基礎物理学

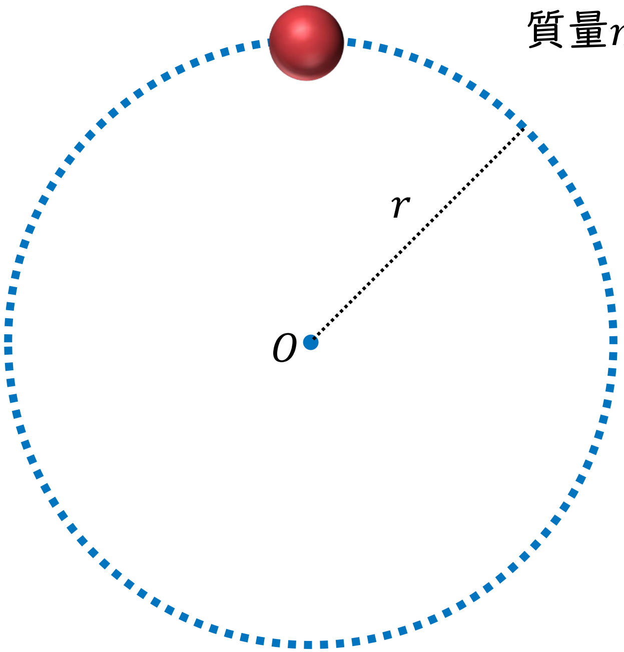
（第10回）さまざまな運動（3）

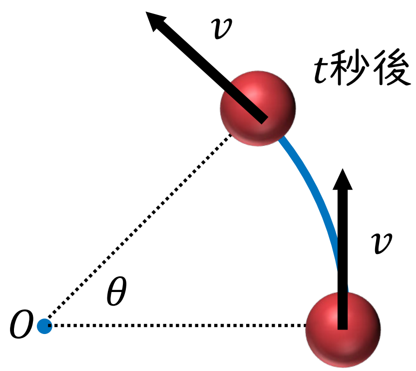
【今日の内容】

- 等速円運動
- 遠心力とは
- 惑星の運動

担当教員:西沢望（S-305）: nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

等速円運動





質量m [kg]の物体に長さ r[m] の糸を付け O を中心に円運動をさせる。

単位時間あたりに回転する中心角を________**[rad/s]**のという。

角速度が一定の円運動を__________という。

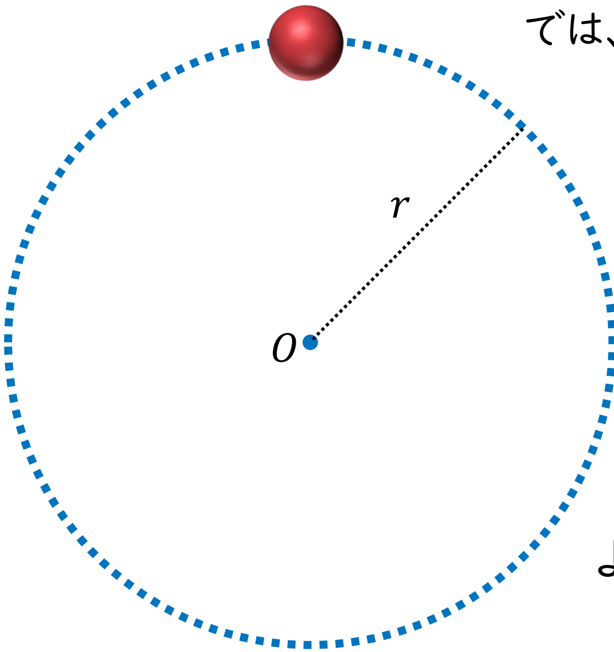
時間 t[s] の間に回転する中心角を θ[rad] とすると、

一周するのに必要な時間を______**[s]** という。

1[s]あたりの回転数 $n[1/s = \mathrm{Hz}]$ とすると、

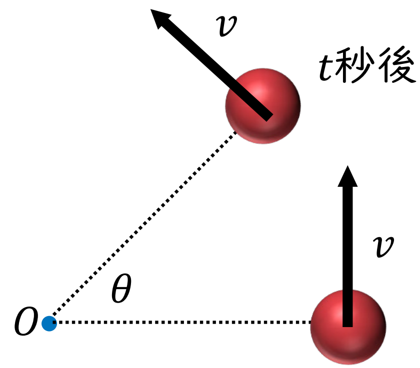
物体の速度方向は接線方向で大きさは、
1周 $2\pi r$[m] を周期 T[s] かかるのだから

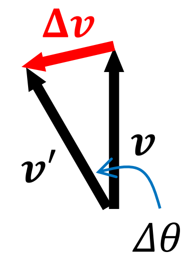
等速円運動させるには



では、等速円運動をさせるにはどのような力が必要だろうか。

短い時間 Δt で $\Delta\theta$ だけ回転したとすると、その速度変化 Δv は





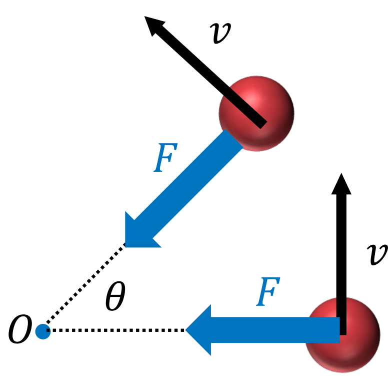
$|\Delta \boldsymbol{v}| = v\Delta\theta$

よって、Δt 間に速度変化 Δv を与える加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega =$$

