基礎物理学

(第7回) 運動の法則(2)

【今日の内容】

- 運動方程式の立て方
- 運動方程式の解き方

担当教員:西沢望(S-305): nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

運動方程式の立て方・解き方（１）

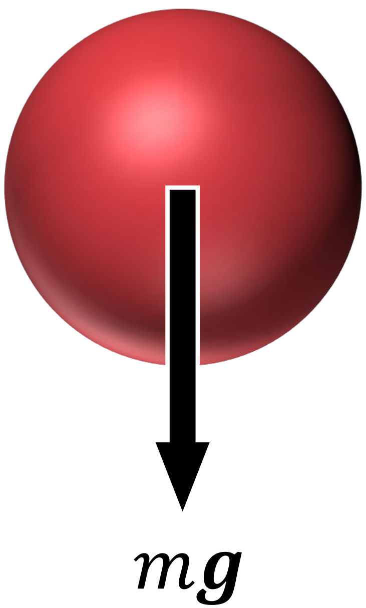
運動方程式

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

・・・微分方程式の形で書かれるため、高校時代は簡単なものか丸覚えするしかない

【１】 物体にはたらく力を＿＿＿＿＿＿

例： 落下運動



例の場合：

- 重力（下向きに $m\boldsymbol{g}$）
- 空気の抵抗

- 空気による浮力は？
- 回転していたら？
- 横風が吹いたら？
- 地球の自転の影響は？
- 地球の公転の影響は？
- 太陽風の影響は？

運動方程式の立て方・解き方（2）

運動方程式 $\boxed{F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}}$

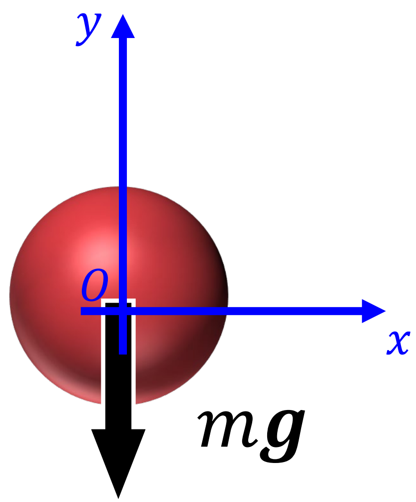
【2】状況を＿＿＿＿＿＿＿＿する　・・・情報を取捨選択する

- 重力（下向きに mg）⇒ これは必要
- 空気の抵抗 ⇒ 物体が小さい、短時間の運動なら無視
- 空気による浮力は？ ⇒ 物体の密度が空気よりも十分大きいなら無視
- 回転していたら？ ⇒ 球技ならば考える必要だけど・・・。
- 横風が吹いたら？ ⇒ 屋外の運動であるなら必要だけど・・・。
- 地球の自転の影響は？ ⇒ 長時間の運動なら必要だけど・・・。
- 地球の公転の影響は？ ⇒ 他の惑星の影響などがいるのなら・・・。
- 太陽風の影響は？ ⇒ 大気圏外まで飛ぶのなら必要？

