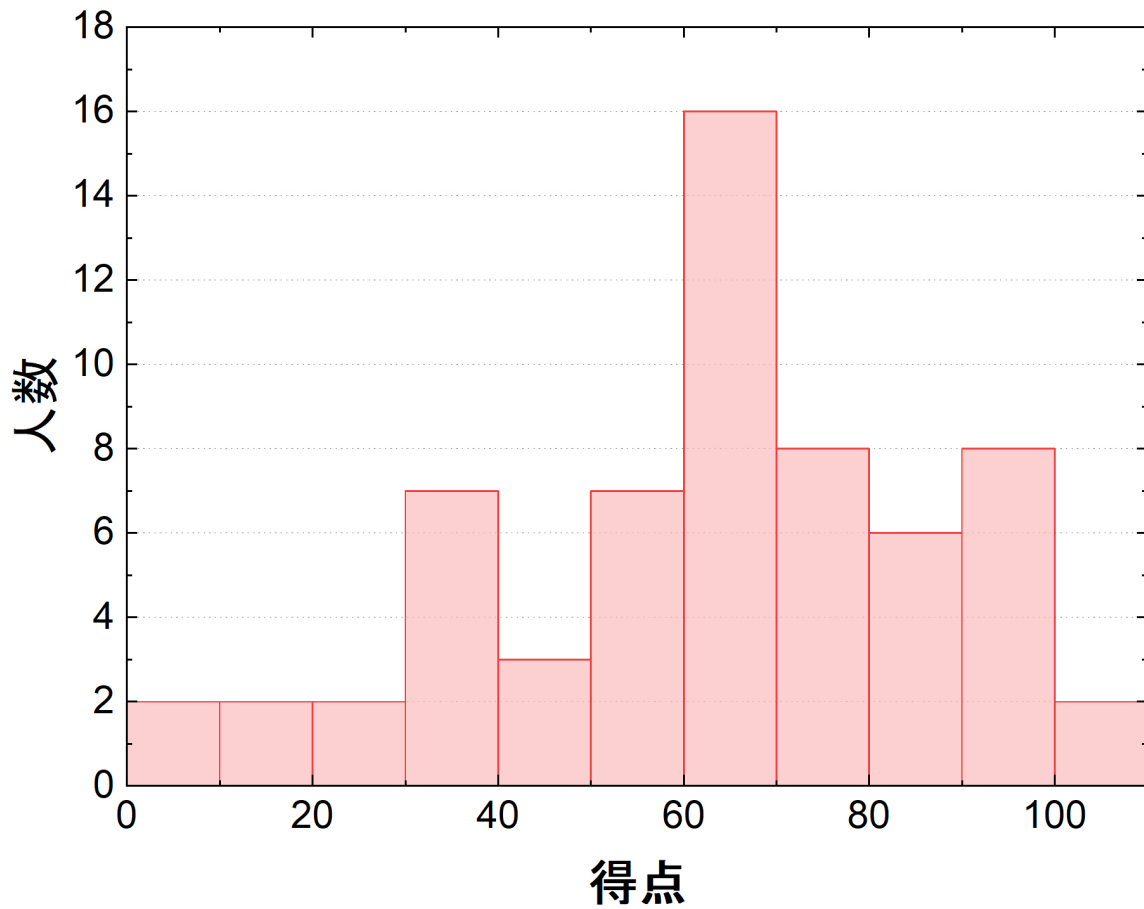




平均:62.8点
最高点:100点(2名)

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	全体
平均点	21.8	6.3	11.5	17.6	3.6	2.0	62.8
得点率(%)	77.9	63.2	60.4	76.6	24.1	39.0	

$$[1] (1) \quad \dot{r} = \underline{-\pi \sin \pi t}$$

$$\ddot{r} = \underline{-\pi^2 \cos \pi t}$$

$$(2) \quad \dot{r} = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \ddot{r} = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2}$$

$$(3) \underline{10} \quad (4) \underline{\frac{1}{3}} \quad (5) x = \underline{C e^{2t^2} - \frac{1}{2}}$$

$$(6) x = \underline{C_1 \cos t + C_2 \sin t}$$

$$(7) x = \underline{C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} - t - \frac{2}{5}}$$

$$(8) x = \underline{(C_1 + C_2 t) e^t + \frac{1}{4} e^{3t}}$$

$$[2] (1) \quad \underline{\mathbf{p}(2) = [2, 2]} \quad (2) v_1 = \underline{600 \text{ [m/s]}}$$