$$=$$

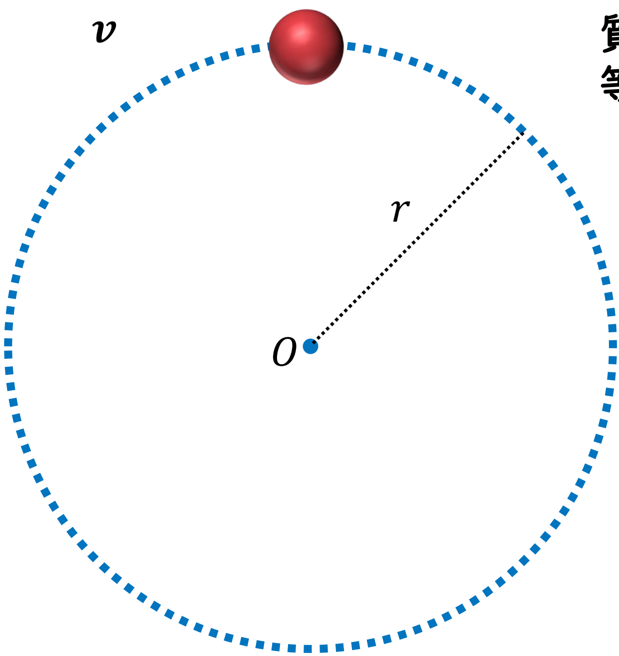
この加速度を求心加速度ということもある



また、このときの加速度の方向は常に中心向きとなる。
中心向きに加速度を与え、等速円運動を起こす力を______という。

$$F[\mathrm{N}] = ma = mv\omega = \qquad =$$

等速円運動の別の見方



質量m [kg]の物体が半径 r[m] の円周上を反時計回りに速さ v で等速円運動している。物体は時刻 $t = 0$ に $(r, 0)$ の点にいた。

角速度 ω を求めてみよう。

速度 v で一周 $2\pi r$ 回る時間（周期）T は $T = \frac{2\pi r}{v}$ で、この時間に角度 2π 回るのであるから

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \times v}{2\pi r} =$$

となる。

