# 基礎物理学

## （第13回）仕事とエネルギー（I）

【今日の内容】

- 仕事、仕事率
- 運動エネルギー
- 位置エネルギー
- 弾性エネルギー、応力と歪

担当教員：西沢望（S-305）： nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

# 仕事

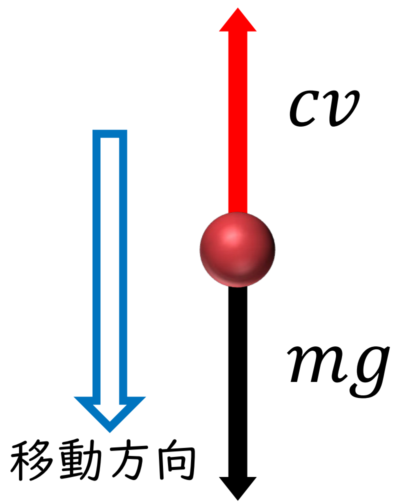


力の効果
- 持続時間が長ければ長いほど大きい ⟹ 力積 → 運動量を変化させる
  ⟹ 運動量保存則
- 長い距離動かせば動かすほど大きい ⟹ ______ （今回）

## 仕事 (work)

仕事 = (                    ) × (                    )

$$W =$$




力と物体の移動方向が**同**方向ならば 仕事は __
力と物体の移動方向が**逆**方向ならば 仕事は __

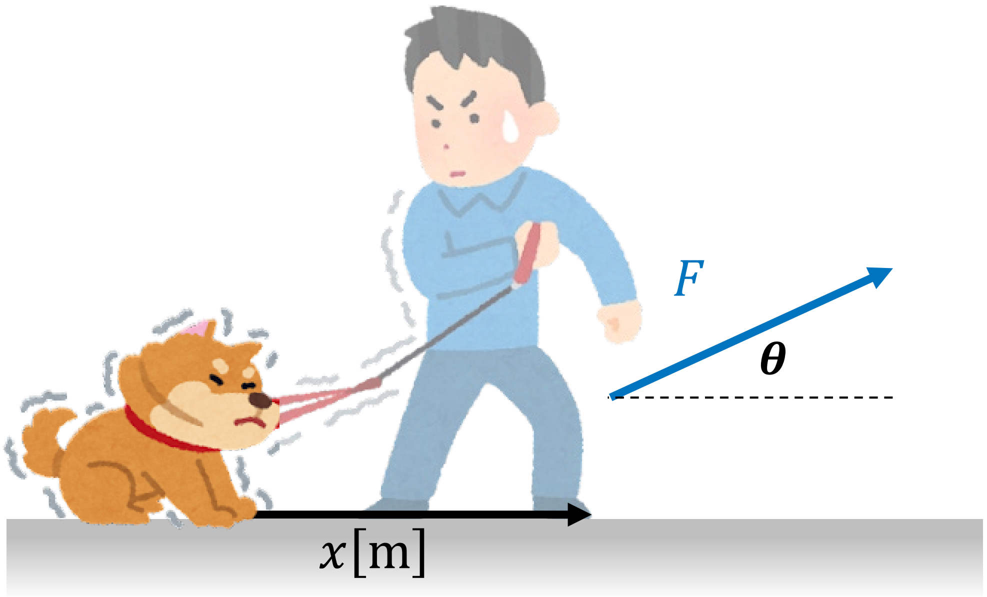
空気抵抗を受けながら落下する物体

重力がした仕事は __
空気抵抗がした仕事は __

力 1 [N] で 1 [m] 移動させたときの仕事を 1 J (ジュール) とする。

$$[\mathrm{J}] = [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}] = \left[\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}\right] = \left[\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