$$[3] (1) \theta_f = \tan^{-1} \mu \quad (2) |s| = \underline{\frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}}$$

$$(3) T_1 + T_2 = \underline{\frac{v_0}{g} \left\{ \frac{1}{\sin \theta + \mu' \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \mu'^2 \cos^2 \theta}} \right\}}$$

$$[4] (1) \quad A = \underline{4} \quad \omega = \underline{\frac{\pi}{3}} \quad T = \underline{6} \quad v = \underline{\frac{1}{6}}$$

$$(2) v(t) = \underline{\frac{4\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$a(t) = \underline{-\frac{4\pi^2}{9} \sin \left(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi^2}{9} x(t)}$$

$$(3) \underline{\pi^2} \quad (4) K + U = \underline{8\pi^2 (\text{一定})}$$

$$[5] (1)$$

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} \\ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta \right) e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ -\frac{g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta \right) (e^{-\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

$$(2) l = \underline{\frac{v_0 \cos \theta}{\gamma}}$$

[6] 保存力ではない

[1] 微分の復習

力学中間試験

次の時刻 t における関数 r の1階微分 $\dot{r}$ および2階微分 $\ddot{r}$ を求めよ。(各3点)

(1) $r = \cos \pi t$ $\pi t = u$ とおくと $r = \cos u$ より

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(\cos u)}{du} \frac{d(\pi t)}{dt} = (-\sin u) \cdot \pi = \underline{-\pi \sin \pi t}$$

同様に

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d(-\pi \sin u)}{du} \frac{d(\pi t)}{dt} = -\pi \cos u \cdot \pi = \underline{-\pi^2 \cos \pi t}$$

(2) $r = \log(t^2 + 1)$

商の微分

$$\dot{r} = \frac{(t^2 + 1)'}{t^2 + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{t^2 + 1} \right) = \frac{(2t)'(t^2 + 1) - 2t(t^2 + 1)'}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(t^2 + 1) - 2t(2t)}{(t^2 + 1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2}}} \end{aligned}$$

[1] 積分の復習

力学中間試験

次の定積分を計算せよ。(各3点)

$$(3) \int_1^2 (2t-1)^3 dt \quad 2t-1 = u \text{ とおくと } 2dt = du \quad \begin{array}{l} t: 1 \rightarrow 2 \\ u: 1 \rightarrow 3 \end{array}$$

置換積分

$$(\text{与式}) = \int_1^3 u^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_1^3 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \underline{10}$$

または、合成関数の微分が被積分関数になるように考えて

$$\{(2t-1)^4\}' = 4(2t-1)^3 \cdot 2 \text{ より } (2t-1)^3 = \frac{1}{8} \{(2t-1)^4\}'$$

$$(\text{与式}) = \frac{1}{8} [(2t-1)^4]_1^2 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \underline{10}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\sin t)' dt$$

$$= \frac{1}{3} [\sin^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left\{ \sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right\} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

[1] 微分方程式 (変数分離形)

力学中間試験

次の微分方程式の一般解を求めよ。(各4点)

$$(5) \frac{dx}{dt} = 2t(2x + 1)$$

$x \neq -\frac{1}{2}$ のとき $\frac{dx}{2x + 1} = 2t dt$

$$\int \frac{1}{2x + 1} dx = \int 2t dt$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1)'}{2x + 1} dx = \int 2t dt$$

$$\log|2x + 1| = 2t^2 + C_1$$

$$|2x + 1| = e^{2t^2 + C_1}$$

$$2x + 1 = C_2 e^{2t^2}$$

$$x = C e^{2t^2} - \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$ のとき $x = -\frac{1}{2}$ も明らかに解

$\Rightarrow C = 0$ で含まれるので特異解ではない

$$x = \underline{C e^{2t^2} - \frac{1}{2}}$$

$$(6) \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 + 0\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

基本解は

$$X_1 = \cos t \quad X_2 = \sin t$$

一般解は

$$x = \underline{C_1 \cos t + C_2 \sin t}$$

[1] 微分方程式(2階同次微分方程式) 力学中間試験

$$(7) \quad \ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 5t + 6$$

同伴方程式は

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 5, -1$$

よって同伴方程式の一般解は

$$\underline{X = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}}$$

また、右辺は2次の多項式であるから
特殊解を $x_0 = At + B$ とおくと

$$\dot{x}_0 = A \quad \ddot{x}_0 = 0$$

であるから

$$(0) - 4A - 5(At + B) = 5t + 6$$

$$-5At + (-4A - 5B) = 5t + 6$$

$$A = -1 \quad B = -\frac{2}{5}$$

$$\underline{x_0 = -t - \frac{2}{5}}$$


$$\therefore \underline{x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} - t - \frac{2}{5}}$$

