基礎物理学 II

（第3回） 静電場(3)

【今日の内容】
- 電位
- 等電位面

担当教員:西沢望(S-305): nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

（復習）クーロンの法則と電場

力学との対応

静電気力 - 万有引力

クーロンの法則

「2つの電荷は互いに 力を及ぼし合い、
その大きさ F[N] は、
それぞれの電荷量 q[C], q_0[C]の積に比例し、
物体間の距離 r[m] の2乗に反比例する」

$$\boxed{F = k\frac{qq_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}}$$

$k \cong 9.0 \times 10^9$ [N · m²/C²]

$$F = q \cdot \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}} = q \cdot \underline{E}$$ ：電場

多くの電荷から電場を受ける時は

$$E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \underbrace{\frac{q_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^2}}_{\text{大きさ}} \underbrace{\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}}_{\text{方向の単位ベクトル}}$$

復習

万有引力の法則

「2つの物体は互いに引力を及ぼし合い、
その大きさ F[N] は、
それぞれの質量 M[kg], m[kg] の積に比例し、
物体間の距離 r[m] の2乗に反比例する」

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}}$$

$G \cong 6.673 \times 10^{-11}$ [N · m²/kg²]

$$F = m \cdot \boxed{G\frac{M}{r^2}} = m \cdot \underline{g}$$ ：重力場

多くの物体（天体）から重力場を受ける時は

$$g(\boldsymbol{x}) = G\sum_i \underbrace{\frac{M_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^2}}_{\text{大きさ}} \cdot \underbrace{\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}}_{\text{方向の単位ベクトル}}$$