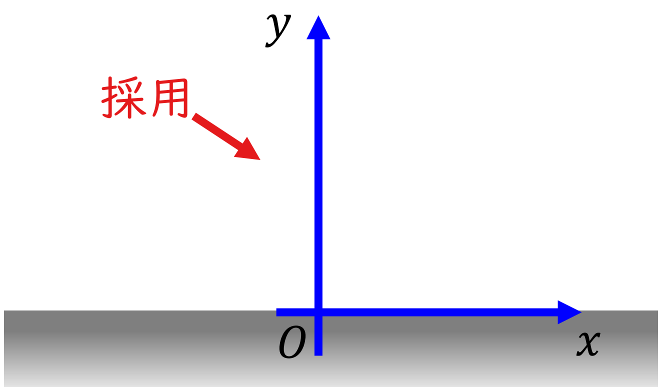
運動方程式の立て方･解き方（3）

運動方程式

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$



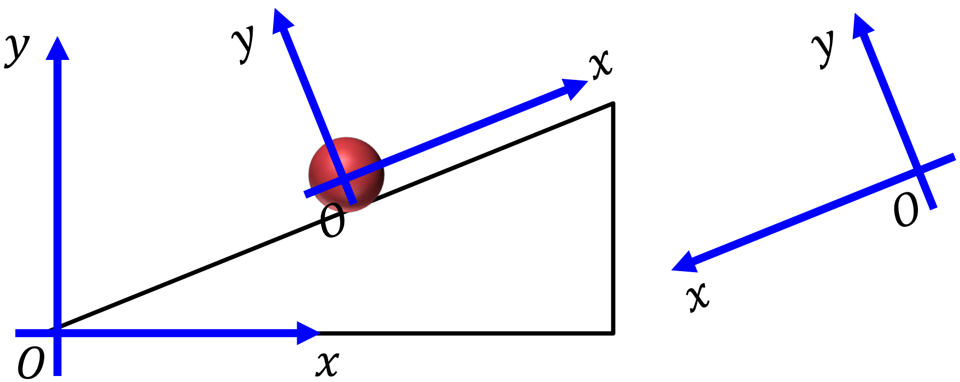
採用



【3】適切な＿＿＿＿を選ぶ

自転や公転を無視したので、
地面に固定した座標系は
<u>慣性系</u>とみなすことができる

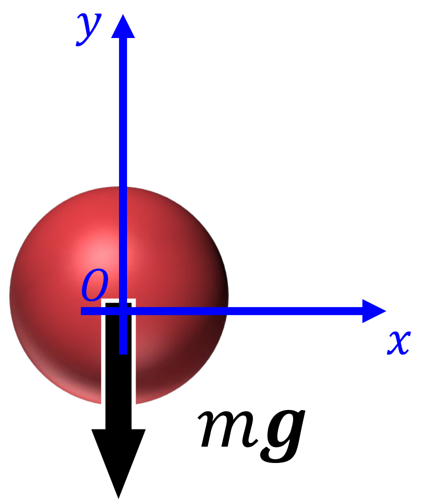
- ＿＿＿をどこに選ぶか
  （位置と時間）
- 軸の＿＿をどう選ぶか



［復習］
慣性系とは
運動の第一法則（慣性の法則）（と第二法則（運動方程式））が成り立つ座標系

運動方程式の立て方・解き方（4）

運動方程式 $\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}}$



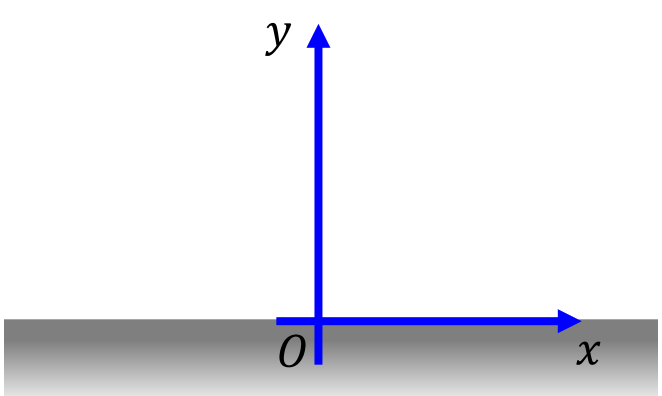
【4】運動方程式を立てる

$$m\frac{d^2x}{dt^2} =$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} =$$

これをベクトル表示でまとめて書いてもよい

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (\quad ,\qquad\quad)$$



この運動方程式(微分方程式)を解く。

[微分方程式]
一般の方程式では解は数値だが、
微分方程式の解は**関数**となる
ここで扱うのは単純積分すればとけるもの

運動方程式の立て方・解き方（5）

【5】運動方程式の一般解を求める

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(\qquad\qquad)$$

mで割ると

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(\qquad\qquad)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt},\quad \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dv_x}{dt},\quad \frac{dv_y}{dt}\right)$$

積分すれば、 速度が求まる

積分

$$\left(\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt}\right)=(v_x\quad v_y)=(\underline{\qquad}\qquad\qquad\underline{\qquad})$$

（積分定数）
初速度

さらに積分すれば、変位が求まる

積分

$$(x,\quad y)=\left(\qquad\underline{\quad}\qquad\qquad\underline{\quad}\right)$$

