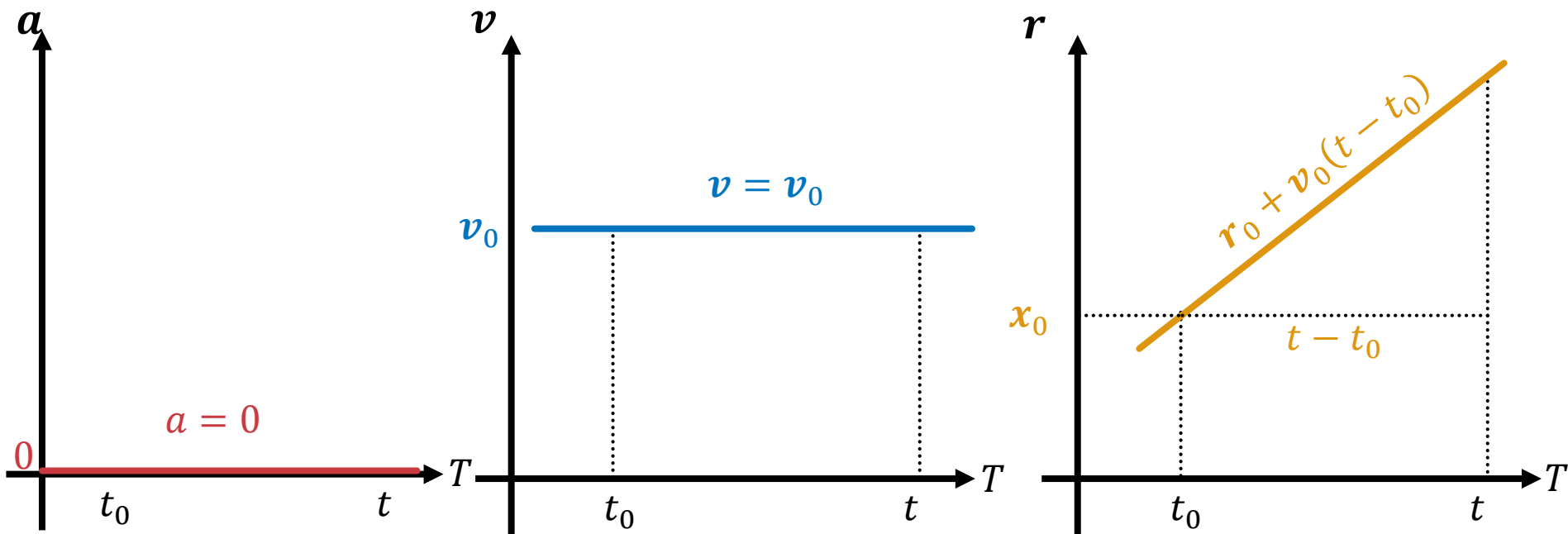
$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ で、 $\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ -v_0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -r_0 \\ r_0 \\ 2r_0 \end{pmatrix}$ のとき、 $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。

等速運動 (uniform motion)

等速運動 --- 速度 v が一定 ($v = v_0$) $\Rightarrow$ 加速度 $a = 0$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t 0 dT = v_0$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t v_0 dT = r_0 + v_0(t - t_0)$$



厳密な等速運動はほとんど起こらない。

速度が変化する運動を平均的な動きとして簡素化するとき用いられる。

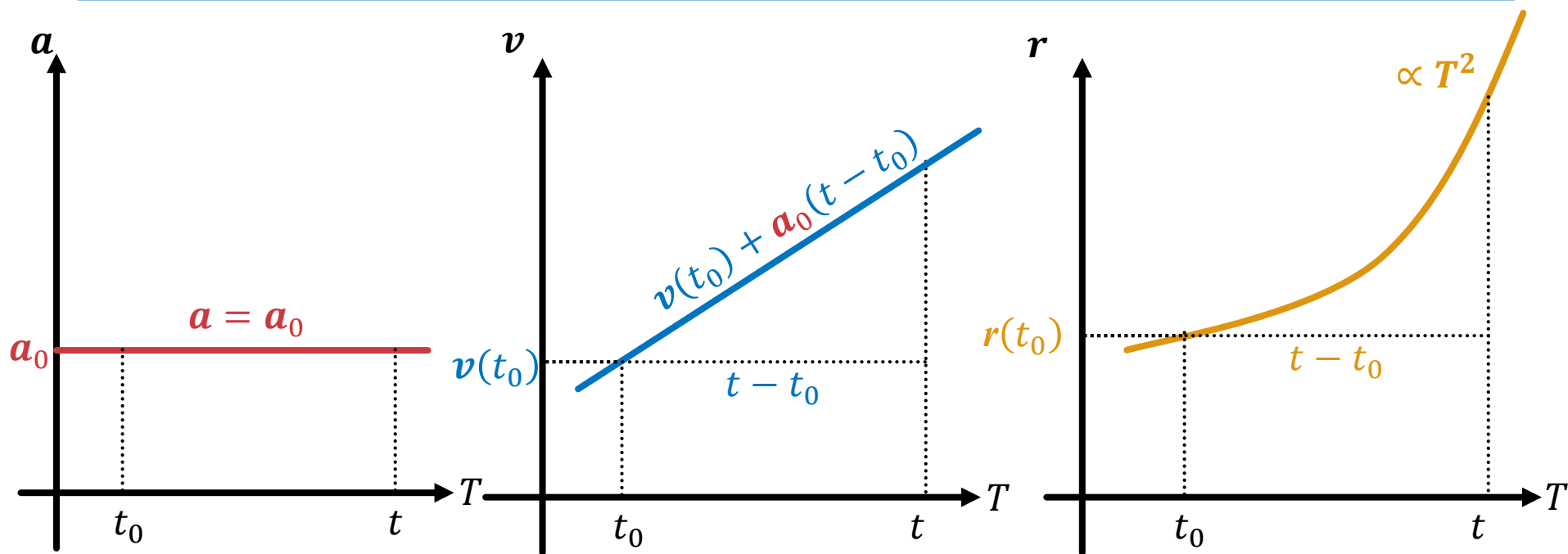
等加速度運動 (uniformly accelerated motion)