# 仕事の原理




力 $F$ に対して角度 $\theta$ の方向に
$s$[m]移動させたとき

$$W =$$

となる。

いま、同じ高さ $h$ の場所に同じ質量 $m$ の物体を運び上げる場合

垂直に持ち上げれば

$$W =$$

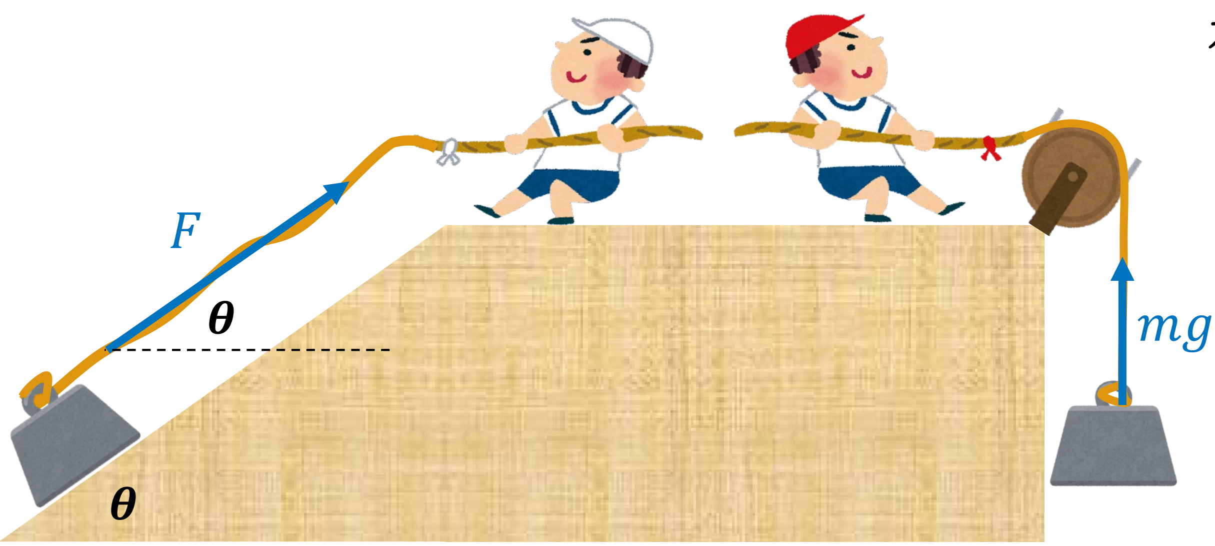
なめらかな斜辺を使えば
力は $mg\sin\theta$ で済むが、

距離$L$は $\sin\theta = \dfrac{h}{L}$ より $L =$

となるので、

$$W = mg\sin\theta \cdot L =$$

となり変わらない




**仕事の原理**
機械や道具を使っても
仕事の大きさは変わらない

# 仕事率

**仕事の原理**
機械や道具を使っても
仕事の大きさは変わらない

機械や道具を使うこと
→ 必要な力を小さくすることができる

→ 必要な時間を小さくすることができる ⟹

## 仕事率（power） 単位時間あたりにする仕事

時間 $t$ の間に $W$ の仕事をするとき

$$P = \qquad = \frac{F \cdot x}{t} =$$

一定の力 $F$ を加えて速さ $v$ で運動させたときの動力源がした仕事

1 [s] あたり 1 [J] の仕事をするとき仕事率を 1 W (ワット) とする。

$$[\mathrm{W}] = \left[\quad\right] = \left[\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{m^2 \cdot kg}}{\mathrm{s^2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{m^2 \cdot kg}}{\mathrm{s^3}}\right]$$

実用単位として
1馬力(英) = 746[W]
1馬力(仏) = 736[W]
などもある

［例］ 自動車が 490 N の力で物体を引いて 36 km/h で等速運動しているときの仕事率は?

$$36[\mathrm{km/h}] = 10[\mathrm{m/s}]$$

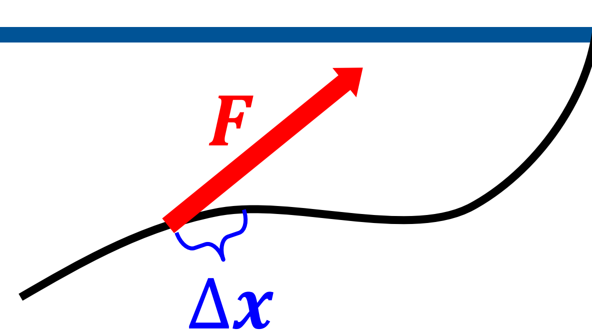
$$490[\mathrm{N}] \times 10[\mathrm{m/s}] = 4900[\mathrm{W}]$$

$\therefore$ $\underline{4.9 \times 10^3[\mathrm{W}]}$

# ［演習］ 仕事と仕事率

体重 50 kg の人が、4.0 s で 5.0 m の階段を駆け上がった。この人が重力に逆らって行った仕事と仕事率を求めよ。

# [一般化] 仕事




力が一定とは限らない
移動方向が直線とは限らない

もう少し一般化

地点 $\mathrm{P_A}$ から $\mathrm{P_B}$ まで変位において

微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ での力 $\boldsymbol{F}$ となす角を $\theta$ とすると
その区間での微小仕事は

