

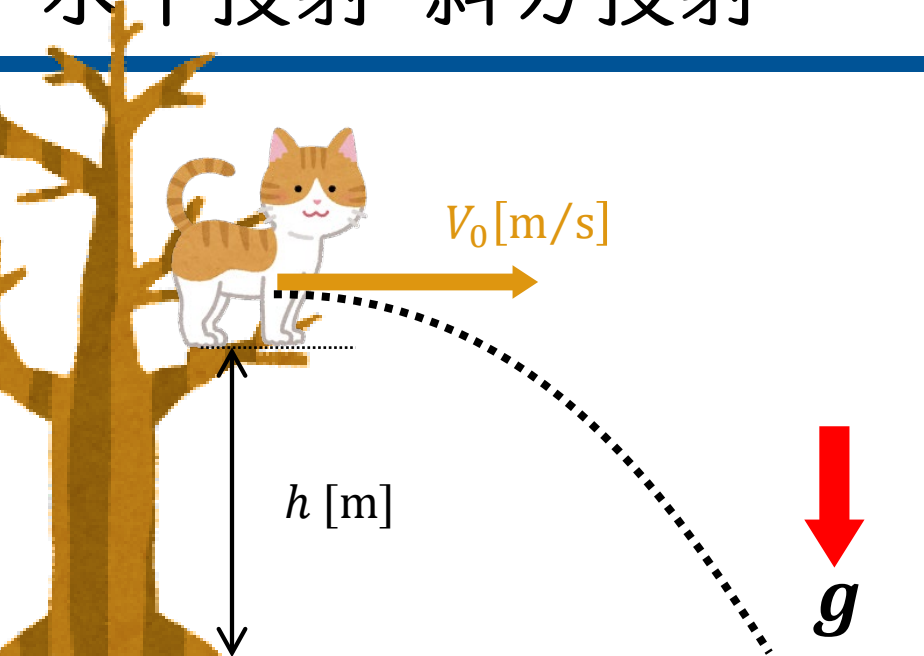
基礎物理学

(第8回) さまざまな運動(1)

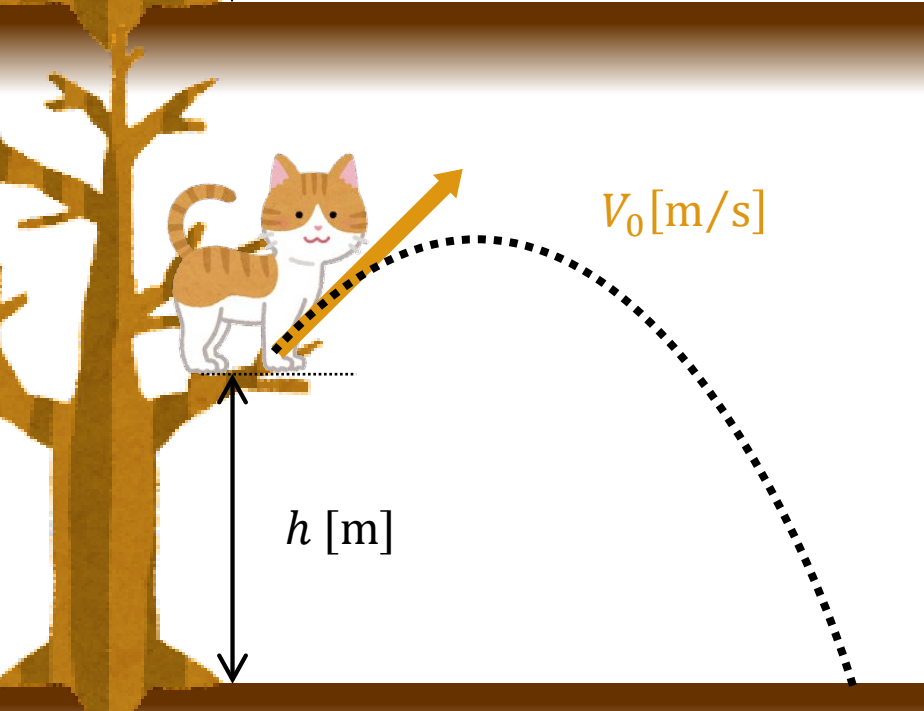
【今日の内容】

- 水平投射
- 斜方投射

水平投射・斜方投射



初速が重力加速度に
直交する運動を _____ という
直交しない運動を _____ という



摩擦や抵抗がない場合

水平方向:

鉛直方向:

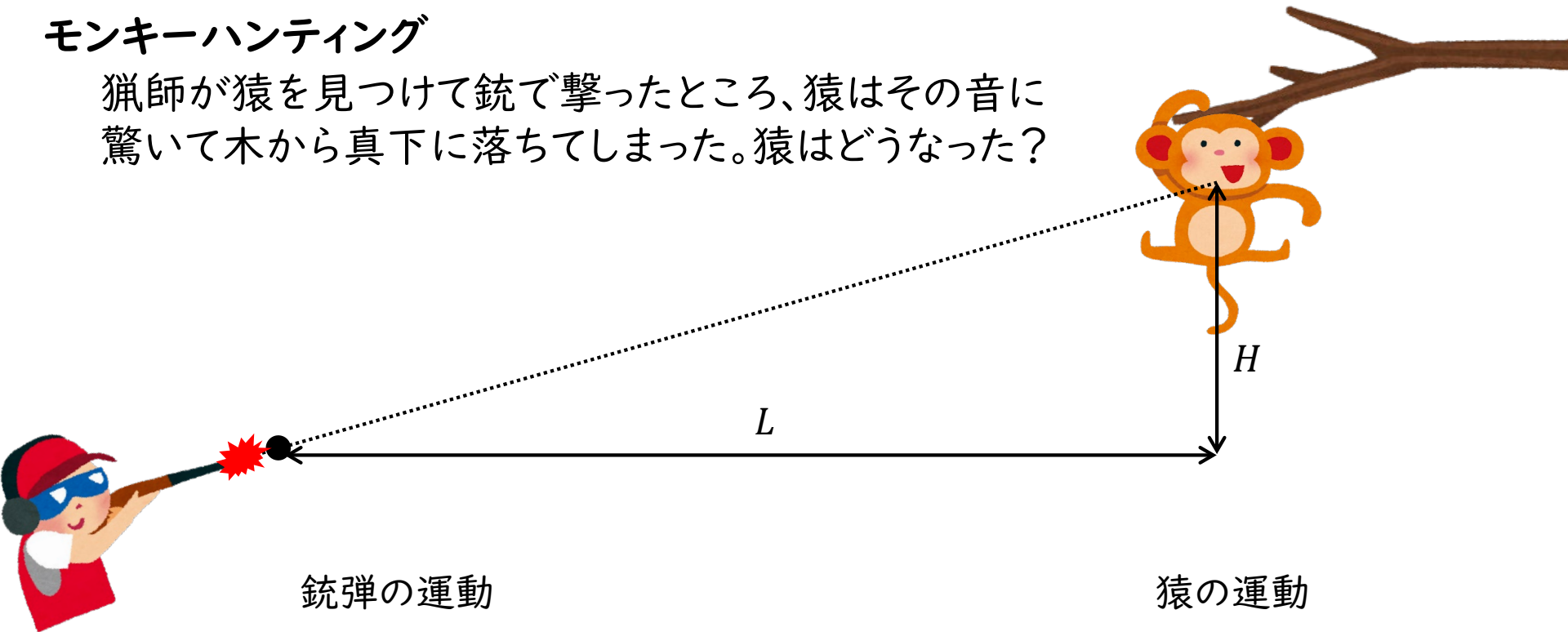
【解法】

2方向にわけて運動方程式を立てて
一般解を求める

いろいろな水平投射、斜方投射

モンキーハンティング

猟師が猿を見つけて銃で撃ったところ、猿はその音に驚いて木から真下に落ちてしまった。猿はどうなった？



銃弾の運動

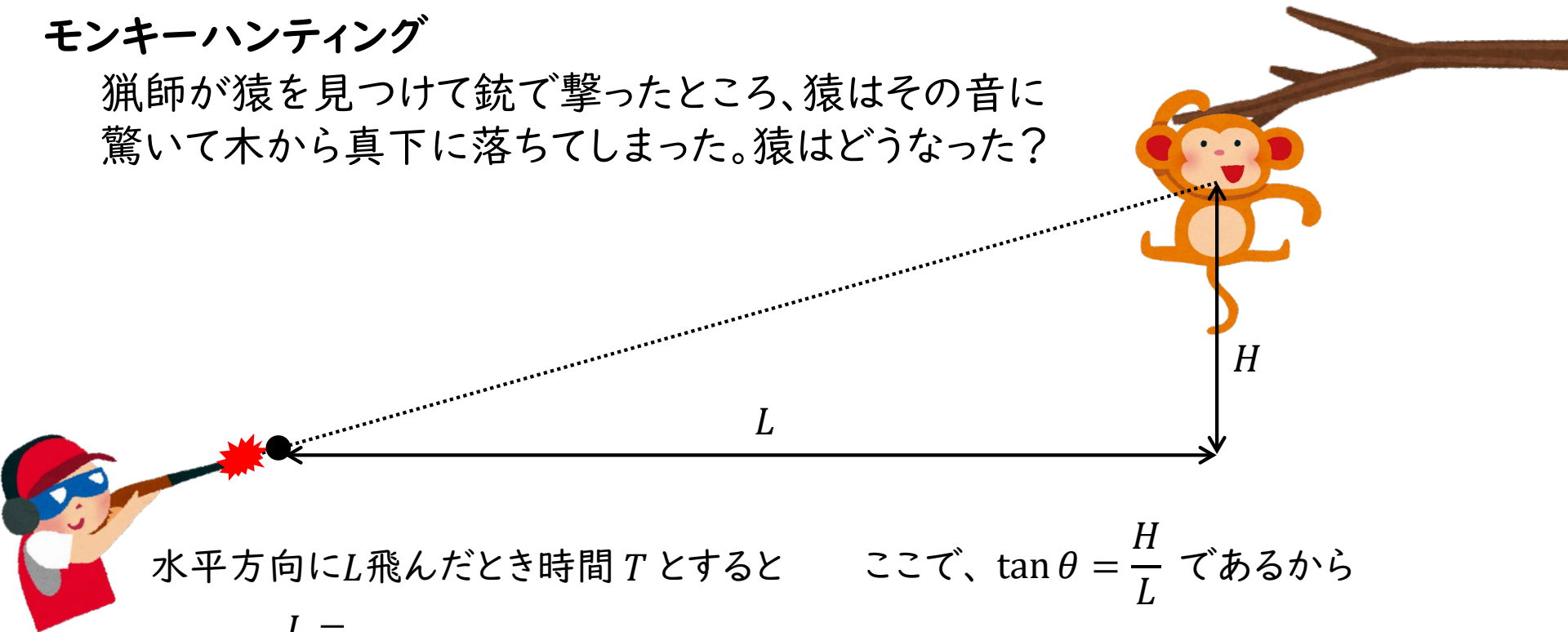
猿の運動

	x	y		y
a	0	$-g$	a	$-g$
v			v	
x			x	

いろいろな水平投射、斜方投射

モンキーハンティング

猟師が猿を見つけて銃で撃ったところ、猿はその音に驚いて木から真下に落ちてしまった。猿はどうなった？



水平方向に L 飛んだとき時間 T とすると

$$L =$$

$$T =$$

このとき、銃弾の y 方向の変位 Y は

$$Y =$$

$$=$$

ここで、 $\tan \theta = \frac{H}{L}$ であるから

$$Y =$$

猿の y 方向の変位 Y_{saru} は

$$Y_{saru} =$$

$$=$$

よって、サルは撃たれる。

[例題1] いろいろな水平投射、斜方投射

テッポウウオが葉っぱの上のバッタに向かって水を吹き出した。バッタは水平距離 40 cm、高さ 30 cm の位置にいる。吹き出す水の初速度が 10 m/s であるとき、どの様な角度で打てばバッタを捉えることができるか。

