基礎物理学

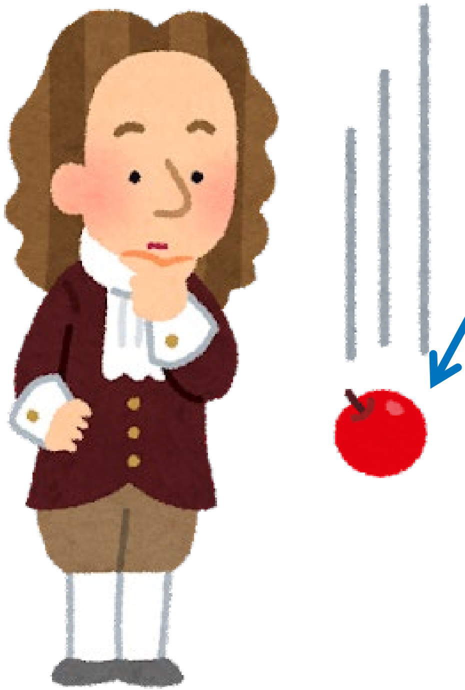
（第2回）運動の記述（I）

【今日の内容】

- 運動を記述するために
  - 物体 を表す
  - 時間 を表す
  - 位置（変位） を表す
  - 速度 を表す
  - 加速度 を表す

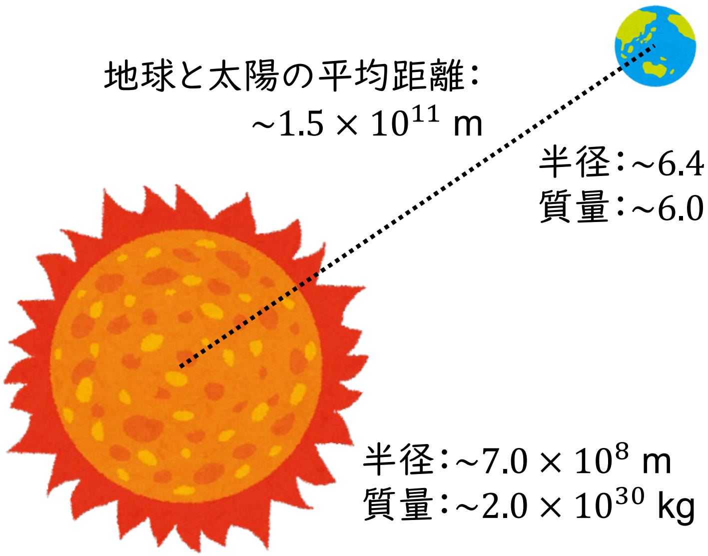
担当教員：西沢望（S-305）： nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