時刻 t での位置から加速度を求めてみよう。

2次元極座標で考えると、rは一定で $\varphi = \omega t$ であるから

変位 $$(x, y) = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t)$$

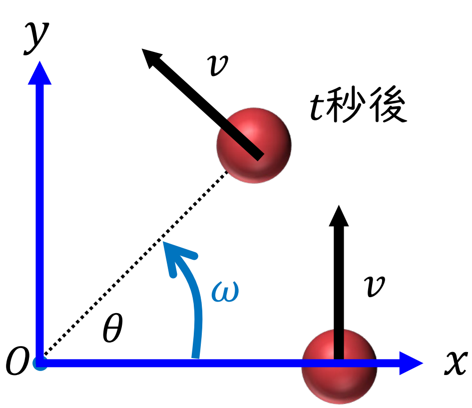
$\downarrow$ t で微分

速度 $$(\dot{x}, \dot{y}) = (v_x, v_y) = (\qquad\qquad)$$

$\downarrow$ t で微分

加速度 $$(\ddot{x}, \ddot{y}) = (a_x, a_y) = (\qquad\qquad)$$

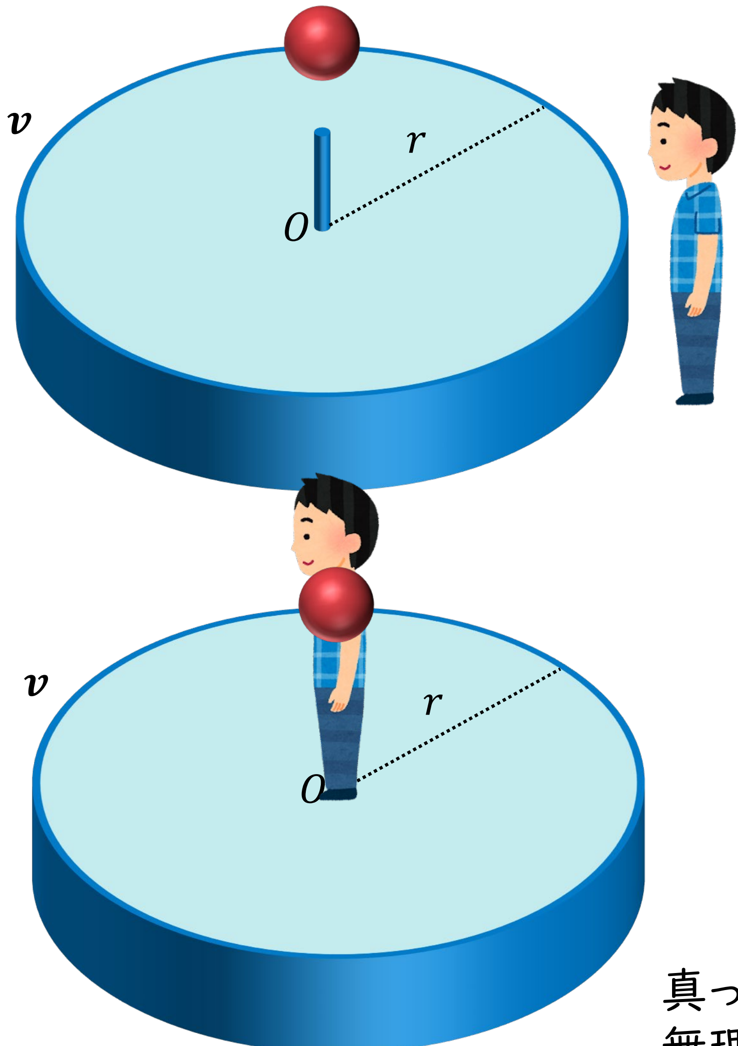
加速度の大きさは $$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} =$$