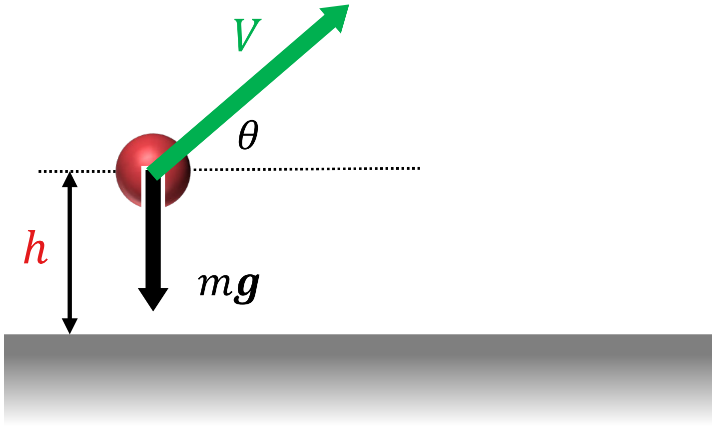
未定定数

（積分定数）
初期位置

未定（積分）定数を含む微分方程式の解を_______という。

運動方程式の立て方・解き方（6）

【6】初期条件から未定定数を求める



ある時刻tにおける速度や位置
（ここでは $t=0$）

$$(v_x(0),\quad v_y(0)) = (V\cos\theta\,,\quad V\sin\theta)$$

$$(x(0),\quad y(0)) = (0,\quad h)$$

先程の速度と変位の式に $t=0$ を代入すると

$$\left(v_x(0)\quad v_y(0)\right) = (v_{0x},\quad v_{0y}) \;= (V\cos\theta\,,\quad V\sin\theta)$$

$$(x(0),\quad y(0)) = (x_0,\quad y_0) \qquad = (0,\quad h)$$

以上より、

$$(v_x(t)\quad v_y(t)) = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$(x(t),\quad y(t)) = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$$

運動方程式の立て方・解き方（7）

【7】 得られた解をもとに考察して、求める情報を導き出す

$$(v_x(t)\quad v_y(t)) = (V\cos\theta\,,\quad -gt + V\sin\theta)$$

$$(x(t),\quad y(t)) = \left(V\cos\theta\cdot t,\quad -\frac{1}{2}gt^2 + V\sin\theta\, t + h\right)$$

- 運動の軌跡を求める ➔ 軌跡とはなにか
  - → 時間に依らない各点の位置を示したもの
  - →両式から t を消去して x と y の関係を導く（→例題1）
- 最高点を求める ➔ 最高点とはどういう点？
  - → y 方向の速度 $(v_y(t))$ がゼロ（→例題2）
- 着地点を求める ➔ 着地点とはどういう点？
  - → x 方向の位置 $(x(t))$ がゼロ（→演習1）
- 出発点を求める ➔ 出発点ではどういう点？
  - → t がゼロ（→演習2）

例題1 ［運動方程式の解の解析］

xとyが次の式のように書けるとき、物体の軌跡の方程式を求めよ → 時間(t)に依らないxとyの関係

$$(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})) = \left(\boldsymbol{V\cos\theta\cdot t},\quad -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{V\sin\theta\, t} + \boldsymbol{h}\right)$$

xの式をtについて解くと

$$t = \frac{x}{V\cos\theta}$$

これをyの式に代入すると、

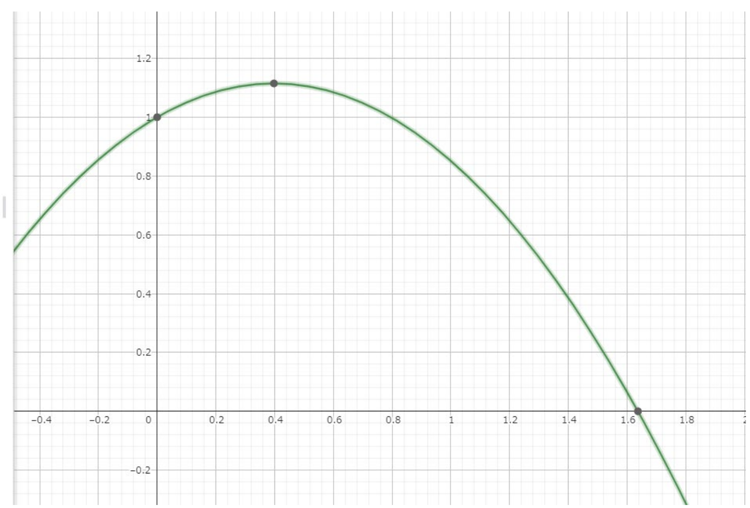
$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V\cos\theta}\right)^2 + V\sin\theta\cdot\frac{x}{V\cos\theta} + h$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{V^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\cdot x + h$$