運動を記述するために



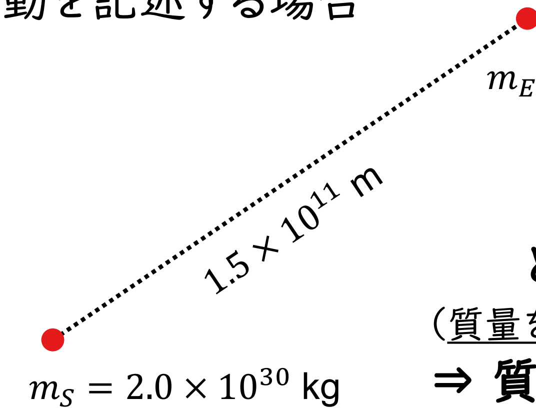
_____を表す
大きさのある物体 or ない物体

物体を表す



モデル化

運動を記述する場合

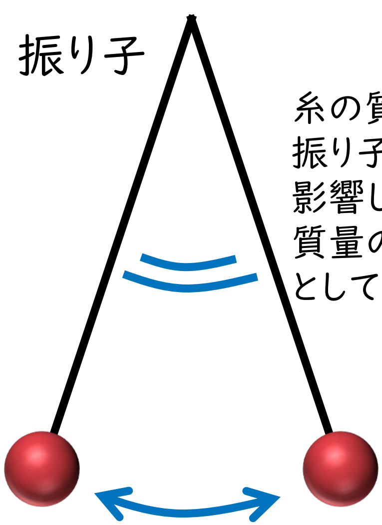


として扱う

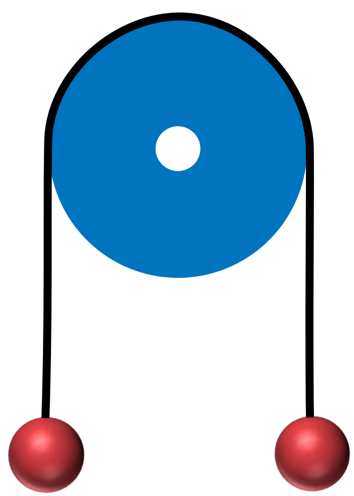
（質量を持つ数学的点）

⇒ **質点系**

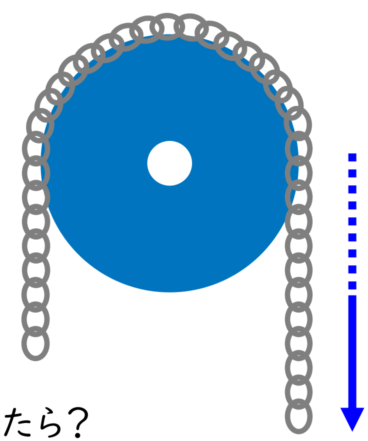
振り子



糸の質量は
振り子の運動に
影響しないので
質量のない物体
として扱う



糸の質量は
無視できる



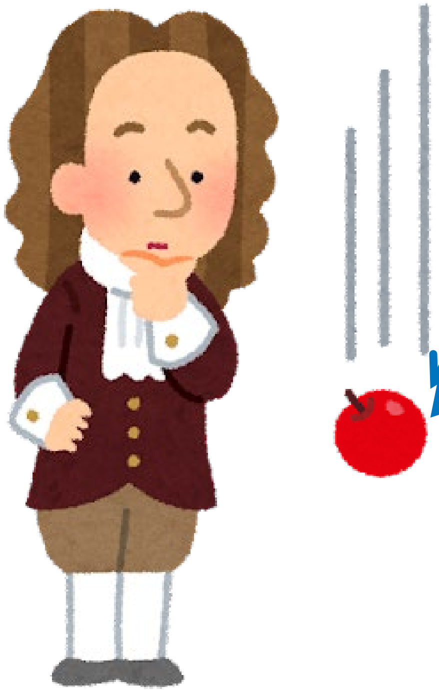
でも鎖だったら？
無視できない

⇒ （変形しない物体）

として扱う

他にも弾性体、流体などがある