水を打ち出す角度を θ とすると、

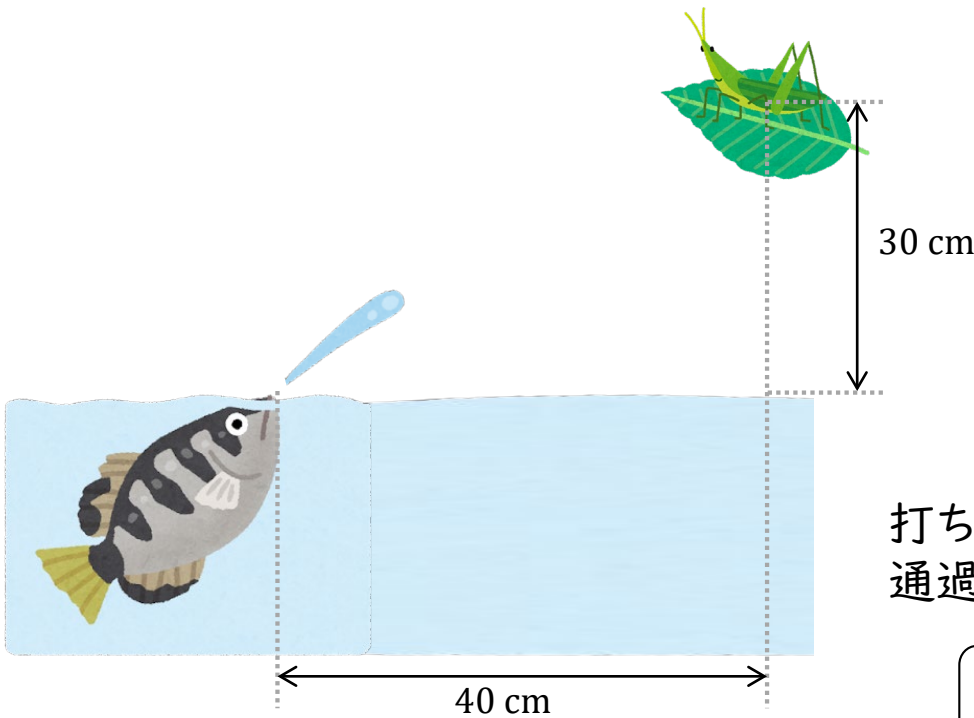
	x	y
a	0	$-g$
v	$V_0 \cos \theta$	$V_0 \sin \theta - gt$
x	$V_0 \cos \theta \cdot t$	$V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

打ち出し位置を原点にとると、(0.4, 0.3) を水が通過すればいいので、水の軌道を求める。

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \theta \cdot t \\ y = V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

t を消去すると

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$



[例題1] いろいろな水平投射、斜方投射

テッポウウオが葉っぱの上のバッタに向かって水を吹き出した。バッタは水平距離 40 cm、高さ 30 cm の位置にいる。吹き出す水の初速度が 10 m/s であるとき、どの様な角度で打てばバッタを捉えることができるか。

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} x^2$$

$(x, y) = (0.4, 0.3)$ を代入すると

$$0.3 = \tan \theta \cdot (0.4) - \frac{1}{2} \frac{9.8}{(10)^2 \cos^2 \theta} (0.4)^2$$

$$1.568 = 80 \tan \theta \cos^2 \theta - 60 \cos^2 \theta$$

$$= 80 \cos \theta \sin \theta - 60 \cos^2 \theta$$

$$= 40 \sin 2\theta - 30(\cos 2\theta + 1)$$

$$31.568 = 40 \sin 2\theta - 30 \cos 2\theta$$

$$= 50 \sin(2\theta + \alpha)$$

ただし、 $\sin \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)$

$$\cos \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \alpha = -36.87^\circ$$

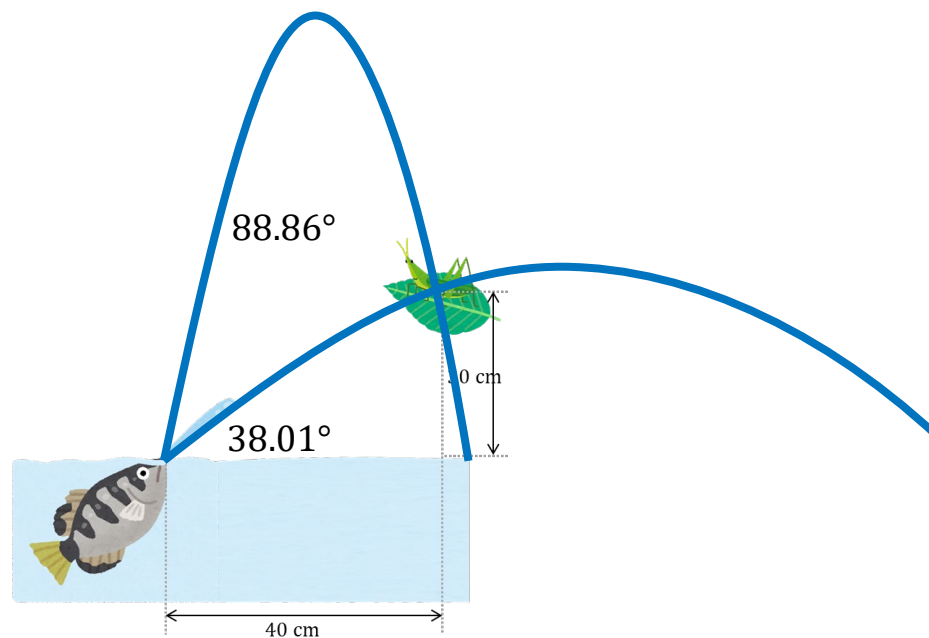
$$\therefore \sin(2\theta + \alpha) = 0.63136$$