重力場のする仕事

重力 mg に逆らって地表から高さ h まで
引き上げるには

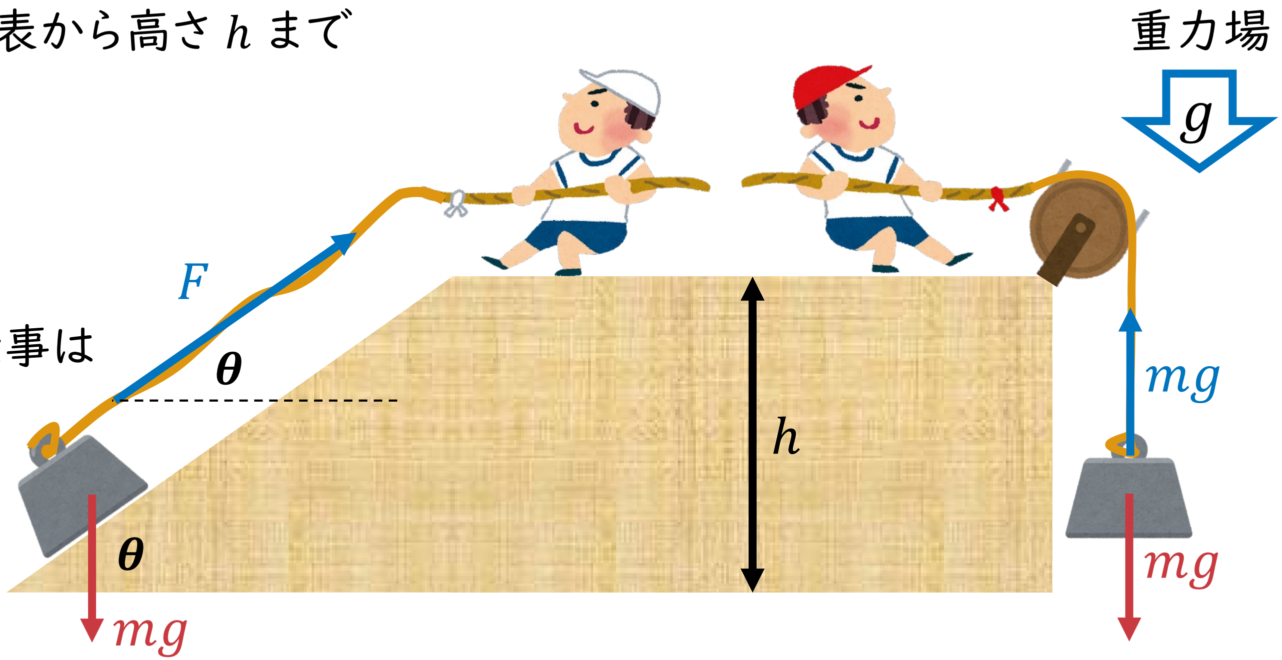
$$W = -mgh$$

の仕事が必要である。

質量 1 [kg] あたりの仕事は

$$\frac{W}{m} = \underline{\qquad\qquad}$$

となる。



質量 1 [kg] あたりの仕事 gh の特徴は

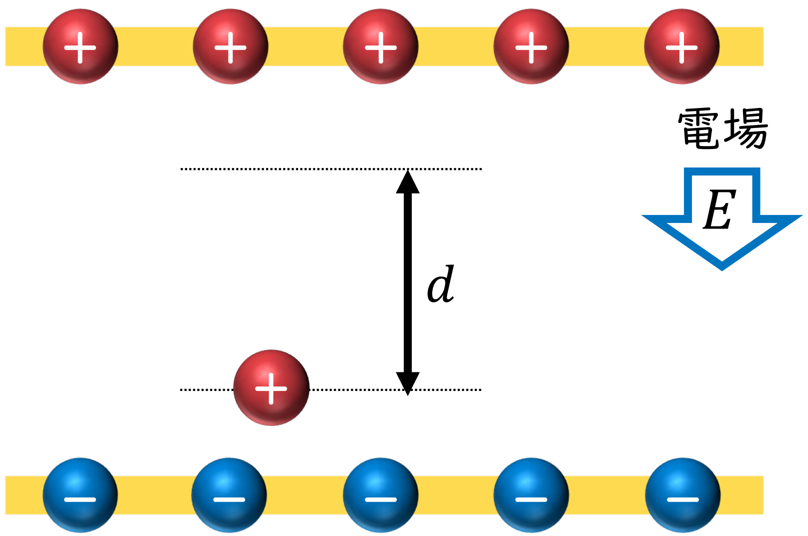
- 仕事により物体は質量 1 [kg] あたりgh のエネルギーを得る　$U = mgh$
- 手を離すと、低いところに向かって落ちていき、位置エネルギーは運動エネルギーに変換される。　$\to \frac{1}{2}mv^2$
- 同じ高さのところを移動させてから手を離しても落ちていかない
落ちていくということは、その間にgh に相当する高低差があるということ

電場のする仕事 → 電位

電気力 F に逆らって距離 d まで
引き上げるには

$$W = Fd = \underline{\qquad\qquad}$$

の仕事が必要である。



電荷 1 [C] あたりの仕事は

$$\frac{W}{q} = \underline{\qquad\quad} \equiv \phi \ : \underline{\qquad\qquad}$$

となる。　　この電荷 1 [C] あたりの仕事 Ed ($\equiv V$) を $\underline{\qquad\qquad}$ という。電位 V の特徴は

- 仕事により物体は電荷 1 [C] あたり Ed の位置エネルギーを得る　　$U = qEd$
- 手を離すと、低いところに向かって落ちていき、位置エネルギーは運動エネルギーに変換される。　　$qEd \rightarrow \frac{1}{2}mv^2$
- 同じ高さのところを移動させてから手を離しても落ちていかない
落ちていくということは、その間に電位 V に相当する高低差があるということ

➔ 電位は電気的な高さ（場の強さも含めた）に相当する　→ $\underline{\qquad\qquad}$ という

例題I ［一様な電場での仕事と電位］

1. $+2.0$ [C] の電荷を電位差 10 [V] の2点間、静電気力に逆らって運ぶのに必要な仕事はいくらか

$$W = qV \quad \text{より} \quad W = (2.0) \times 10 \ \ [\mathrm{C \cdot V}] \quad = 20 \ [\mathrm{C \cdot V}]$$

$$\phi = Ed \quad \text{より} \quad [\mathrm{V}] = [\mathrm{N}/\mathrm{C}] \times [\mathrm{m}] = \left[\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\therefore [\mathrm{C \cdot V}] = [\mathrm{N \cdot m}] = [\mathrm{J}] \qquad \underline{W = 20 \ [\mathrm{J}]}$$