[1] 微分方程式(2階同次微分方程式) 力学中間試験

$$(8) \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{3t}$$

同伴方程式は

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$$

$x = e^{\lambda t}$ とおくと特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

よって同伴方程式の一般解は

$$X = \underline{(C_1 + C_2 t)e^t}$$

また、右辺は2次の多項式であるから
特殊解を $x_0 = Ae^{3t}$ とおくと

$$\dot{x}_0 = 3Ae^{3t}$$

$$\ddot{x}_0 = 9Ae^{3t}$$

であるから

$$9Ae^{3t} - 2(3Ae^{3t}) + Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$4Ae^{2t} = e^{2t}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

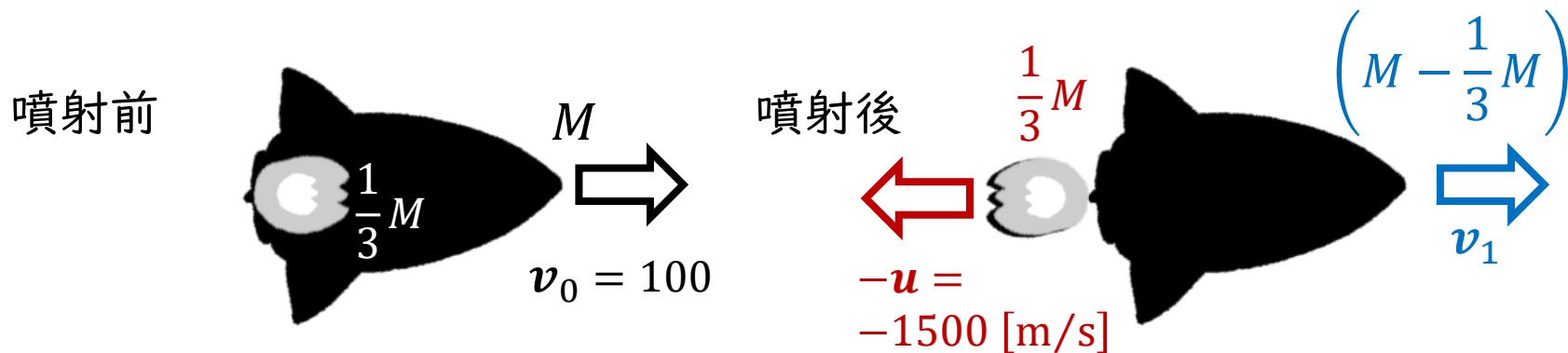
$$x_0 = \underline{\frac{1}{4}e^{3t}}$$


$$\therefore x = \underline{(C_1 + C_2 t)e^t + \frac{1}{4}e^{3t}}$$

(1) $t = 0$ の時点で運動量 $\mathbf{p}(t = 0) = [2e^{-1}, 2e]$ をもっていた物体に、
時刻 $0 \leq t \leq 2$ の間に力 $\mathbf{f}(t) = [e^{-\frac{t}{2}}, -e^{\frac{t}{2}}]$ が作用したとき、
時刻 $t = 2$ における物体の運動量 $\mathbf{p}(2)$ を求めよ。(5点)

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(0) &= \int_0^2 \mathbf{f}(t) dt \\ \Rightarrow \mathbf{p}(2) &= \mathbf{p}(0) + \int_0^2 \mathbf{f}(t) dt \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \int_0^2 [e^{-\frac{t}{2}}, -e^{\frac{t}{2}}] dt \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \left[\int_0^2 e^{-\frac{t}{2}} dt, \int_0^2 -e^{\frac{t}{2}} dt \right] \\ &= [2e^{-1}, 2e] + \left[-2[e^{-\frac{t}{2}}]_0^2, -2[e^{\frac{t}{2}}]_0^2 \right] \\ &= [2e^{-1}, 2e] + [-2e^{-1} + 2, -2e^1 + 2] = \underline{\underline{[2, 2]}}\end{aligned}$$