運動を記述するために



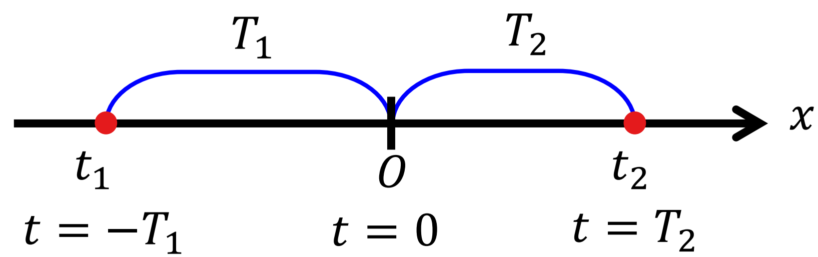
物体を表す

大きさのある物体 or ない物体

____を表す

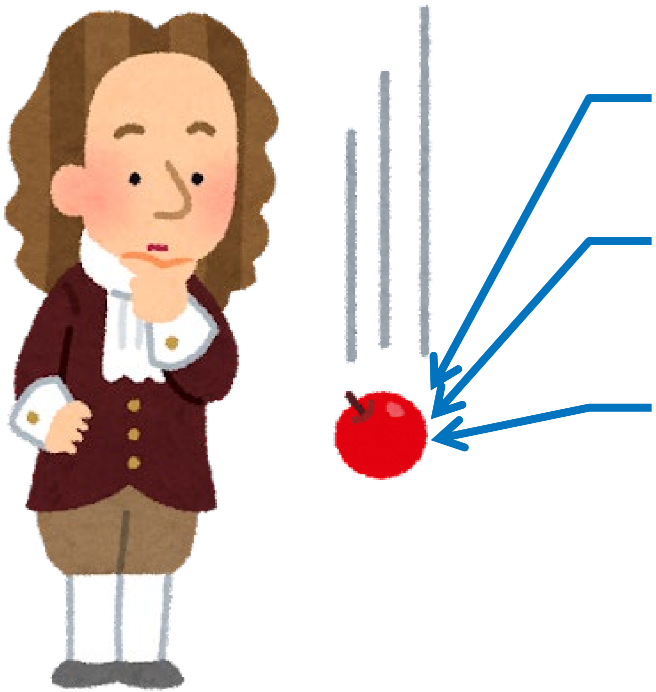
どの時点から運動が始まるか

時間は1次元かつ不可逆な物理量



過去	現在	未来
運動前	運動開始	運動終了
運動1開始	運動2開始	運動終了

運動を記述するために



物体を表す
　大きさのある物体 or ない物体

時間を表す
　どの時点から運動が始まるか

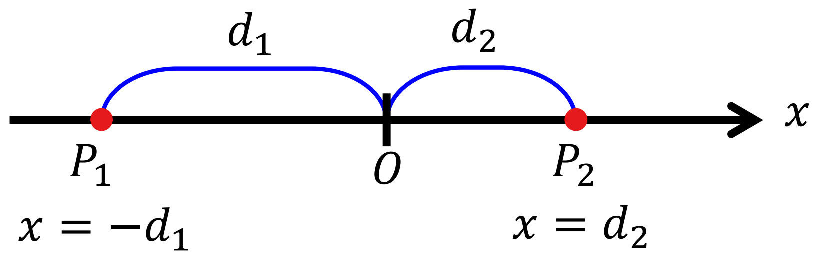
_____を表す
　どこから見てどの地点にあるのか

位置を表す －直交座標系－

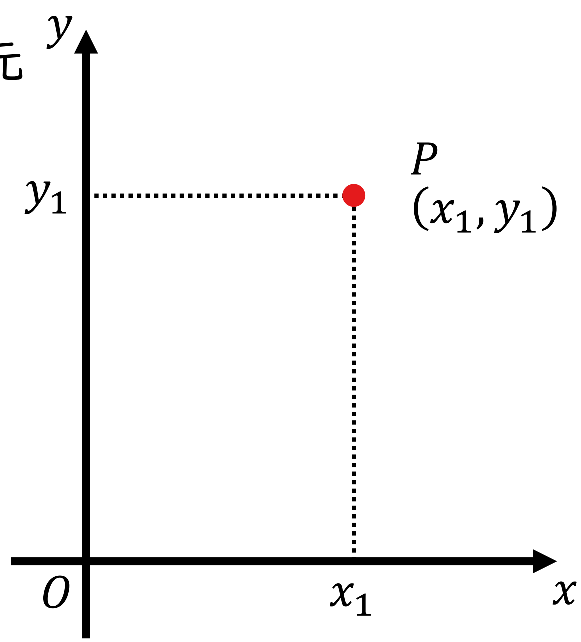
座標系

直交座標系(　　　　　　座標系)

