基礎物理学

（第9回）さまざまな運動（2）

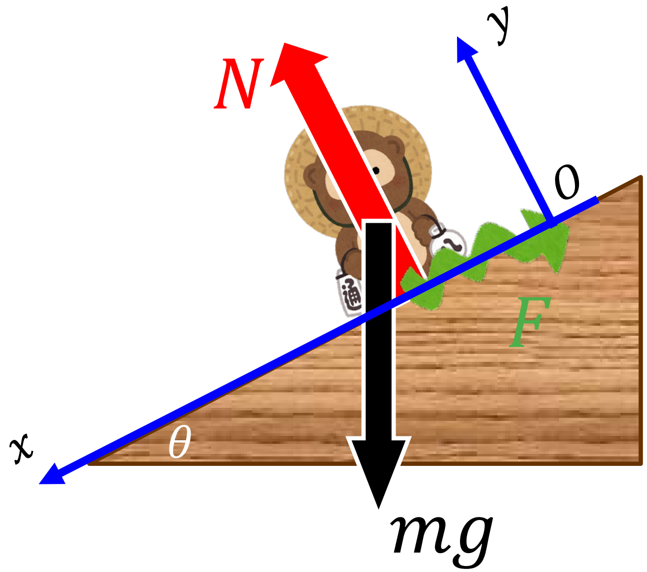
【今日の内容】

- 摩擦力がはたらく運動
- 空気抵抗がはたらく運動

基礎物理学の授業アンケートです。
6/30までに回答ください →

担当教員:西沢望（S-305）: nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

摩擦がはたらく運動



第4回講義で摩擦力を
第5回講義で力のつり合いについて取り扱った。
今回は摩擦力がはたらいたときの<u>運動</u>について学ぼう

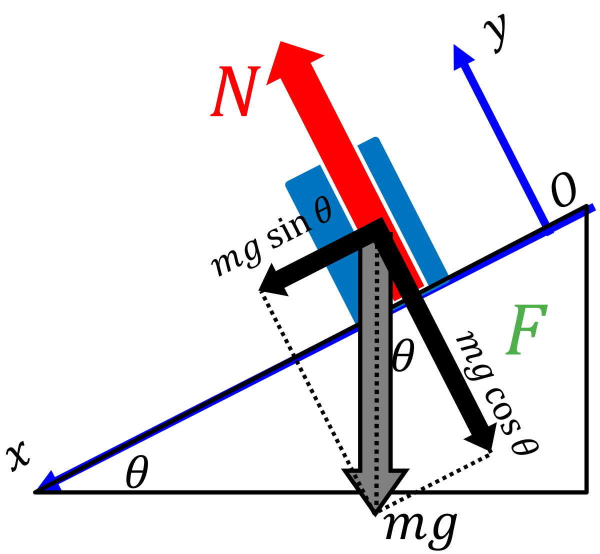
① 物体に力を探し尽くす

② 状況を理想化する ➔ 狸はめり込まない、飛ばない、倒れない

③ 適切な軸を選ぶ

④ 運動方程式を立てる

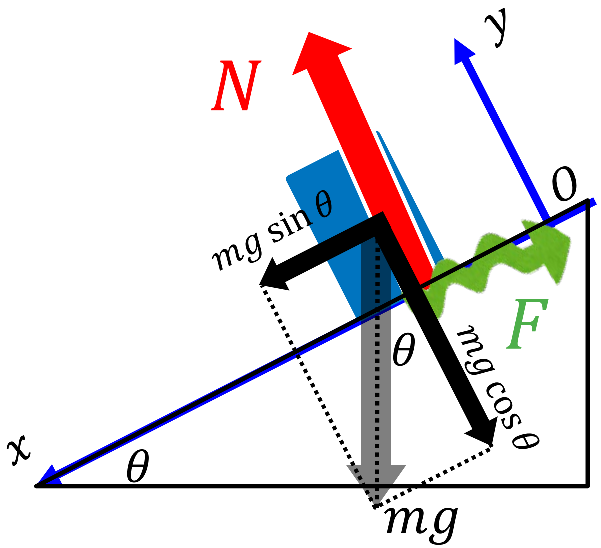
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$m\ddot{\boldsymbol{x}} =$	$m\ddot{\boldsymbol{y}} =$