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cos\theta \times \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

なので、それを全区間で集めれば

$$\mathrm{W} = \int_{\mathrm{P_A}}^{\mathrm{P_B}} \mathrm{d}W =$$

変位積分での定義

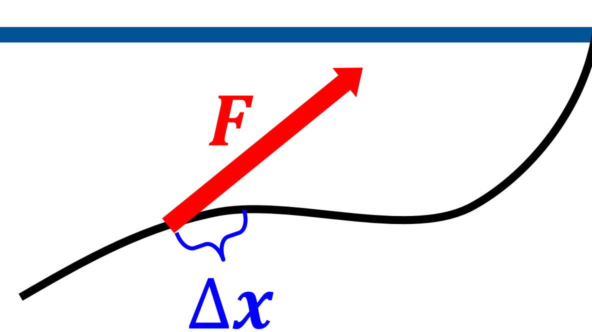
微小時間 $\mathrm{d}t$ での変位 $\mathrm{d}x$ は、$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = v(t)dt$　なので

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)dt$$

$$\therefore \mathrm{W}(t_{\mathrm{B}}, t_{\mathrm{A}}) = \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F}(t)\cdot\ \boldsymbol{v}(t)dt =$$

時間積分での定義

# ［一般化］仕事率




力が一定とは限らない
移動方向が直線とは限らない

## もう少し一般化

仕事率は時間あたりの変化量であるから

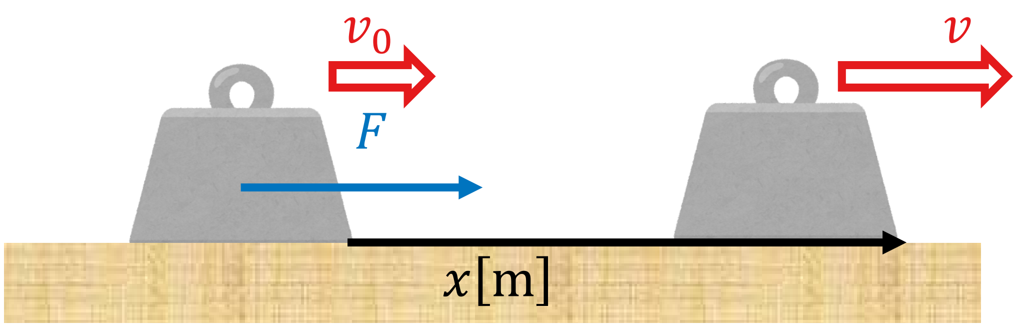
時刻 $t$ で仕事率は

$$\frac{\mathrm{d}W(t,t_{\mathrm{A}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t}\boldsymbol{F}(t')\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{dt'}dt'=\boldsymbol{F}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{dt}=$$

これは区間の開始時間 $t_{\mathrm{A}}$ によらない。

# 運動エネルギー

力の効果
- 持続時間が長ければ長いほど大きい　⟹ 力積　→ 運動量を変化させる
  ⟹ 運動量保存則
- 長い距離動かせば動かすほど大きい　⟹ **仕事**　→　　　　を変化させる
  （今回）




力 $F$[N]をはたらかせて、距離 $x$[m]移動させたところ速度が $v$[m/s] になったとすると、加速度 $a$[m/s$^2$] は

$$a = a$$
$$v = v_0 + aT$$
$$x = v_0 T + \frac{1}{2} a T^2$$

$a =$

物体になされた仕事 $W$ [J] は、

$$W = F \cdot x = (ma) \cdot x$$

$$= m \cdot \qquad x$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m {v_0}^2$$

物体になされた仕事によって変化したこの物質量を　　　　　　　と呼ぶ。
(kinetic energy)