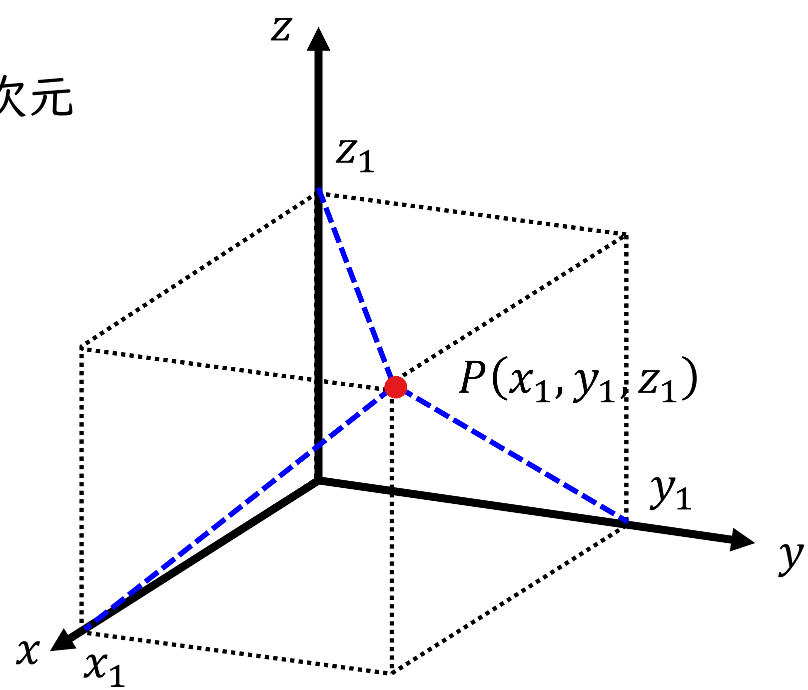
1次元



2次元



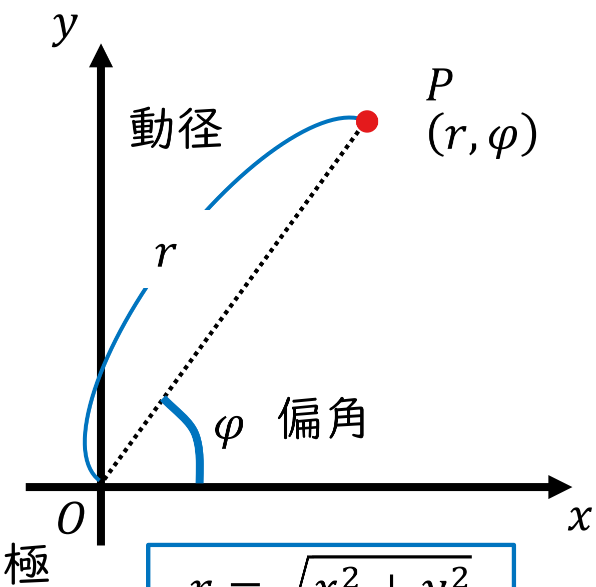
3次元



位置を表す －極座標系－

2次元

2次元　　座標系

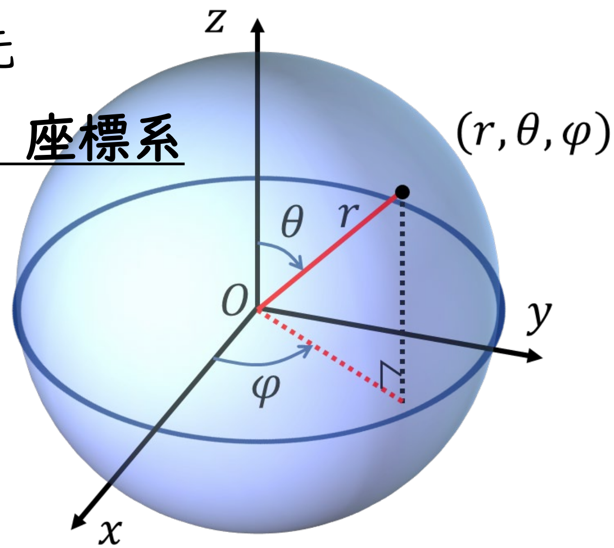


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

3次元

座標系



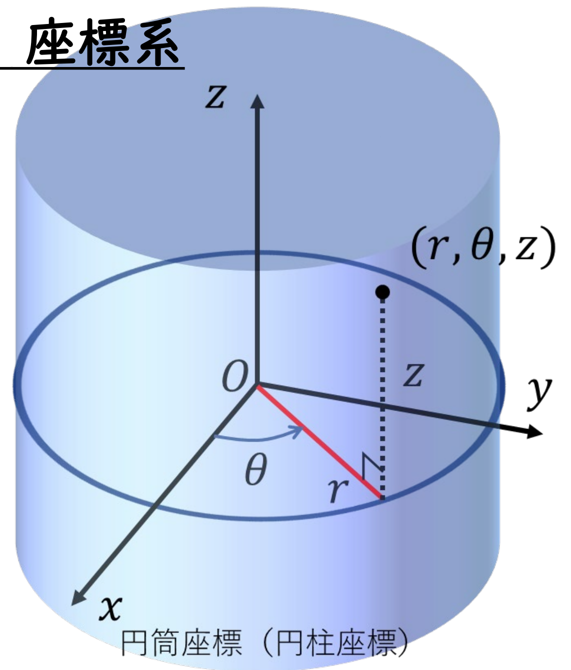
極座標（球面座標）

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

ただし
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

座標系



円筒座標（円柱座標）

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

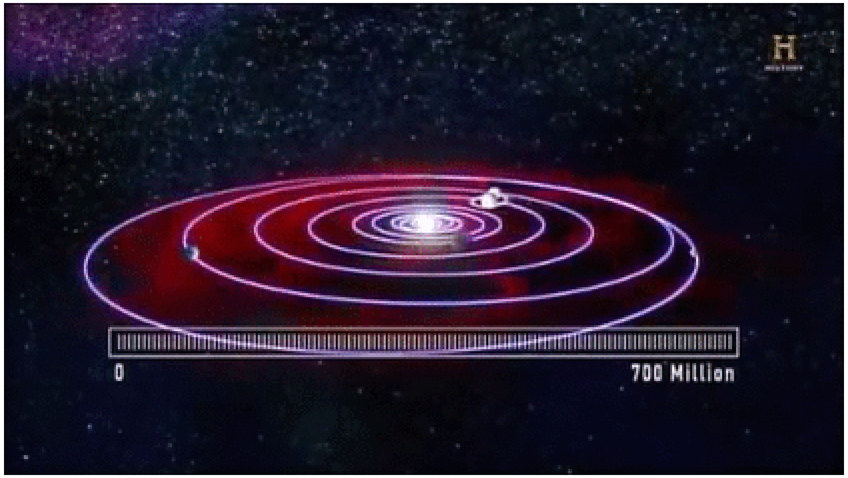
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