$$2\theta + \alpha = \sin^{-1}(0.63136)$$

$$= 39.15^\circ, 140.85^\circ$$

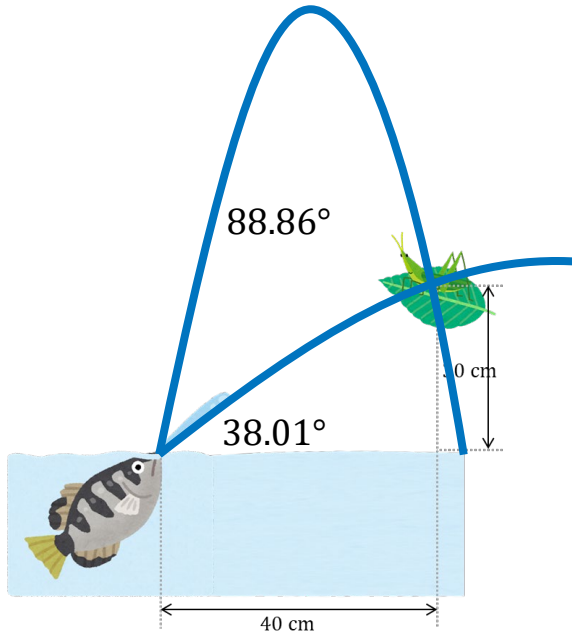
$$2\theta = 76.02^\circ, 177.72^\circ$$

$$\theta = \underline{38.01^\circ}, \underline{88.86^\circ}$$



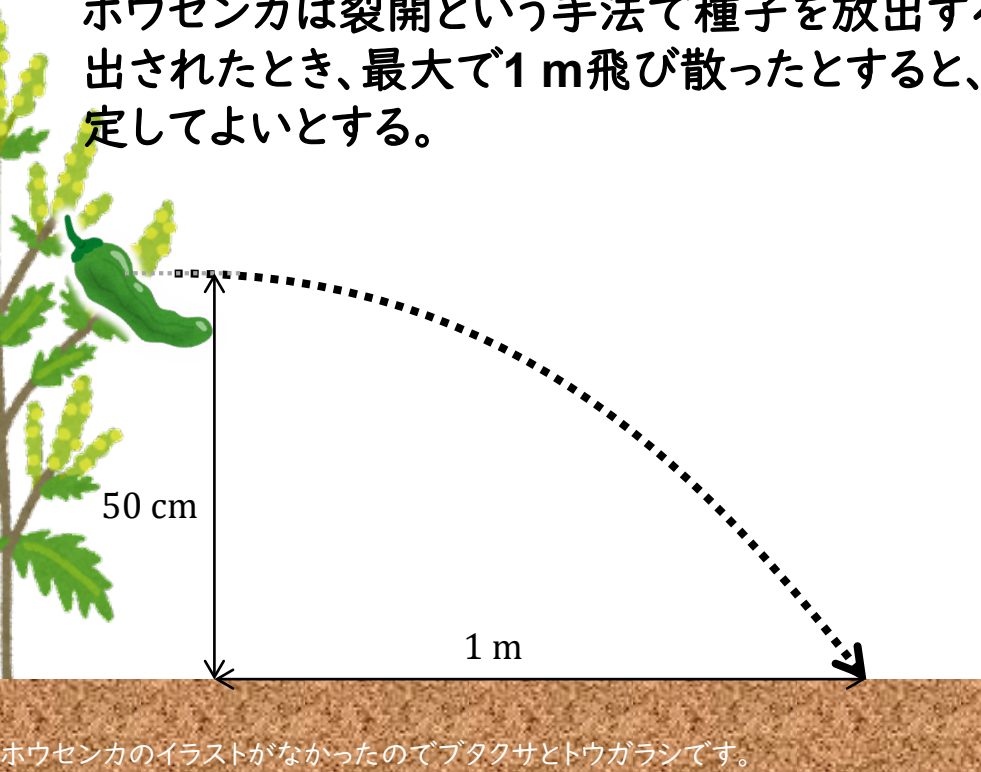
[演習1] いろいろな水平投射、斜方投射

例題1において、バッタに水を当てることができる角度が2つ導出された。それぞれの角度で水を撃ち出したときに、バッタに当たるまでの時間を比較して、テッポウウオが実際にはどちらの角度で撃つか考察せよ。