2. 一様な電場中で電場の方向に 0.10 [m] 離れた2点の電位差が10Vであるとき、電界の強さはいくらか

$$V = Ed \quad \text{より} \qquad E = \frac{V}{d} \ = \frac{10}{0.10} \ \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \ = 100 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$= \underline{1.0 \times 10^2 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]}$$

演習I [一様な電場での仕事と電位]

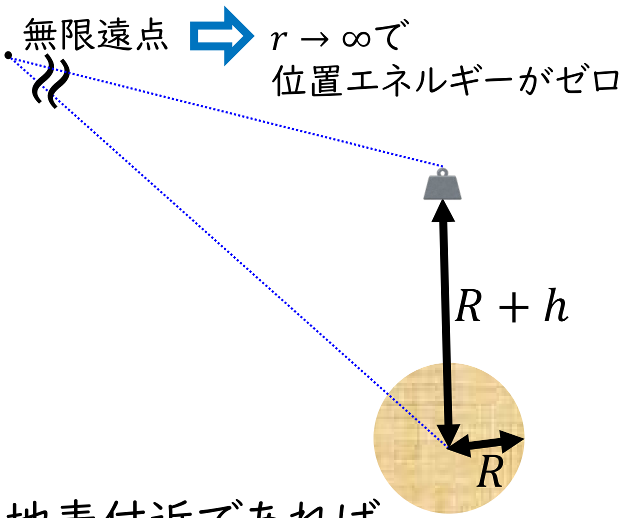
1. $+1.0 \times 10^{-9}$ [C] の電荷から 0.30 [m] 離れた点の電位はいくらか

2. 例題Iの(2)の電場中において$+4.0 \times 10^{-7}$ [C] の電荷をその2点間で電位の低い点から高い点に運ぶとき、電場がする仕事はいくらか

重力（万有引力）のする仕事

【一般化】
2点間での重力場の大きさが同一とはみなせない場合、
基準点を星の中心や地表にできないので無限に遠い点（無限遠点）を基準に取る

$$\boxed{W = \int_{P_A}^{P_B} dW = \int_{P_A}^{P_B} F \cdot dx}$$



星の半径を R として無限遠点から重力源から半径 $R + h$ の点まで動かす仕事を考えると、

$$W = \int_{\infty}^{R+h} G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R+h} = GMm\left\{-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{\infty}\right)\right\}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad} \equiv U$$ ：位置エネルギー

$$\frac{W}{m} = \frac{U}{m} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$ ：質量1 [kg] あたりの位置エネルギー

地表付近であれば

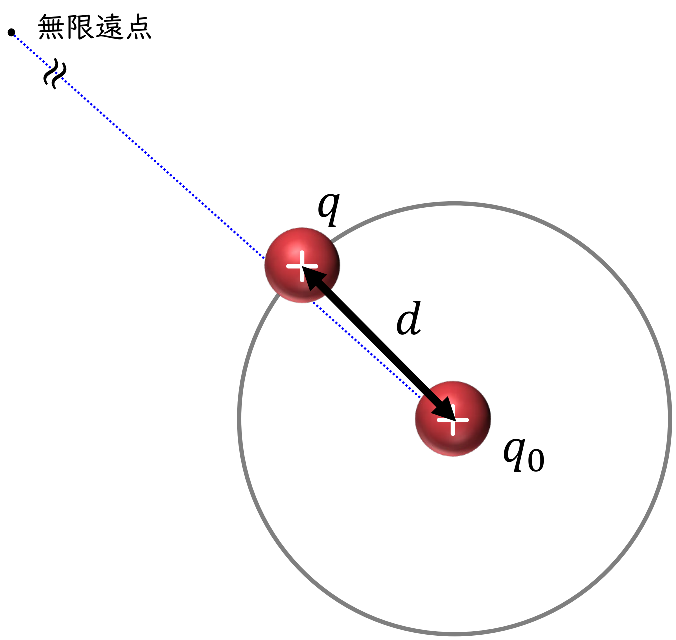
$$U = -\frac{GMm}{R+h} = -G\frac{Mm}{(R+h)^2}(R+h) \cong -G\frac{Mm}{R^2}(R+h) = -mg(R+h)$$