$K =$

（力がした仕事）＝（運動エネルギーの変化）

# 位置エネルギー

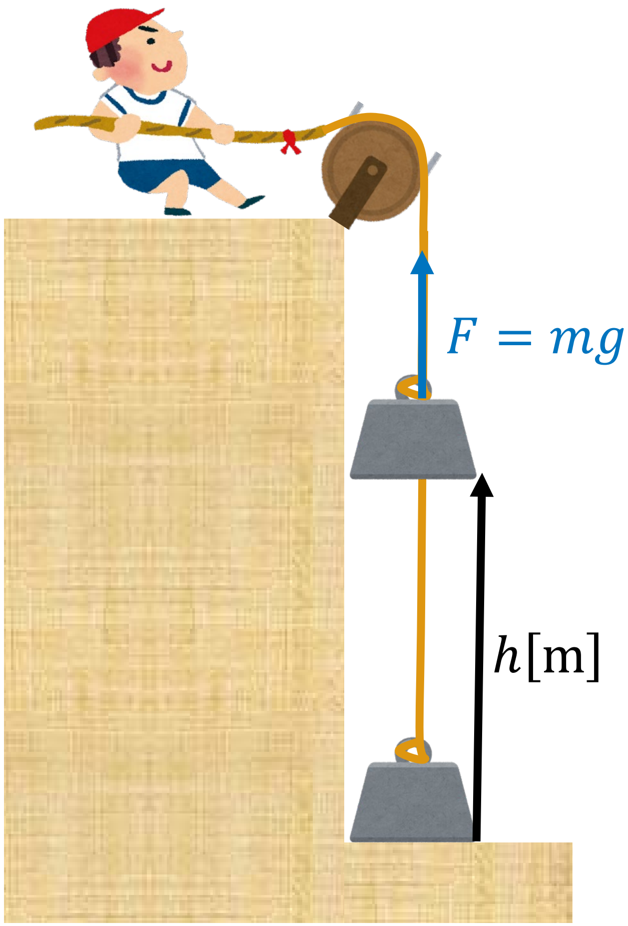
力の効果

持続時間が長ければ長いほど大きい $\Longrightarrow$ 力積 $\rightarrow$ 運動量を変化させる

$\Longrightarrow$ 運動量保存則

長い距離動かせば動かすほど大きい $\Longrightarrow$ **<u>仕事</u>** $\rightarrow$ を変化させる

（今回）




重力に逆らった力 $F = mg$ [N]をはたらかせて、
距離 $h$ [m] 移動させるには、

$$W = \int_0^h \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^h m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

の仕事を有する。
すなわち、物体は $mgh$ のエネルギーをもつ。
これを 重力による と呼ぶ。

(potential energy)

位置エネルギーは
物体の位置にのみ決まるが、基準点をどこにとってもよい
基準点よりも上であれば正、下であれば負の位置エネルギーを持つ

# 演習　力学的エネルギー

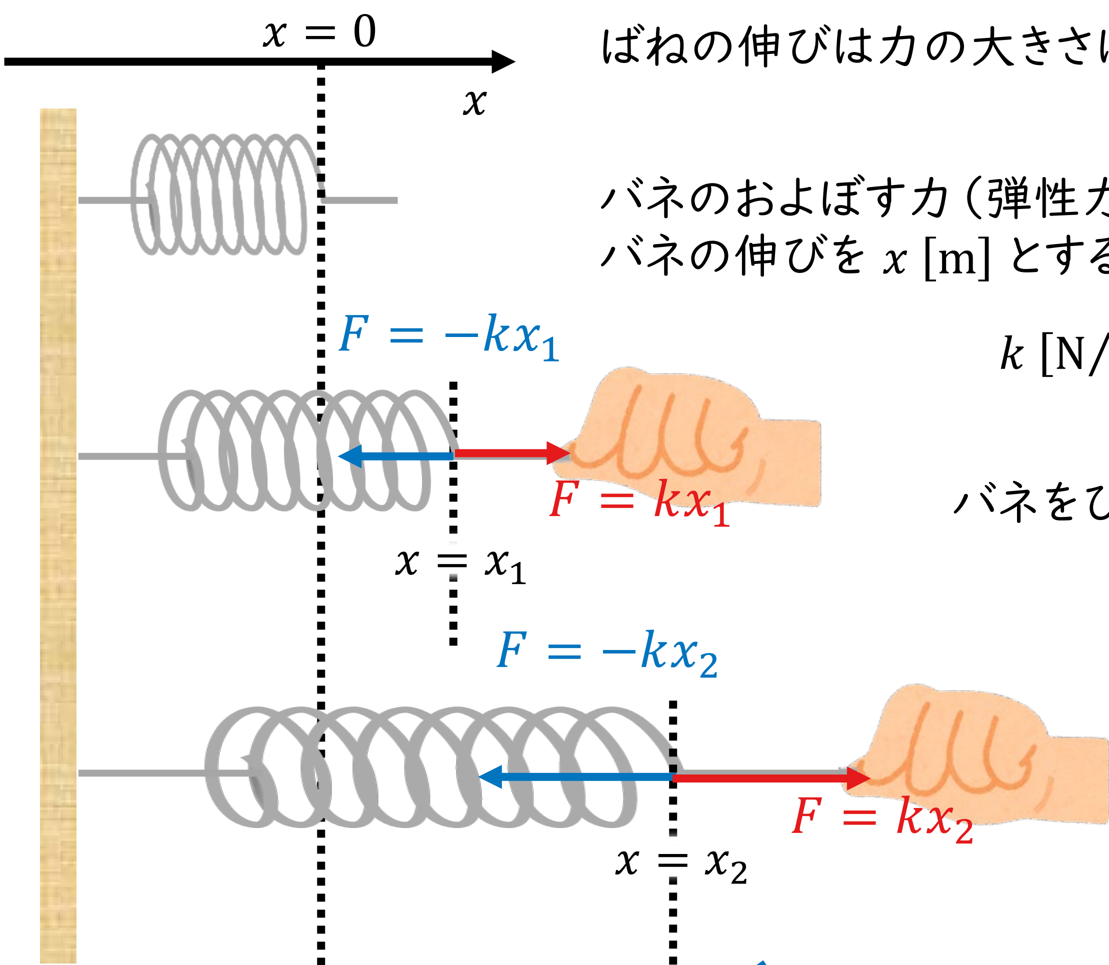
1. **質量20 kgの物体が地面から高さ 10 m のところにあるとき、その位置エネルギーはいくらか。**