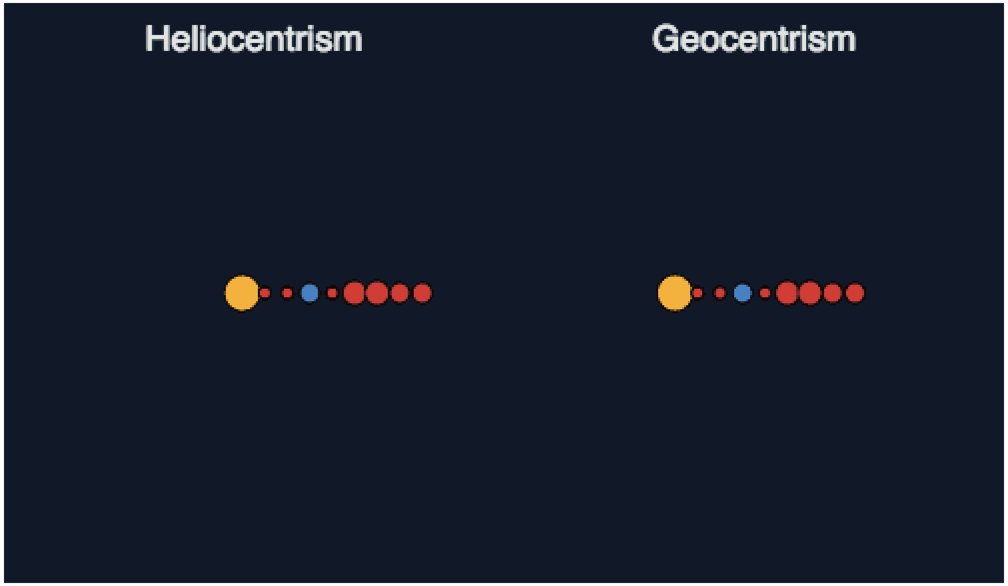
ただし
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

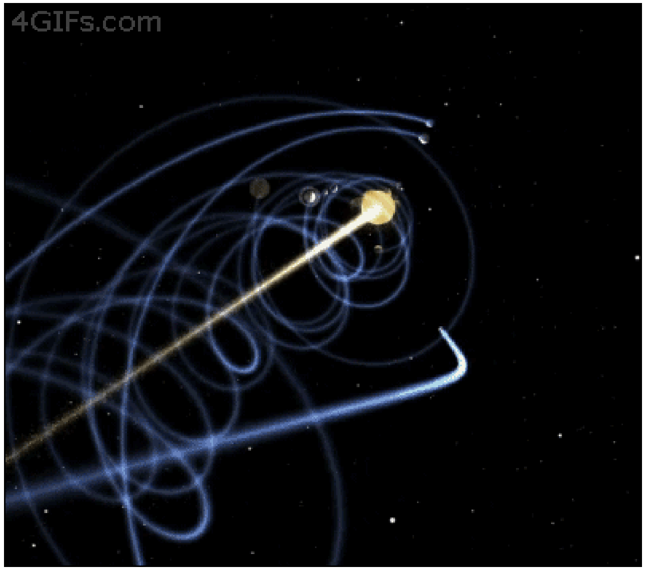
位置を表す

座標を決める際に大切なこと

1. どこに　　　を取るか
   （何を固定するか）
2. 直交座標系か極座標系か







例題1、2［座標系］

1. デカルト座標系において$\boldsymbol{xy}$座標が$(-\mathbf{1},-\mathbf{1})$である点の2次元極座標を求めよ。

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=$$

点は第3象限にあるので

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{-1}{-1}=$$

$$\varphi=$$

$$\therefore (r,\varphi)=\left(\qquad\right)$$

2. デカルト座標系において$\boldsymbol{xyz}$座標が$\left(-\mathbf{1},\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{2}\right)$である点の球面座標を求めよ。