⑤ 運動方程式の一般解を求める

狸はめり込まないし、飛ばないのだから
$m\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ より、
$N =$

摩擦がはたらく運動



$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$m\ddot{\boldsymbol{x}} = mg\sin\theta - F$	$m\ddot{\boldsymbol{y}} = -mg\cos\theta + N$

⑤ 運動方程式の一般解を求める

狸はめり込まないし、飛ばないのだから
$m\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ より、

$$N = mg\cos\theta$$

(A) 止まっている場合

→ $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ より、

$$F =$$

止まっているためには
Fが最大摩擦力よりも小さくなくてはいけない

$$\leq F_{Max} = \quad =$$

$$\therefore$$

$$\theta_f =$$

θ_fを摩擦角(friction angle) という

(B) 滑る場合

→ Fが動摩擦力である

$$F = \quad =$$

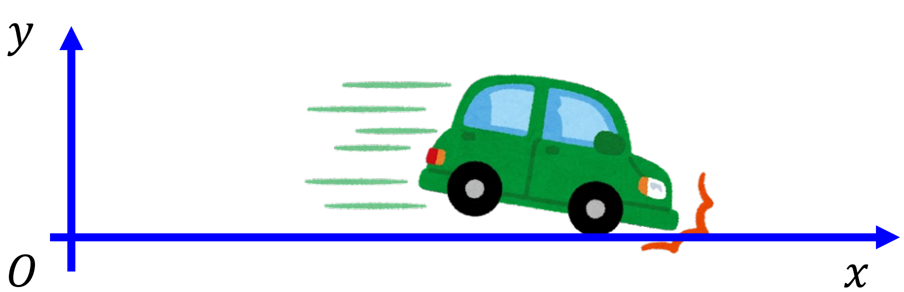
x 方向の運動方程式に代入すると

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} =$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} =$$

等加速度運動する

［例題１］ 摩擦がはたらく運動



時速108kmで走っている自動車が、急ブレーキをかけたら、タイヤがロックした（回転しない）。アスファルトとタイヤの動摩擦係数 μ' を0.78としたとき、車は停車するまでの距離（制動距離という）を求めよ。

［単位換算］SI単位系に統一する

初速度 $v_i = 108\ [\mathrm{km/h}] = 108 \times \dfrac{10^3}{3600} [\mathrm{m/s}] = 30[\mathrm{m/s}]$

運動方程式を立てる

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -F$	$m\ddot{\boldsymbol{y}} = -mg + N$

車も潜ったり、飛んだりしないので、$m\ddot{\boldsymbol{y}} = 0$ より $N = mg$

よって、$F = \mu' N = \mu' mg$

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\mu' mg$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\mu' g$$

となるから

	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{a}$	$-\mu' g$
$\boldsymbol{v}$	$v_0 - \mu' g t$
$\boldsymbol{x}$	$v_0 t - \dfrac{1}{2}\mu' g t^2$

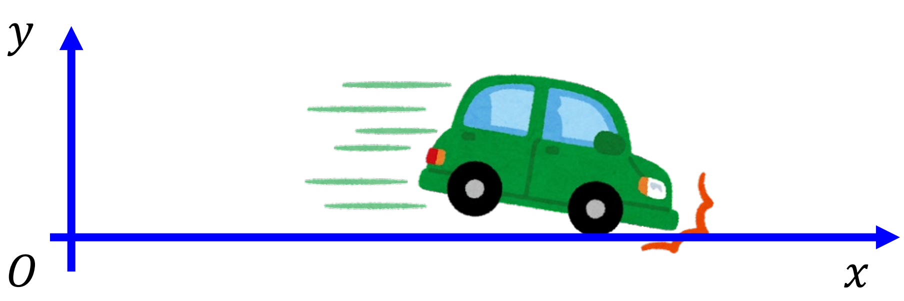
止まったとき（$v = 0$）ときの時間 Tは　$T = \dfrac{v_0}{\mu' g}$

その時までの変位 L は

$$L = v_0 \frac{v_0}{\mu' g} - \frac{1}{2}\mu' g \left(\frac{v_0}{\mu' g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{2\mu' g} = 58.87\ [\mathrm{m}]$$