等加速度運動 --- 加速度 a が一定 ($a = a_0$)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t a_0 dT = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t \{v_0 + a_0(t - t_0)\} dT$$

$$= r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2$$



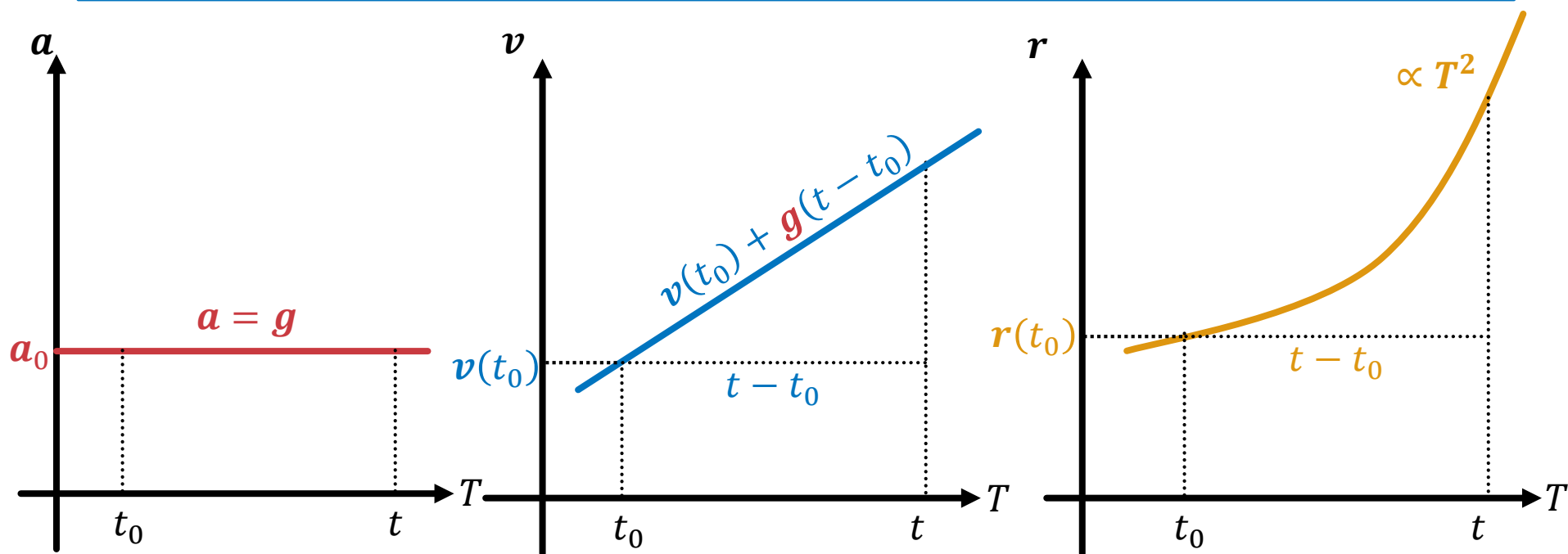
自由落下 (free fall)

自由落下運動 --- 加速度が重力加速度 g で一定 ($g = 9.8 [\text{m/s}^2]$:地球上では)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(T) dT \Rightarrow v_0 + \int_{t_0}^t g dT = v_0 + g(t - t_0)$$

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t v(T) dT \Rightarrow r_0 + \int_{t_0}^t \{v_0 + g(t - t_0)\} dT$$

$$= r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$$



【本日のポイント】



物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

時間を表す

どの時点から運動が始まるか

位置を表す

どこから見てどの地点にあるのか(変位)

$r(t)$

速度を表す

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

加速度を表す

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

微分

積分

微分

積分

積分すると積分定数が必要
⇒初期条件(初期位置、初速度)

実験的に変位や速度変化を計測、関数化できれば、
その運動を支配する加速度を求めることができる

その運動を支配している加速度が分かれば、
速度や変位は計算できる