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\tan^{-1}1=$$

$$\therefore (r,\theta,\varphi)=\left(\qquad\right)$$

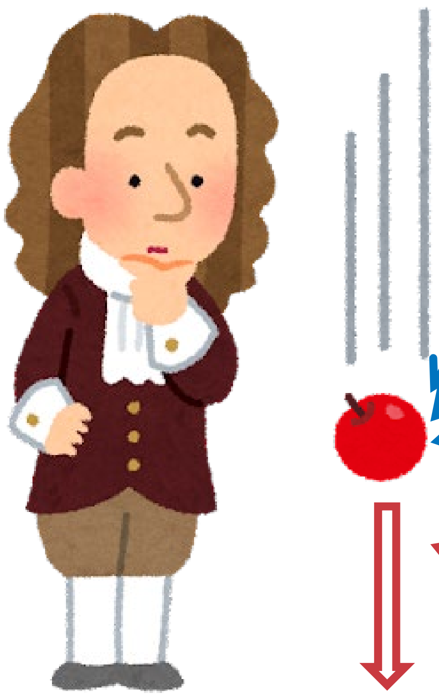
$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=$$

演習1、2［座標系］

1. デカルト座標系においてxyz座標が$\left(-1, \sqrt{3}, 2\right)$である点の円筒座標を求めよ。

2. 球面座標系において$r\theta\varphi$座標が$\left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{6}\right)$である点のデカルト座標を求めよ。

運動を記述するために



物体を表す
大きさのある物体 or ない物体

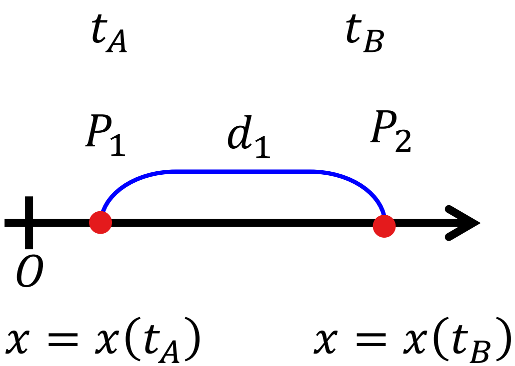
時間を表す
どの時点から運動が始まるか

位置を表す
どこから見てどの地点にあるのか
➔ 位置の変化量（_____ x）

_____を表す
位置座標の時間微分 dx/dt

速度を表す

速度（*velocity*）の定義



時刻t_Aと時刻t_Bの間に位置が変化した量（位置の変化量）

$$\Delta x = x(t_B) - x(t_A)$$ **：変位**

時間間隔$(t_A - t_B)$で割った単位時間あたりの平均変位

$$\bar{v} = \frac{x(t_B) - x(t_A)}{t_A - t_B} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ ： **速度**

時間間隔 $t_B \to t_A$ $(\Delta t \to 0)$ とした極限

$$v(t_A) = \lim_{t_B \to t_A} \frac{x(t_B) - x(t_A)}{t_A - t_B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x(t_A)}{\mathrm{d}t}$$

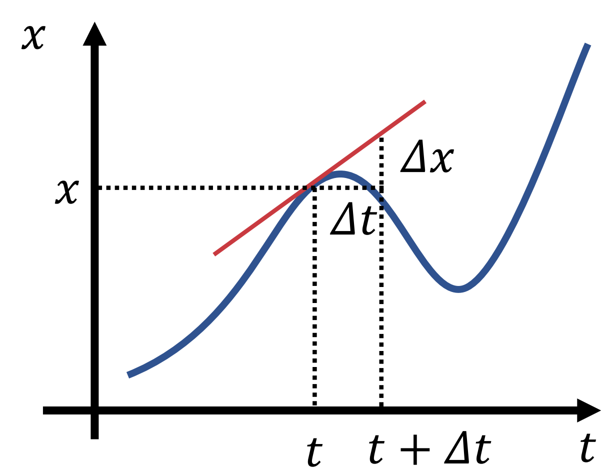
：時刻t_Aにおける　速度

一般化 ⇒ $t_A = t$, $t_B = t + \Delta t$ として、$\Delta t \to 0$ とした極限

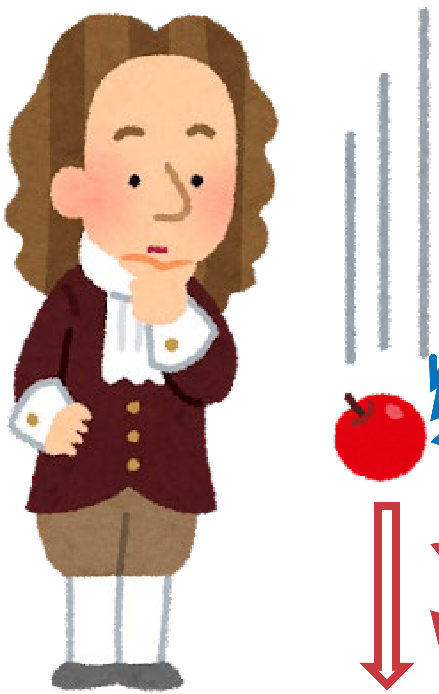
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv$$ **：速度**

$$|v(t)| = \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|$$ **：速さ（speed）**