   **また、地下5.0 m にあるときはいくらか。**

2. **質量500 kgの自動車が 60 km/h で走っている。このときの運動エネルギーはいくらか。**

   **また、対向車線を反対方向に 60 m/s で走っている車の場合はいくらか。**

# 弾性力と位置エネルギー




ばねの伸びは力の大きさに比例することが知られている。
(フックの法則)

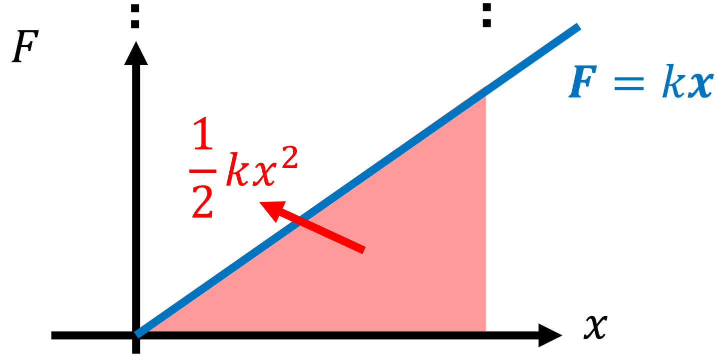
バネのおよぼす力（弾性力）の大きさ $\boldsymbol{F}$ [N]、
バネの伸びを $x$ [m] とすると、

$k$ [N/m] をばね定数と呼ぶ

バネをひく仕事をもとめると

$$W=\int_0^h \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^h k\boldsymbol{x}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$=$$

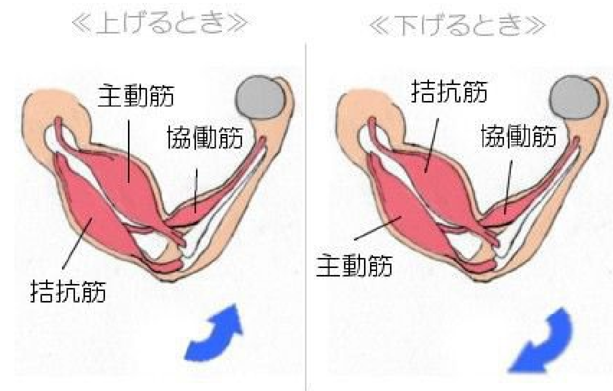



弾性力による位置エネルギーとして
と呼ぶ。
(elastic energy)

位置エネルギーと運動エネルギーの和を
とよぶ。
(mechanical energy)