放物線を描くことがわかる

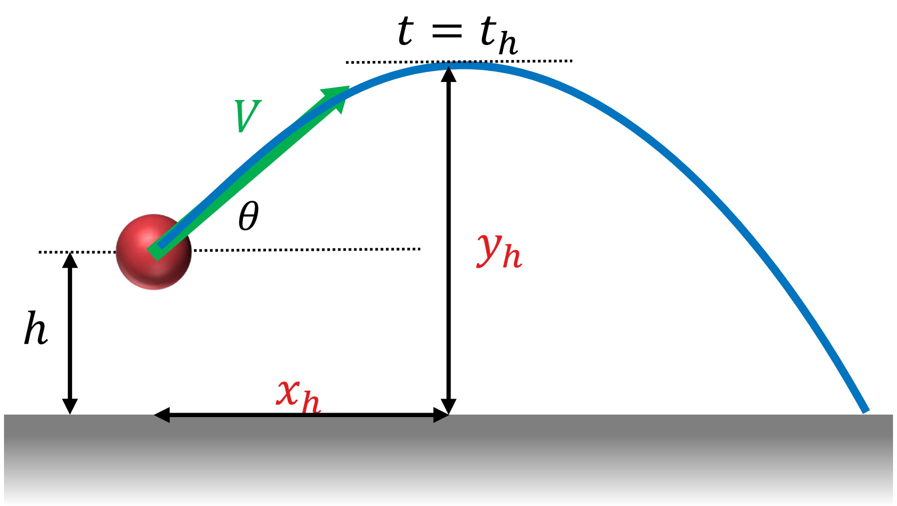
GeoGebraで書いてみると
（$\theta = 30°, V = 10[\mathrm{m/s}], h = 1.0\ [\mathrm{m}]$ ）

https://www.geogebra.org/graphing



例題2［運動方程式の解析］

このとき、物体の最高点の座標(x_h, y_h)を求めよ。 → $v_y(t) = 0$



最高点においてy方向の速度がゼロであるから（yの微分がゼロ =変曲点）

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y(t)$$
$$= -gt + V\sin\theta$$
$$= 0$$

よって、このとき $t_h = \dfrac{V\sin\theta}{g}$

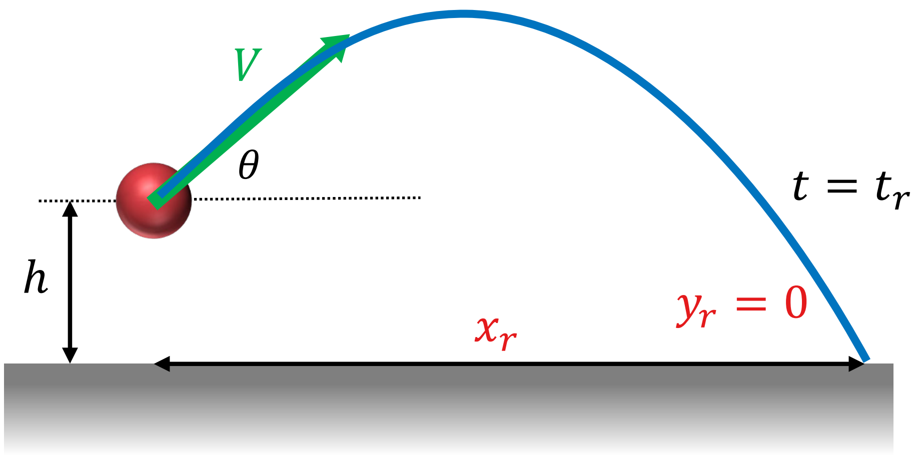
$$(x_h,\ \ y_h) = (x(t_h),\ \ y(t_h))$$

$$= \left(V\cos\theta \cdot \frac{V\sin\theta}{g},\ \ -\frac{1}{2}g\left(\frac{V\sin\theta}{g}\right)^2 + V\sin\theta \cdot \frac{V\sin\theta}{g} + h \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{g}\sin 2\theta\,,\ \ \frac{1}{2}\frac{V^2\sin^2\theta}{g} + h \right)$$

演習Ⅰ［運動方程式の解析］

物体が地面に落ちるまでの時間t_rと到達距離x_r を求めよ。 → $y = 0$



演習2［運動方程式の解き方］

今年3月のWBCで大谷選手がオーストラリア戦で打った看板直撃ホームランは、打球速度173km/hで推定飛距離140mであった。打ったときのボールの高さ、および空気抵抗を無視したとき、大谷選手の打ち出した角度はいくらか。ボールは150 gとする。

演習2［運動方程式の解き方］