$$\left(\because g = G\frac{M}{R^2}\right)$$

電場のする仕事

【一般化】
点電荷の場合や複数の点電荷が点在しているような電場の場合、
基準点を電荷の中心にできないので無限に遠い点（無限遠点）を基準に取る

$$\boxed{W = \int_{P_A}^{P_B} dW = \int_{P_A}^{P_B} F \cdot dx}$$



点電荷qを無限遠点から点電荷q_0をから距離 d の点まで動かす仕事を考えると、

$$W = \int_{\infty}^{d} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr$$

$$= -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{d} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{d}-\left(-\frac{1}{\infty}\right)\right\}$$

$$= \underline{\hspace{6em}} \equiv U$$ ： 位置エネルギー

$$\frac{W}{q} = \frac{U}{q} = \underline{\hspace{6em}} \equiv \phi$$ **：電位** 電荷q [C] あたりの位置エネルギー

複数の電荷が存在する場合は

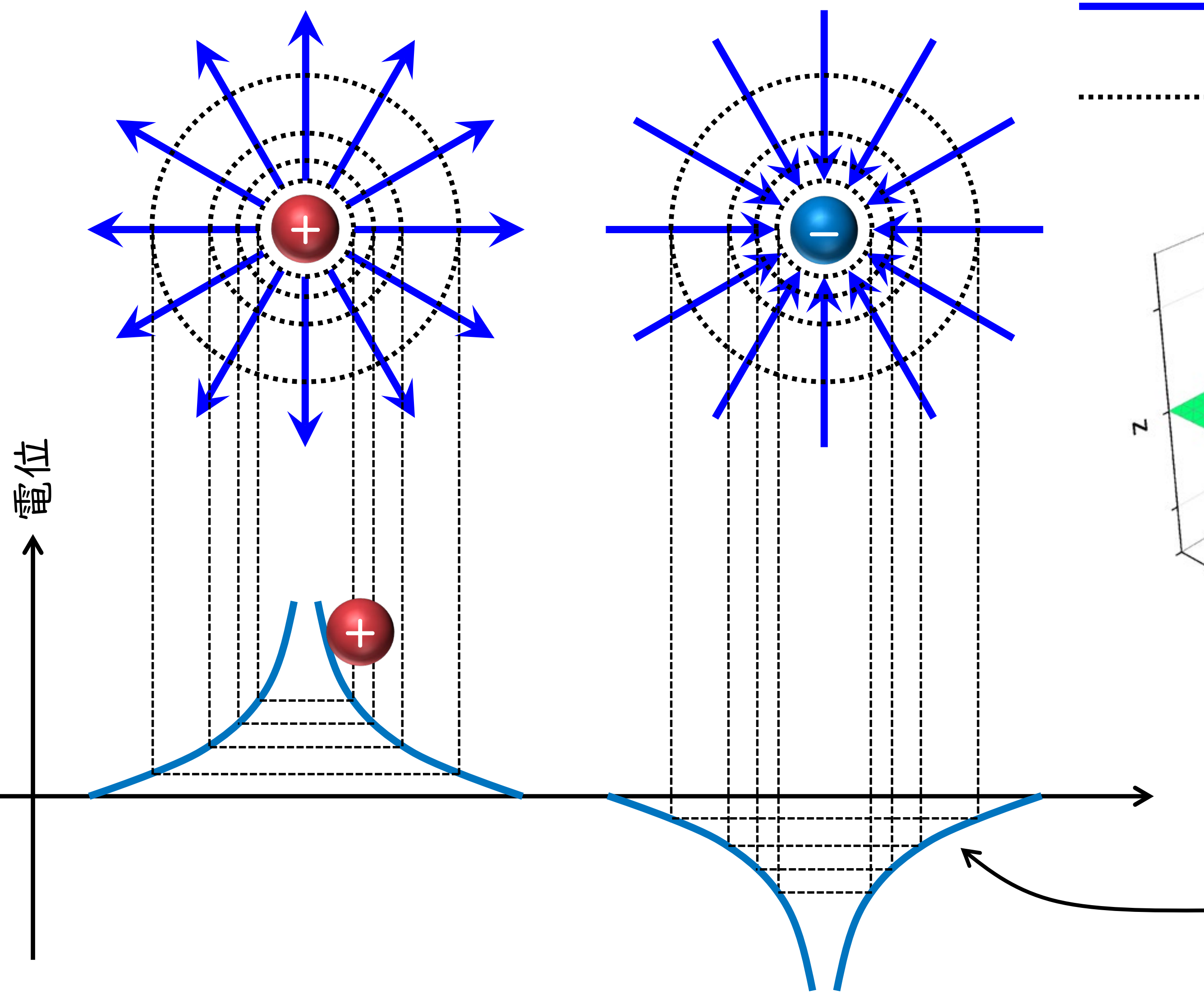
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}$$