# 生物における弾性エネルギーの利用

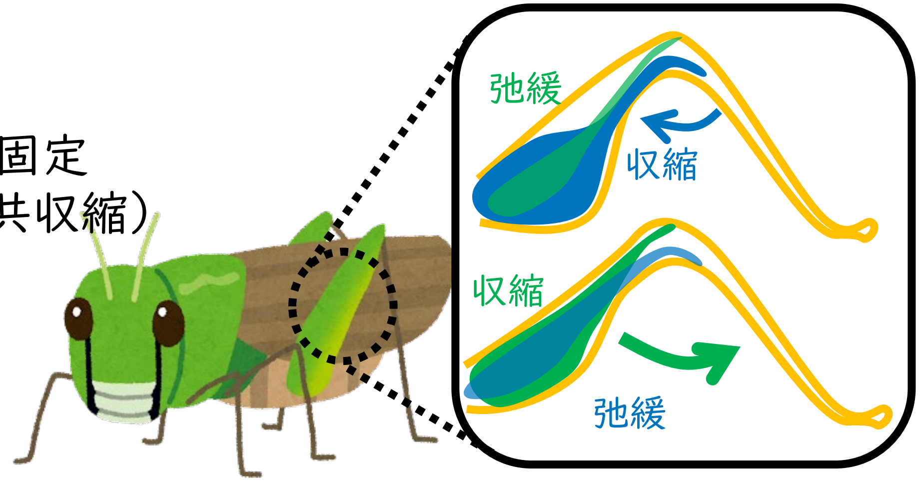
生物の運動器官である筋肉は、バネとは違い一方向にしか力を発せられない。そのため、双方向の力発生を行うには拮抗筋（antagonistic muscle）が必要となる。



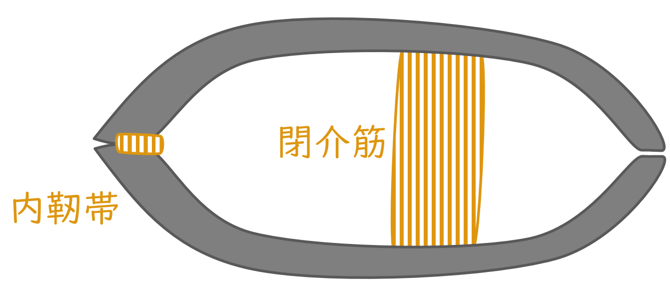

| | |
|---|---|
| 腕を曲げるとき | 内側の上腕二頭筋を収縮 |
| 腕を伸ばすとき | 外側の上腕三頭筋を収縮 |

バッタの後足

| | |
|---|---|
| 足を曲げるとき | 屈曲筋を収縮し、<br>外骨格の構造により足が固定 |
| 足を伸ばすとき | 伸展筋も屈曲筋も収縮（共収縮）<br>弾性エネルギーを蓄積<br>弛緩により一気に開放 |

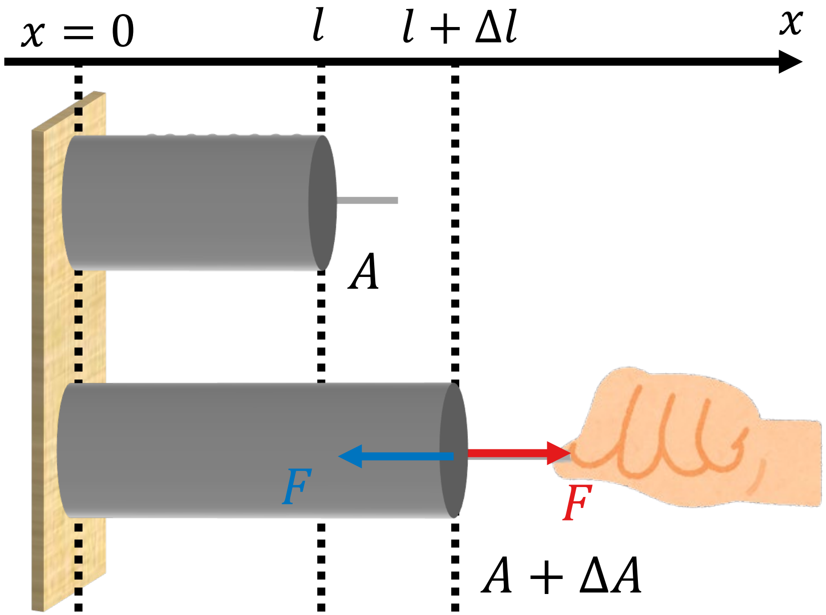



拮抗筋がない場合の例　　二枚貝




二枚貝が閉じるのは閉介筋の収縮による開けるには連結部分にある内靭帯が収縮時に蓄積した弾性エネルギーを用いている

# 応力と歪み




バネのような物体でなくても外力がはたらくと物体は変形し、力を取り除くともとの状態に復元する。これを一般的な物体の　　　と呼ぶ。
(elasticity)