座標$x(t)$をtについて
微分したものに等しい



運動を記述するために



物体を表す
　大きさのある物体 or ない物体

時間を表す
　どの時点から運動が始まるか

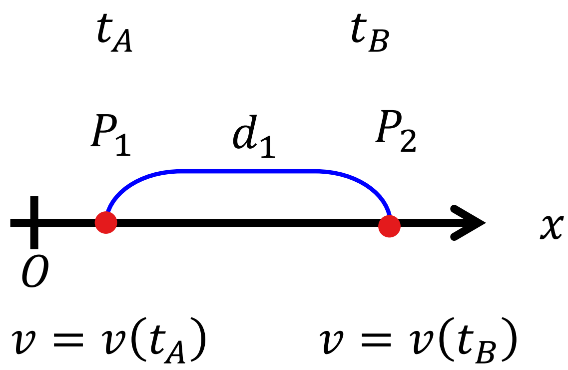
位置を表す
　どこから見てどの地点にあるのか
　　　　➔ 位置の変化量（変位 x）

速度を表す
　位置座標の時間微分　dx/dt

______を表す
　速度の時間微分　$dv/dt = d^2x/dt^2$

加速度を表す

加速度(Acceleration)**の定義**



時刻t_Aと時刻t_Bの間の速度変化を時間間隔$(t_A - t_B)$で割ると

$$\bar{a} = \frac{v(t_B) - v(t_A)}{t_A - t_B} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