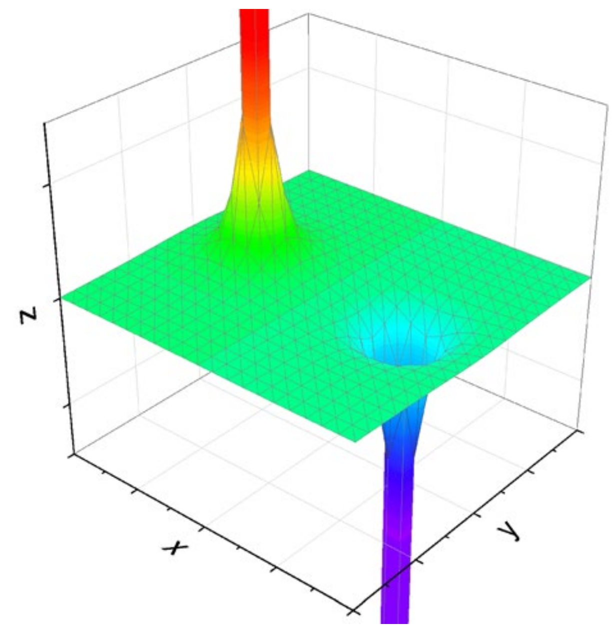
等電位面

電位の等しい点でできる曲面を__________という。 (equipotential surface)

電気力線

等電位面

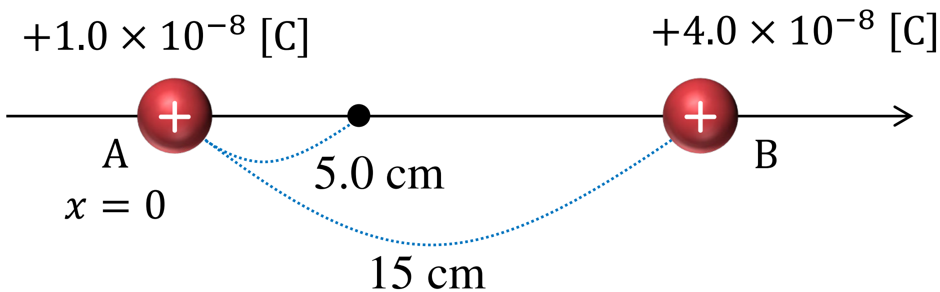




この傾きが電場に相当する

演習2 [電位]

15 cm 離れた2点A, Bに、それぞれ$+1.0\times10^{-8}$ [C]、$+4.0\times10^{-8}$ [C] の電荷がある。A, Bを結ぶ直線上でAから5.0 cmの点での電位を求めよ。



（ここまでまとめ） 静電気力、電場、電位

力学との対応

静電気力 - 万有引力

クーロンの法則

$$\boxed{F = k\frac{qq_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}}$$

$k \cong 9.0 \times 10^9$ $[\mathrm{N \cdot m^2/C^2}]$

$$F = q \cdot \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}} = q \cdot E$$