しかし、ある限度を越えると外力を取り除いても戻らなくなる。この限度を　　　　といい、
(elastic limit)

そのような変形を　　　　　という。
(plastic deformation)

さらに力を加えると物体は破壊される（　　　）。
(fracture point)

長さ $l$、断面積 $A$ の物体を力 $F$ で引っ張る

$$l \to l+\Delta l \qquad A \to A+\Delta A$$

相対的変化量 $\Delta l/l$ $(\varepsilon)$ は

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$ ：　　　(distortion)

内部でそれ以上変形させないようにはたらく断面積の変化に対する力（単位は圧力）

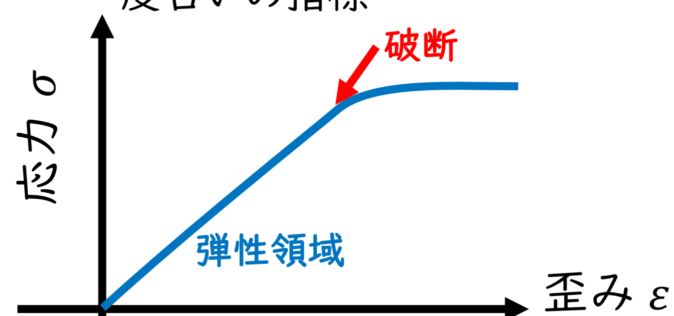
$$\sigma = \frac{F}{A-\Delta A}$$ ：　　　(stress)