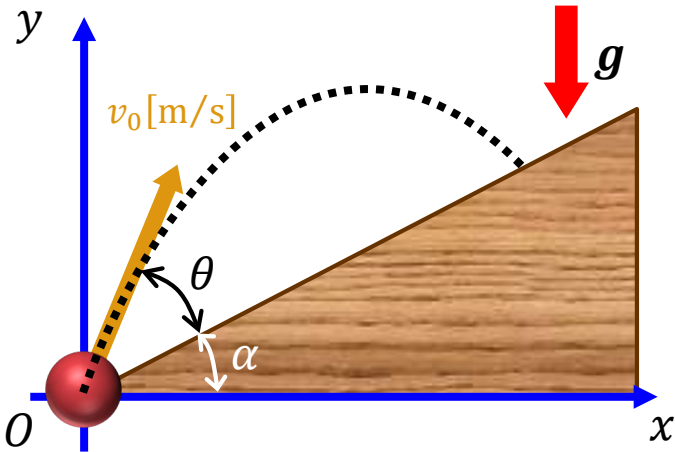
[演習2]

ホウセンカは裂開という手法で種子を放出する(爆発性裂開)。高さ50cmの実から種が放出されたとき、最大で1 m飛び散ったとすると、種の初速度はいくらか。水平投射であると仮定してよいとする。



ホウセンカのイラストがなかったのでブタクサとトウガラシです。

[例題2] 斜面への斜方投射



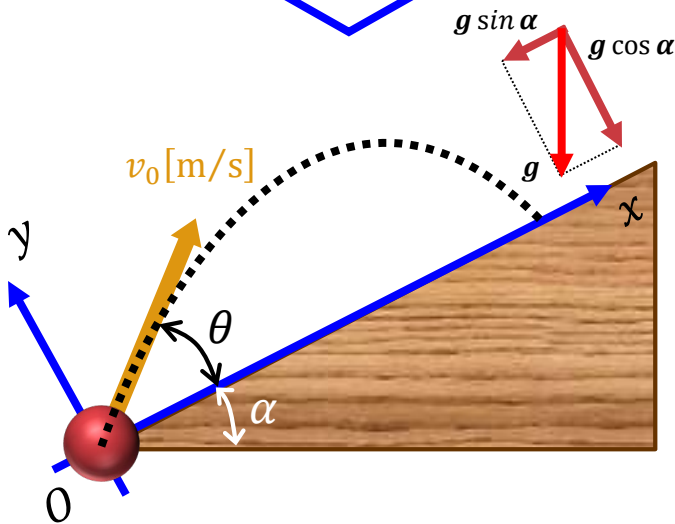
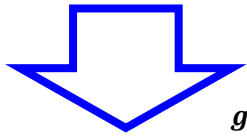
水平面と角 α をなす斜面に対して角度 θ をなす方向に初速 v_0 で小球を投射したところ、斜面上に落下した。