電場

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}$$

積分

$$U = -\int_{\infty}^{x} E\,dr$$

電位

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r}$$

復習

万有引力の法則

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}}$$

$G \cong 6.673 \times 10^{-11}$ $[\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$

$$F = m \cdot \boxed{G\frac{M}{r^2}} = m \cdot g$$

重力場

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

積分

$$U = -\int_{\infty}^{x} g\,dr$$

単位質量あたりの
位置エネルギー

$$U = -G\frac{M}{r}$$

（地表近くでは近似的に）$\rightarrow -g(R+h)$

重ね合わせの原理

複数の電荷がある場合

力学との対応

静電気力 – 万有引力

複数の重力源（星）がある場合

クーロンの法則

$k \cong 9.0 \times 10^9$ $[\mathrm{N \cdot m^2/C^2}]$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|^2} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

$$\boldsymbol{F} = q \cdot \boldsymbol{E}$$

電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|^2} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

積分

$$U = -\int_\infty^x E\,dr$$

電位

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

復習

万有引力の法則

$G \cong 6.673 \times 10^{-11}$ $[\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$

$$F = mG \sum_i \frac{M_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|^2} \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{g}$$

重力場

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = G \sum_i \frac{M_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|^2} \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

積分

$$U = -\int_\infty^x g\,dr$$

単位質量あたりの
位置エネルギー

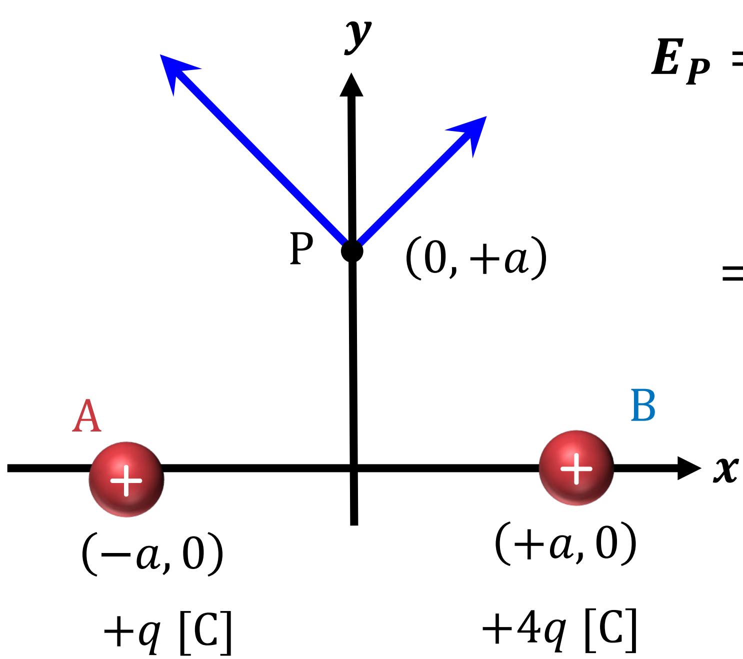
$$U = -G \sum_i \frac{M_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|}$$

例題3［重ね合わせの原理］

$\boldsymbol{xy}$平面上の点A$(-\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$に$+\boldsymbol{q}$ [C]、点B$(+\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$に$+4\boldsymbol{q}$ [C]の点電荷がある。

点P$(\mathbf{0}, +\boldsymbol{a})$につくられる電場ベクトル$\boldsymbol{E_P}$を文字式表わせ。クーロン定数を$\boldsymbol{k}$とする。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = k\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}$$ より



$$\boldsymbol{E_P} = k\left\{\frac{q_A}{|\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_A|^2}\frac{(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_A|}+\frac{q_B}{|\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_B|^2}\frac{(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_B)}{|\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_B|}\right\}$$