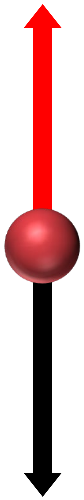
$$= \underline{59[\mathrm{m}]}$$

［演習1］ 摩擦がはたらく運動



時速36 kmで走っていた自動車が、急ブレーキをかけたら、タイヤがロックした（回転しない）。車は8.0 mスリップして停車した。
このときのアスファルトとタイヤの動摩擦係数 μ' を求めよ。

空気抵抗がはたらく運動



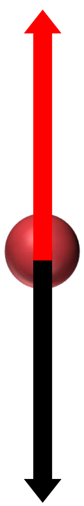
空気の抵抗をこれまでは考えてこなかったが、投射系の運動では空気の抵抗が大きく運動に影響を及ぼす。

空気抵抗（粘性抵抗）は、その起源にかかわらず

速度が小さいときは、速さに比例した

速度が大きいときは、速さの2乗に比例した　抵抗を受ける

【速度に比例する場合】



$$m\frac{d^2x}{dt^2} =$$

m で割ると

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} =$$

$\left(\text{ただし、} k = \frac{c}{m}\right)$

$\frac{dx}{dt} = v$　とし、$-k$でわると

$$-\frac{1}{k}\frac{dv}{dt} =$$

左辺の分母と右辺を入れ替えて

$$\frac{dv}{\quad} = -kdt$$

この項目は初心者には少々難しい数学が含まれるが、生物学的には鳥が飛ぶ運動など以外にも水中での運動、細胞内の小器官の運動などを表すのに非常によく使われるので紹介する。微分方程式を学んだらもう一度復習してもらいたい。

空気抵抗がはたらく運動（計算・・・。）

$$-\frac{1}{k}\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{k} + v$$

$$\frac{dv}{-\frac{g}{k} + v} = -kdt$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{dv}{\qquad} = -k \int dt$$