- (1) 斜面に落下するまでの時間 T を求めよ。
- (2) 斜面方向に到達距離 L を求めよ。

水平軸と鉛直軸で求めることもできる

(落下位置を $x:y = \cos \alpha : \sin \alpha$ とする) が扱いづらい

→ 軸の取り方を斜面方向にする



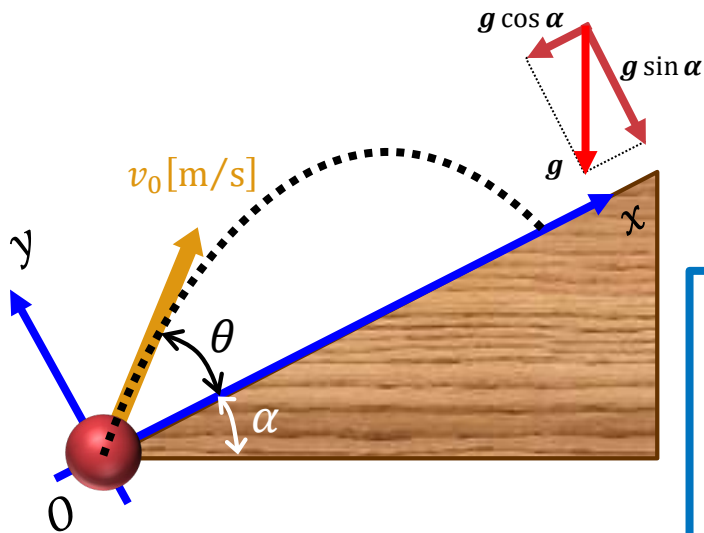
	x	y
a	$-g \sin \alpha$	$-g \cos \alpha$
v		
x		

(1) 斜面に落下する $\rightarrow y = 0 @ t = T$

$$0 = v_0 \sin \theta \cdot T - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot T^2$$

$$\therefore T = 0, \frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

[例題2] 斜面への斜方投射



水平面と角 α をなす斜面に対して角度 θ をなす方向に初速 v_0 で小球を投射したところ、斜面上に落下した。

- (1) 斜面に落下するまでの時間 T を求めよ。
- (2) 斜面方向に到達距離 L を求めよ。

	x	y
a	$-g \sin \alpha$	$-g \cos \alpha$
v	$v_0 \cos \theta - g \sin \alpha \cdot t$	$v_0 \sin \theta - g \cos \alpha \cdot t$
x	$v_0 \cos \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$	$v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$

(2) 斜面に落下する $\rightarrow y = 0 @ t = T$

$$L = v_0 \cos \theta \cdot T - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot T^2$$

$$= v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} \right)^2$$

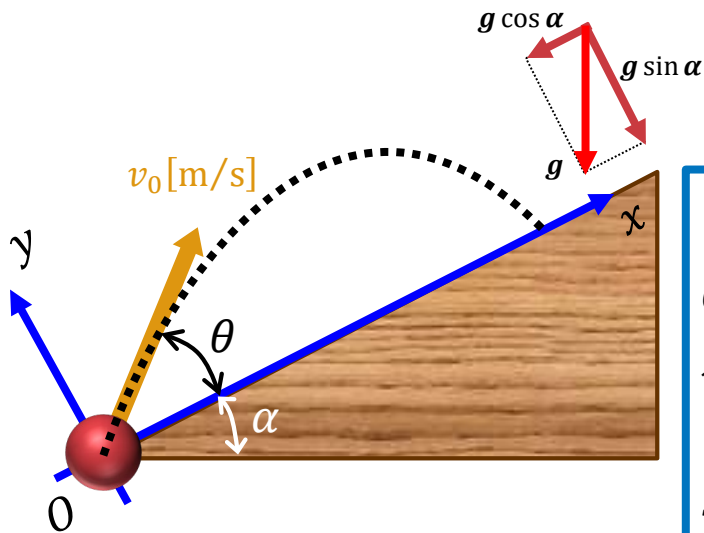
$$= \frac{2v_0^2 \sin \theta}{g \cos^2 \alpha} (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\alpha + \theta)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{v_0^2 \{\sin(2\theta + \alpha) - \sin \alpha\}}{g \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

[演習2] 斜面への斜方投射2



例題1で $\alpha = 30^\circ$ としたとき

(3) L が最大となる θ を求めよ。

(4) 小球が斜面に対して垂直に落下するとき、 θ を求めよ。

	x	y
a	$-g \sin \alpha$	$-g \cos \alpha$
v	$v_0 \cos \theta - g \sin \alpha \cdot t$	$v_0 \sin \theta - g \cos \alpha \cdot t$
x	$v_0 \cos \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$	$v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$