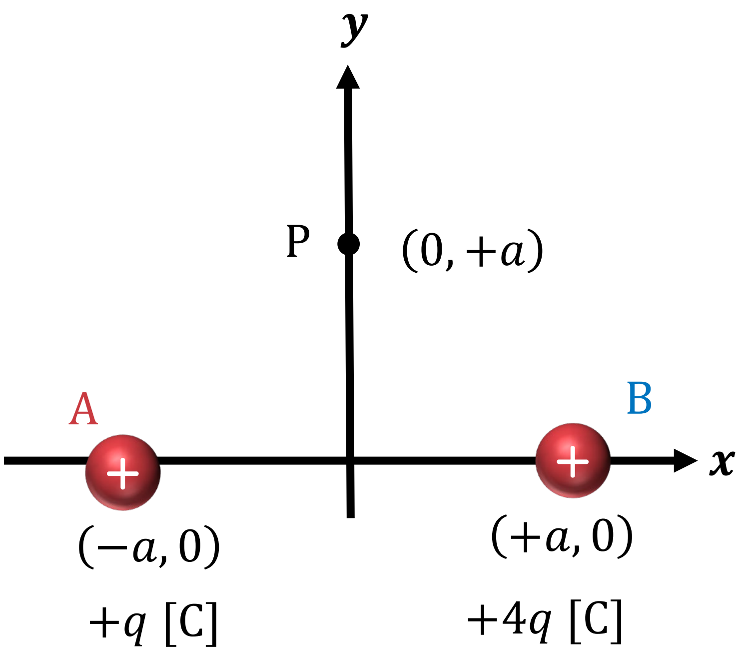
$$= k\left\{\frac{q}{\left(\sqrt{2}a\right)^3}\left\{\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}\right\}+\frac{4q}{\left(\sqrt{2}a\right)^3}\left\{\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\right\}\right\}$$

$$= \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3}\left\{\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-a\\a\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3}\begin{pmatrix}-3a\\5a\end{pmatrix} = \underline{\frac{kq}{2\sqrt{2}a^2}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}}$$

演習3［重ね合わせの原理］

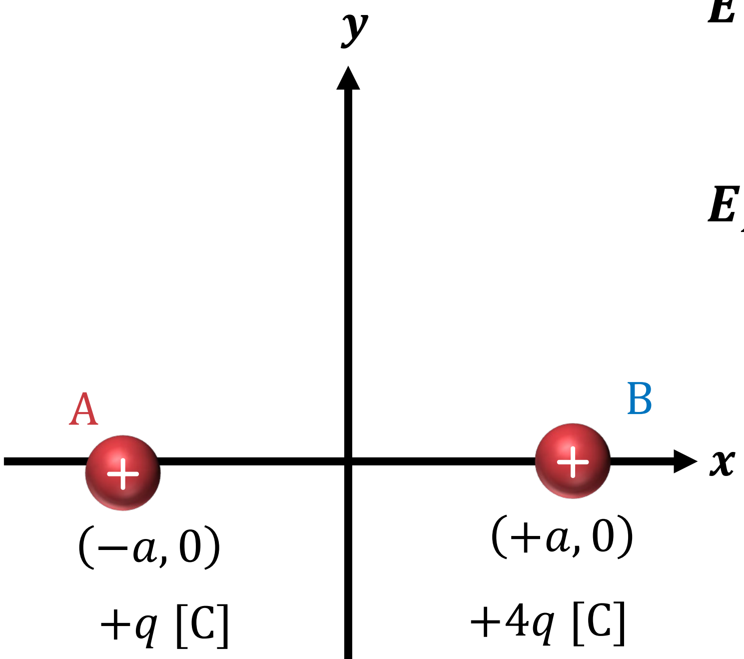
例題3において点P$(\mathbf{0}, +\boldsymbol{a})$での電位を求めよ。



例題4［重ね合わせの原理］

xy平面上の点A$(-a, 0)$に$+q$ [C]、点B$(+a, 0)$に$+4q$ [C]の点電荷がある。

任意の点X(x,y)における電場を求めよ。



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = k\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}$$ より

$$\boldsymbol{E}_X = k\left\{\frac{q_A}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A|} + \frac{q_B}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B|}\right\}$$

$$= k\left\{\frac{q}{\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right)^3}\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \frac{4q}{\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^3}\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right\}$$

$$= kq\left\{\frac{1}{\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix} + \frac{4}{\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}\right\}$$