- (2) ほかの天体から十分に離れた宇宙空間において質量 M のロケットが速度 $v_0 = 100$ [m/s] で一次元等速直線運動をしている。ロケットが、後方にロケットから見て相対速度 $-u_1 = -1500$ [m/s] で質量 $M/3$ のガスを噴射した。噴射後のロケットの速度 v_1 [m/s] を求めよ。(5点)



噴射前後で外力ははたっていないので、噴射前後の運動量は保存される。

運動量保存則より

$$M \cdot 100 = \left(M - \frac{1}{3}M\right) \cdot v_1 + \frac{1}{3}M \cdot (v_1 - 1500)$$

相対速度であることに注意

$$M \cdot 100 = M \cdot v_1 - M \cdot 500$$

$$\therefore v_1 = \underline{600} \text{ [m/s]}$$

[3] 斜面の運動

力学中間試験

水平と角度 θ をなす粗い斜面上に質量 m の物体が置いてある。物体と斜面の静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とする。以下の問いに答えよ。

(1) 物体が斜面上に止まっているための最小角度 θ_f を求めよ。(5点)

このときの運動方程式は

$$x: 0 = mg \sin \theta_f - F$$

$$y: 0 = N - mg \cos \theta_f$$

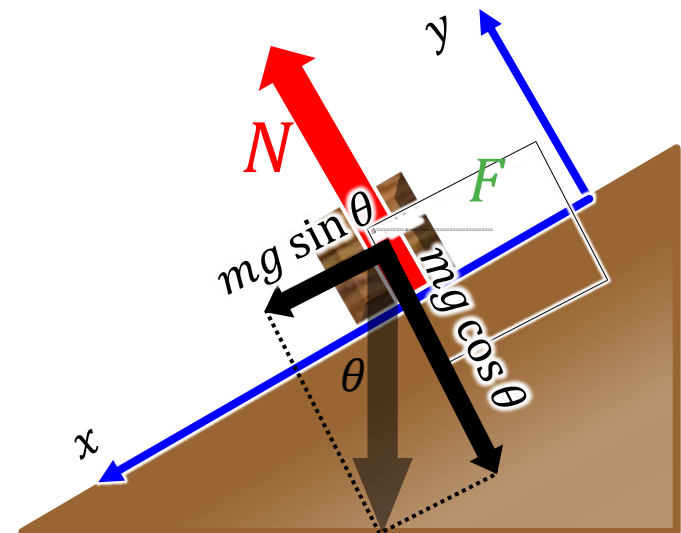
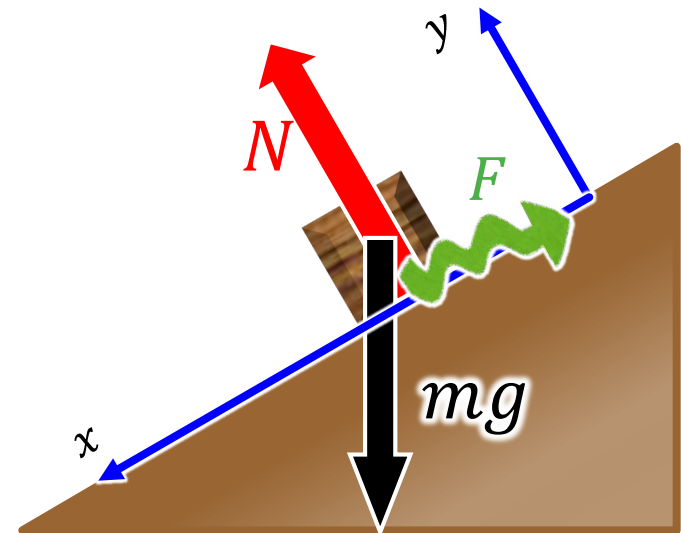
摩擦力が最大静止摩擦力であるから、

$$F = \mu N = \mu mg \cos \theta_f$$

よって、 $0 = mg \sin \theta_f - \mu mg \cos \theta_f$

$$\tan \theta_f = \mu$$

$$\theta_f = \tan^{-1} \mu$$



[3] 斜面の運動

力学中間試験

(2) 角度が $\theta_f > \theta$ のとき、物体を初速 v_0 で斜面上向きに滑り出させる。速度が0になるまでに進む斜面上の距離をもとめよ。(5点)