## 広義のフックの法則

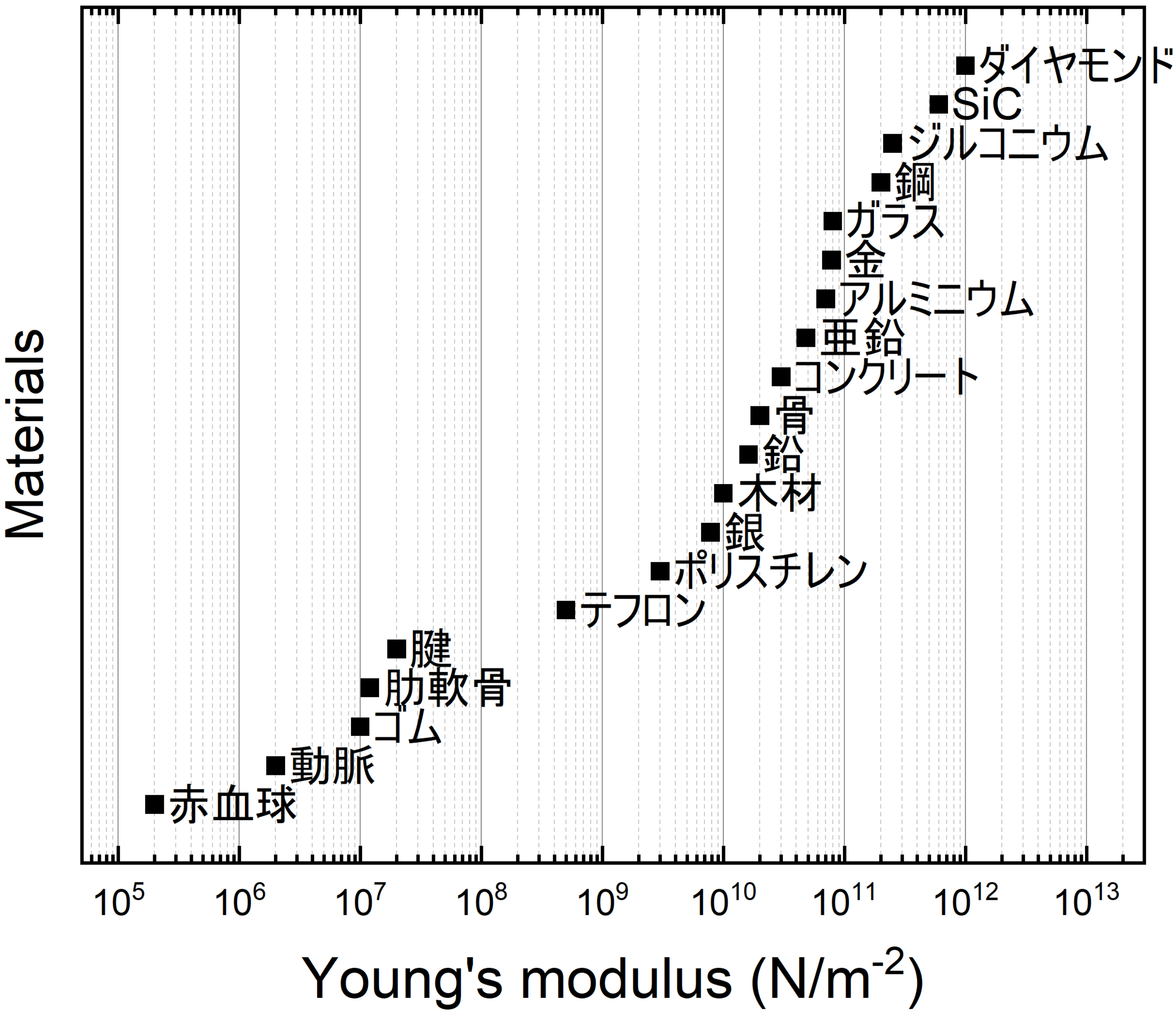
$$\sigma = Y\varepsilon$$

：　　　(Young's modulus) $[\mathrm{N/m^2}]$

様々な材料、素材の変形度合いの指標



# ヤング率の例




| Materials | $N/m^2$ | GPa |
|---|---|---|
| ダイヤモンド | 1.0.E+12 | 1000 |
| SiC | 6.0.E+11 | 600 |
| ジルコニウム | 2.5.E+11 | 250 |
| 鋼 | 2.0.E+11 | 200 |
| ガラス | 8.0.E+10 | 80 |
| 金 | 7.8.E+10 | 78 |
| アルミニウム | 7.0.E+10 | 70 |
| 亜鉛 | 4.8.E+10 | 48 |
| コンクリート | 3.0.E+10 | 30 |
| 骨 | 2.0.E+10 | 20 |
| 鉛 | 1.6.E+10 | 16 |
| 木材 | 1.0.E+10 | 10 |
| 銀 | 7.8.E+09 | 8 |
| ポリスチレン | 3.0.E+09 | 3 |
| テフロン | 5.0.E+08 | 0.5 |
| 腱 | 2.0.E+07 | 0.02 |
| ゴム | 1.0.E+07 | 0.01 |
| 肋軟骨 | 1.2.E+07 | 0.01 |
| 動脈 | 2.0.E+06 | 0.002 |
| 赤血球 | 2.0.E+05 | 0.0002 |

# 例題　ヤング率

**1.** **長さ $\mathbf{1\ m}$、直径 $\mathbf{0.2\ mm}$、ヤング率 $\mathbf{2 \times 10^9\ N/m^2}$ の手術用縫合糸の上端を固定し、下端に$\mathbf{1\ kg}$ のおもりを吊るしたら、糸はどれだけ伸びるか。いま、断面積の変化は無視できるとする。**

$$\sigma = Y\varepsilon$$

$$\frac{F}{A - \Delta A} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{l}{Y}\frac{F}{A - \Delta A}$$

$$= \frac{l}{Y}\frac{F}{A} \quad \because \text{断面積不変}$$

$$= \frac{1}{2 \times 10^9}\frac{1 \times 9.8}{(0.1 \times 10^{-3})^2\pi} = 0.156\ [\mathrm{m}]$$

$$\therefore \underline{0.16\ [\mathrm{m}]}$$

# 演習　ヤング率

1. 大動脈の血管壁から長さ $\mathbf{5\ cm}$、断面積 $\mathbf{0.1\ cm^2}$ の組織片を採取した。この組織片のヤング率はおよそ $\mathbf{2 \times 10^5\ \ N/m^2}$ であった。この組織片に何 $\mathbf{g}$ の加重を加えると長さが $\mathbf{0.5\ cm}$ のびるか。このとき、断面積の変化は無視できるとする。