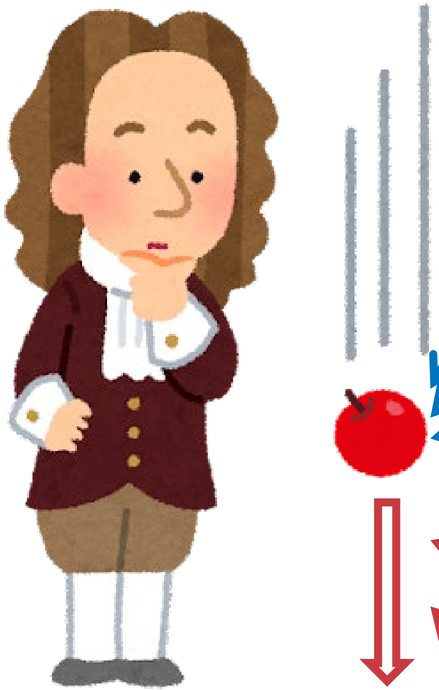
：平均加速度

時間間隔$\Delta t \to 0$ とした極限

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \equiv$$

：加速度

運動を記述するために



物体を表す
　大きさのある物体 or ない物体

時間を表す
　どの時点から運動が始まるか

位置を表す
　どこから見てどの地点にあるのか
　　→ 位置の変化量（変位 x）

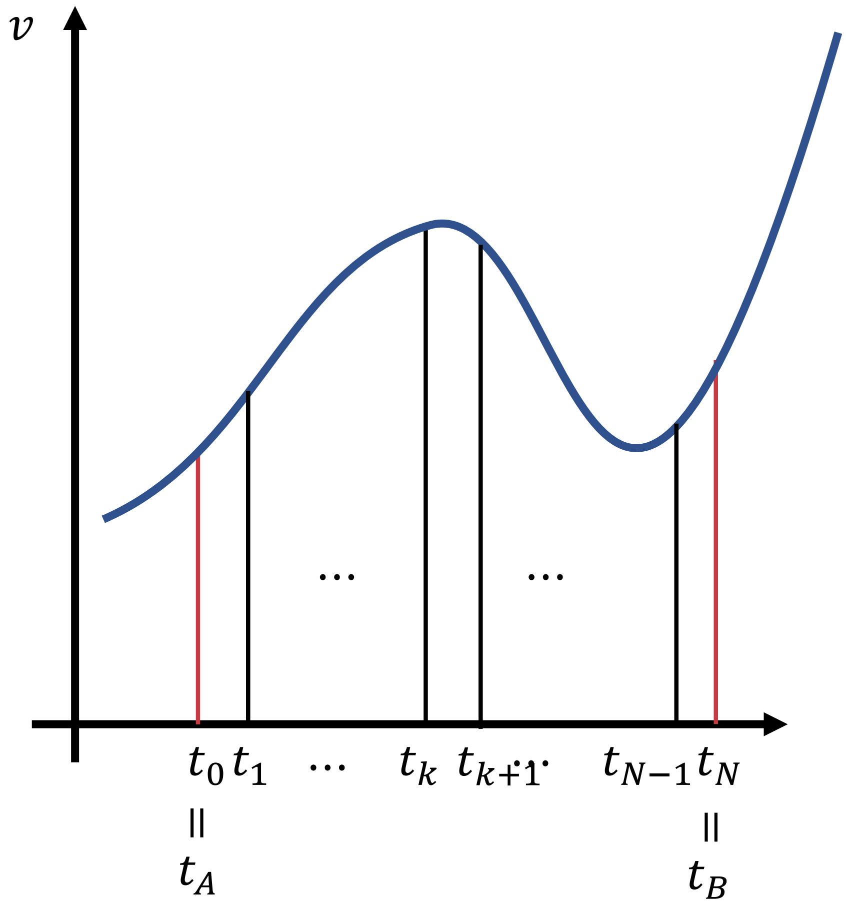
速度を表す
　位置座標の時間微分 dx/dt

加速度を表す
　速度の時間微分 dv/dt

積分すると積分定数が必要
⇒

その運動を支配している加速度が分かれば、
速度や変位は計算できる

速度から変位を求める



速度が変化しなければ、その時間内の変位は

(時間) × (速度)

で求めることができる。

左図のように速度が変化して運動しているとき、時間を微小区間に分割し、その間の平均速度を$v(t)$とすると、この間の変位は

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) \approx v(t_k)\cdot\Delta t$$

と書くことができる。これをt_Aからt_Bまで集めればこの時間内の変位が求められるので、

$$x(t_B) - x(t_A) \approx \sum_{k=0}^{N-1} v(t_k)\cdot\Delta t$$

$\Delta t \to 0$ すなわち $N\to\infty$ とすれば、

$$x(t_B) - x(t_A) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} v(t_k)\cdot\Delta t = \int_{t_A}^{t_B} v(t)\mathrm{d}t$$

速度を積分すれば変位が求まる

一般化 ⇒ $t_A = t_0$, $t_B = t$ として、

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(T)\mathrm{d}T = \underset{\text{初期位置}}{x(t_0)} + \int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}x(T)}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}T}$$

加速度から速度を求める

加速度に関しても同じ議論となる。

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(T)\mathrm{d}T = \underbrace{v(t_0)}_{\text{初速度}} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}v(T)}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}T = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}^2 x(\mathrm{T})}{\mathrm{d}T^2}\mathrm{d}T$$

速度を積分すれば変位が求まる

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(T)\mathrm{d}T = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^{T} a(T')\mathrm{d}T' \right\} \mathrm{d}T$$
$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^{T} \frac{\mathrm{d}v(T')}{\mathrm{d}T'}\mathrm{d}T' \right\} \mathrm{d}T$$
$$= \underbrace{x(t_0)}_{\text{初期位置}} + \int_{t_0}^{t} \left\{ v(t_0) + \int_{t_0}^{T} \frac{\mathrm{d}^2 x(T')}{\mathrm{d}T'^2}\mathrm{d}T' \right\} \mathrm{d}T$$

その運動を支配している　　　が分かれば、速度や変位は計算できる

例題3､4 ［変位、速度、加速度］

運動が次の式で表されるとき、各運動の速度と加速度を求めよ。

3. $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$ （$\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ は定数）

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} =$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} =$$

：等加速度運動
（加速度が一定の運動）

4. $\boldsymbol{x(t) = Vt,}$ $\quad \boldsymbol{y(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2}$ （$\boldsymbol{V, \alpha}$ は定数）

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \qquad v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} =$$

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} = \qquad a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} =$$

：x方向には等速運動　　：y方向には等加速度運動

$t = \frac{x}{V}$ より

$$y(t) = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{x}{V}\right)^2 = \frac{\alpha}{2V}x^2$$

よって、放物線を描く

演習3､4［変位､速度､加速度］

運動が次の式で表されるとき､各運動の速度と加速度を求めよ。

3. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{\omega t}$　($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\omega}$ は定数)

4. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{\omega t}$,　$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{B}\sin\boldsymbol{\omega t}$　($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\omega}$ は定数)