このときの x 軸方向の運動方程式は

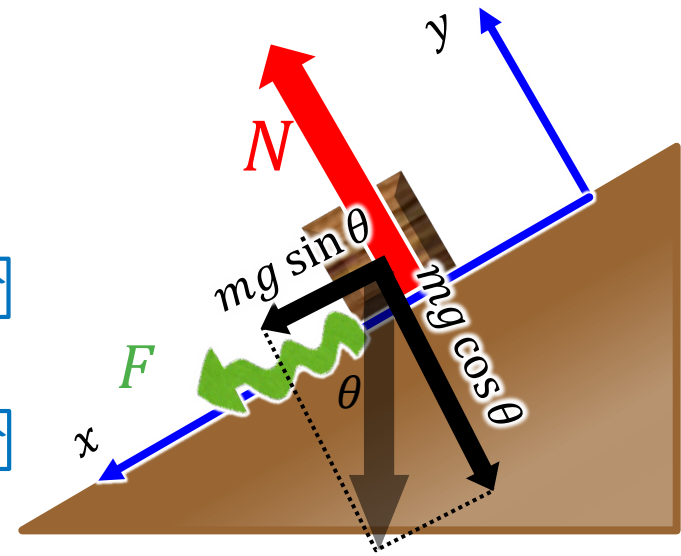
$$m\ddot{x} = mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta$$

$$\ddot{x} = g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

$$\dot{x} = -v_0 + g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)t$$

$$x = -v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta + \mu' \cos \theta) t^2$$

積分
積分



静止までの時間を T_1 とすると $\dot{x}(T_1) = 0$ より $T_1 = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$

T_1 までの変位 s は

$$s = -v_0 \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

$$= -\frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

$$\therefore |s| = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

[3] 斜面の運動

力学中間試験

(3) 角度が $\theta_f < \theta$ のとき、物体を初速 v_0 で斜面上向きに滑り出させる。物体が最初の位置に戻るまでの時間はいくらか。(9点)

下降のときはの x 軸方向の運動方程式より

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

$$\dot{x} = 0 + g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t$$

$$x = s + 0 - \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)t^2$$

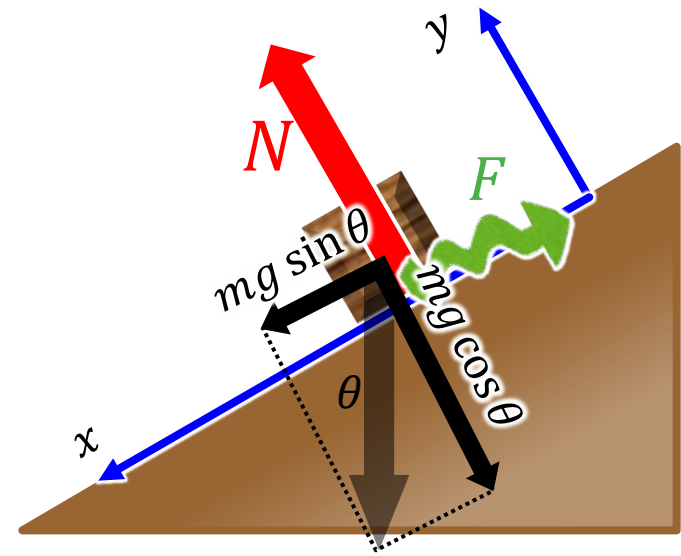
$x = 0$ まで戻るのに時間 T_2 かけるとすると、

$$0 = s - \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)T_2^2$$

$$\frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)T_2^2 \quad \therefore T_2 = \frac{v_0}{g} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \mu'^2 \cos^2 \theta}}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{v_0}{g} \left\{ \frac{1}{\sin \theta + \mu' \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \mu'^2 \cos^2 \theta}} \right\}$$

積分
積分



[4] 単振動

力学中間試験

質量 $m = 9$ [kg] のおもりをばね定数 $k = \pi^2$ [N/m] のバネに取り付けた水平ばね振り子の変位 x が

$$x(t) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されるとき、

(1) この単振動の(i)振幅、(ii)角振動数、(iii)周期、(iv)振動数を求めよ。

(i) 振幅 A $A = \underline{4}$

(ii) 角振動数 ω $\omega = \frac{\pi}{\underline{3}}$ (各2点:計8点)

(iii) 周期 T $T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{6}$

(iv) 振動数 ν $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\underline{6}}$

(2) この単振動の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求め、 $a(t)$ を $x(t)$ で表せ。

(5点)

$$v(t) = \dot{x}(t) = 4 \cdot \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{4\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{-\frac{4\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)} = \underline{-\frac{\pi^2}{9} x(t)}$$