積分を計算すると、

$$\log\left|\qquad\qquad\right| = -kt + C$$

log を外すと

$$\left(\qquad\qquad\right) = e^{-kt+C}$$

v の式にすると、

$$v =$$

$e^C = A$ として

$$v =$$

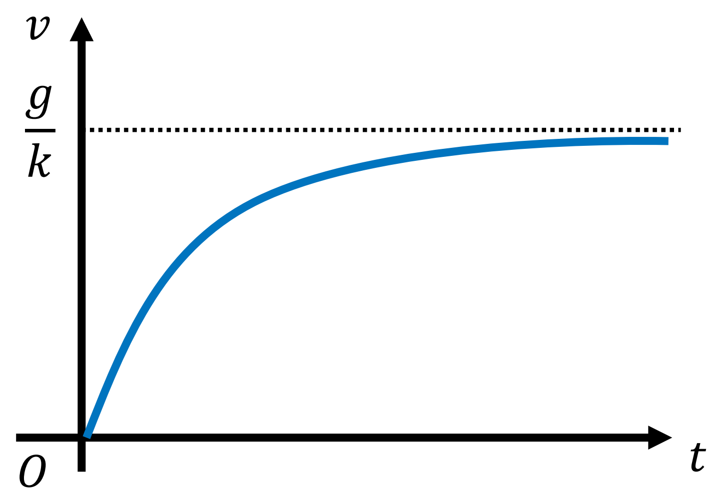
$$=$$

$t = 0$ において
$v = 0$ であるから

$$0 = \frac{g}{k} + A \cdot 1$$

$$\therefore A =$$

$$\therefore v =$$



この関数は、上図のようになり、$t \to \infty$ で $\frac{g}{k}$ に漸近することがわかる。

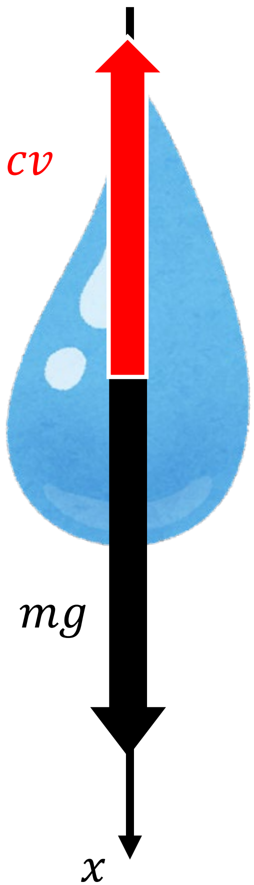
すなわち、
空気抵抗を受けて落下する物体は十分時間が経つと一定速度で落下する。

この速度を
$\boldsymbol{v_{term}}$という

$$v_{term} =$$

［演習2］ 空気抵抗がはたらく運動

風のない空気中を質量 m[kg] の雨滴が落下している. 鉛直下向きを x 軸正の向きとすると, 雨滴は, 速さ v [m/s] に比例する大きさ cv[N] の抵抗力を, x 軸負の向きに受けながら落下している. 雨滴の初速度を 0 [m/s]として, 以下の設問に従って終端速度を求めよ。



（1）雨滴の空気抵抗係数 c は　$c = 6\pi\mu r$ と表される。

（r：雨滴の半径 [m]
μ：空気の粘性定数 [kg/m · s]）

このとき、雨滴の密度をρ [kg/m^3]とすると、終端速度が雨滴の半径の2乗に比例することを示せ。

$$v_{term} = \frac{g}{k} = \frac{mg}{c}$$

（2）各定数が以下のとき、雨滴の終端速度をもとめよ。

$r = 1[\mu\mathrm{m}] = 1 \times 10^{-6}[\mathrm{m}]$
$r = 1.8 \times 10^{-5}$ [kg/m · s]
$\rho = 103$ [kg/m^3]

前々回の演習3

今年3月のWBCで大谷選手がオーストラリア戦で打った看板直撃ホームランは、打球速度173km/hで推定飛距離140mであった。空気抵抗を無視したとき、大谷選手の打ち出した角度はいくらか。ボールの重さは150 gとする

［単位換算］SI単位系に統一する

初速度 $V_0 = 173\ [\mathrm{km/h}] = 48.06[\mathrm{m/s}]$

質量 $m = 150\ [\mathrm{g}] = 0.15[\mathrm{kg}]$

	x	y
a	0	$-g$
v	$V_0 \cos\theta$	$V_0 \sin\theta - gt$
x	$V_0 \cos\theta \cdot t$	$V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

東京ドームが無限に広く地面に落ちたとした（ $y = 0$ ）ときの時間 Tは

$$V_0 \sin\theta \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 = 0$$

$$T = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$$

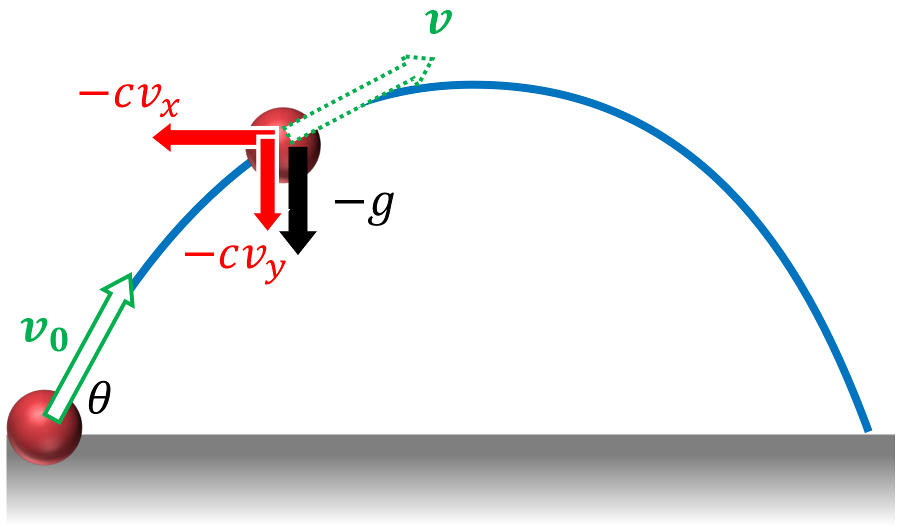
このときのx方向の距離が140[m]であるから

$$X = V_0 \cos\theta \cdot T$$
$$= V_0 \cos\theta \cdot \frac{2V_0 \sin\theta}{g} = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{g}{V_0^2} X\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{9.8 \cdot 140}{(48.06)^2}\right)$$
$$= \underline{18.2°}$$

実際には空気抵抗とボールのバックスピンによる揚力を考慮しなくてはいけないので、角度は倍程度の30°程度になる

空気抵抗を考慮したホームラン



x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt}$$

y

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - c\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = -k\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

$$\frac{dv_x}{v_x} = -kdt$$

$$\log v_x = -kt + C_1$$

$$v_x = e^{C_1}e^{-kt}$$

$v_x(t=0) = v_0\cos\theta$であるから

$$e^{C_1} = v_0\cos\theta$$

$$\boldsymbol{v_x = v_0\cos\theta\cdot e^{-kt}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = -g - k\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y$$

$$\frac{dv_y}{v_y + \frac{g}{k}} = -kdt$$

$$\log\left|v_y + \frac{g}{k}\right| = -kt + C_2$$

$$v_y + \frac{g}{k} = e^{C_2}e^{-kt}$$

$v_y(t=0) = v_0\sin\theta$であるから

$$e^{C_2} = v_0\sin\theta + \frac{g}{k}$$

$$\boldsymbol{v_y = -\frac{g}{k} + \left(v_0\sin\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt}}$$

空気抵抗を考慮したホームラン

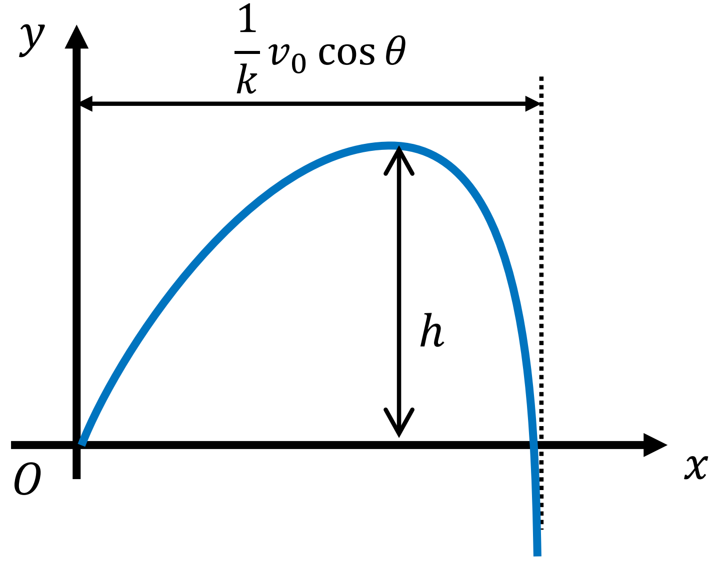
	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{a}$	$-kv_x$	$-g-kv_y$
$\boldsymbol{v}$	$v_0\cos\theta\, e^{-kt}$	$-\dfrac{g}{k}+\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}$
	$x(t=0)=0,$	$y(t=0)=0$ より
$\boldsymbol{x}$	$\dfrac{1}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-kt}\right)$	$-\dfrac{g}{k}t+\dfrac{1}{k}\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)$

$t\to\infty$ とすると、

$$v_x\to 0 \qquad v_y\to -\frac{g}{k}$$

$$x\to\frac{1}{k}v_0\cos\theta \qquad y\to -\infty$$

となるので、運動の様子は右図のようになる



[演習3] 空気抵抗を考慮したホームラン

今年3月のWBCで大谷選手がオーストラリア戦で打った看板直撃ホームランは、打球速度173km/hで推定飛距離140mであった。空気抵抗が速度に比例するとき、大谷選手の打ち出した角度はいくらか。空気抵抗係数を0.3とする。

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{a}$	$-kv_x$	$-g-kv_y$
$\boldsymbol{v}$	$v_0\cos\theta\, e^{-kt}$	$-\dfrac{g}{k}+\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}$
$\boldsymbol{x}$	$\dfrac{1}{k}v_0\cos\theta\left(1-e^{-kt}\right)$	$-\dfrac{g}{k}t+\dfrac{1}{k}\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)$