(3) 角振動数からばね定数 k [N/m] の値を求めよ。(5点)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{9}} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore k = \underline{\pi^2}$$

(4) この単振動の全力学的エネルギー $E (= K + U)$ を求めて、一定であることを示せ。

ただし、 $K = \frac{1}{2}mv^2$ (運動エネルギー)、 $U = \frac{1}{2}kx^2$ (弾性エネルギー) とする。
(5点)

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}9 \left\{ \frac{4\pi}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \left\{ 4 \sin \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 \\ &= 8\pi^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 = 8\pi^2 \end{aligned}$$

よって E は時刻 t によらず一定である。

[5] 空気抵抗のある放物運動

力学中間試験

野球のホームランにおけるボールの運動を計算する。ボールは、地上0 mから初速度 v_0 、仰角 θ で打ち上げられ、速度に比例した空気抵抗 $-m\gamma v$ を受けながら放物運動をすると仮定する。水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸とする。

(1) 速度 $v(t)$ 、変位 $x(t)$ の式を文字式で求めよ。(10点)

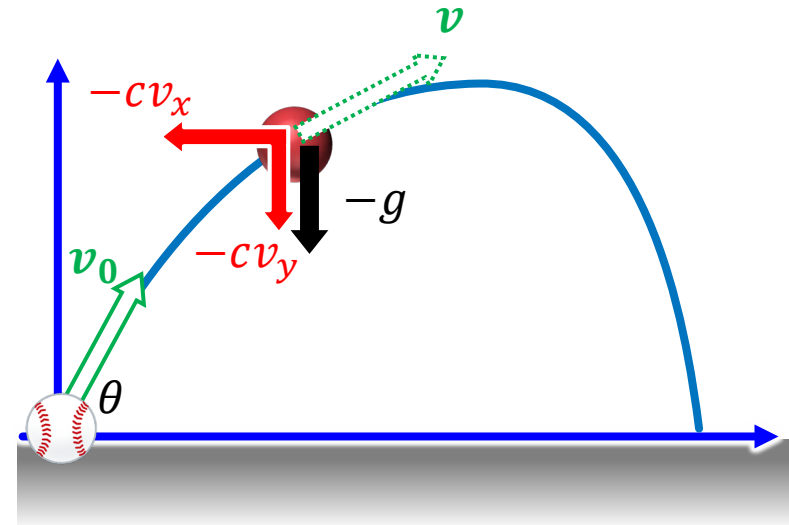
$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= m\mathbf{g} - c\mathbf{v} \\ &= m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - m\gamma \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



x 方向

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -\gamma v_x(t)$$

$$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\gamma dt$$

$$\int \frac{1}{v_x(t)} dv = - \int \gamma dt$$

$$\log|v_x(t)| = -\gamma t + C_1$$

$$v_x(t) = C_x e^{-\gamma t}$$

初期条件より

$$v_x(0) = C_x = v_0 \cos \theta$$

$$\therefore v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t}$$

 y 方向

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -\gamma v_y(t) - g$$

$$\frac{dv}{\gamma v_y(t) + g} = -dt$$

$$\int \frac{1}{\gamma v_y(t) + g} dv = - \int 1 dt$$

$$\frac{1}{\gamma} \log|\gamma v_y(t) + g| = -t + C_2$$

$$\log|\gamma v_y(t) + g| = -\gamma t + \gamma C_2$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\gamma} (C_3 e^{-\gamma t} - g)$$

初期条件より

$$v_y(0) = \frac{1}{\gamma}(C_3 - g) = v_0 \sin \theta \quad \therefore v_z(t) = -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t}$$

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} \\ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

それぞれ積分して

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} dt & y(t) &= \int \left\{ -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \right\} dt \\ &= -\frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} e^{-\gamma t} & &= -\frac{g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

初期条件 ($x(0) = y(0) = 0$) より
積分定数を求めると

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ -\frac{g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin \theta\right) (e^{-\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

(2) 水平方向の最大値を着地点とみなすと、ホームランの飛距離を文字式で表せ。(5点)

$$t \rightarrow \infty \text{ とすると } \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\gamma} \end{pmatrix}$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} \\ -\infty \end{pmatrix} \quad \text{よって、飛距離 } l \text{ は } l = \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma}$$

2次元の $f = [x^2y, xy^2 + 1]$ が保存力か否か判定し、保存力ならば、そのポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。ただし、 $U(0, 0) = 0$ とする。(5点)

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \quad \text{であるから} \underline{\text{保存力ではない}}$$