[演習1] 円運動

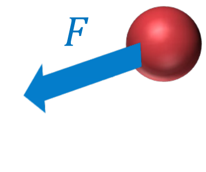
質量 0.15 [kg] の物体が毎秒2.5回の割合で半径 2.0[m] の円運動をしている。
このとき、(1) 周期、(2) 角速度、(3) 速さ、(4) 加速度の大きさ、(5) 向心力の大きさ をそれぞれ求めなさい。

遠心力とは



円運動を外から見ている人にとっては
球は円運動しているようにみえる

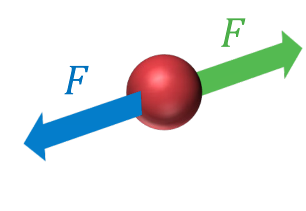
→ 向心力のみがはたらいている



一緒に円運動をしている人から見ると
球は静止しているようにみえる

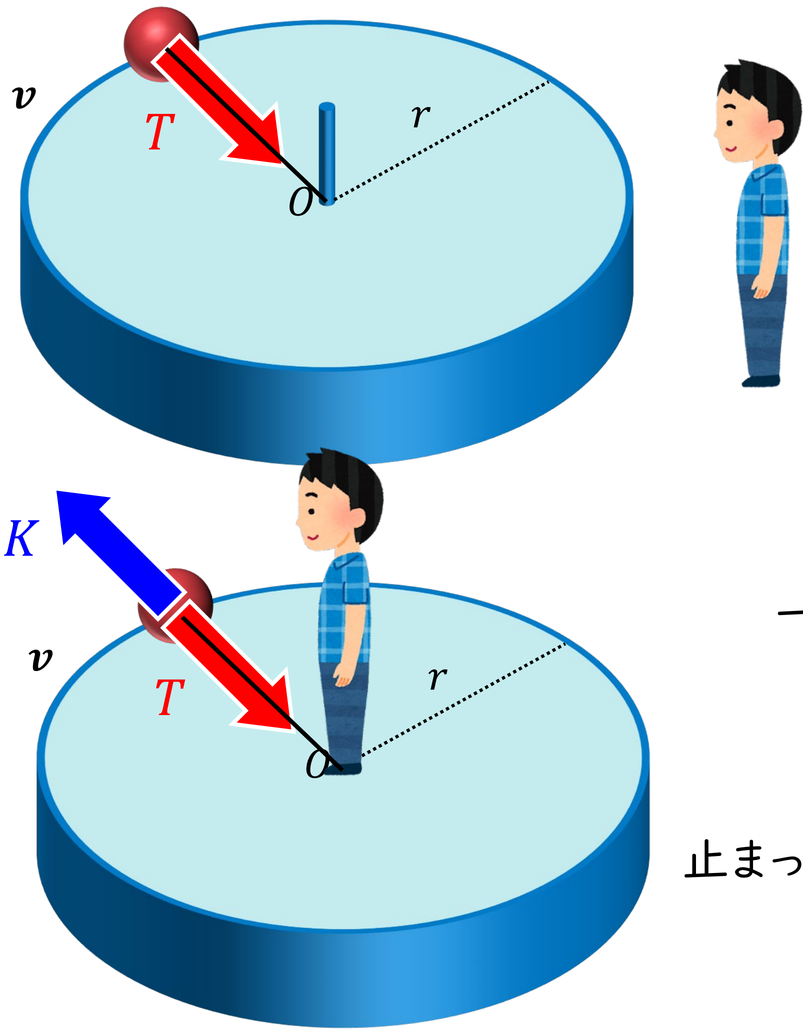
→ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿がはたらいているように
みえる

＿＿＿＿ という見かけの力（慣性力）



真っすぐ進みたい物体が向心力で
無理やり円運動させられているので、
本来進みたかった方向に力を受けるように感じる（だけ）

遠心力



円運動を外から見ている人 (静止座標系)
からみると

$$ma = F$$

向心力を生み出している

紐が球を引っ張る力

T

$$m\frac{v^2}{r} = T$$

一緒に乗っている人（慣性座標系）からみると

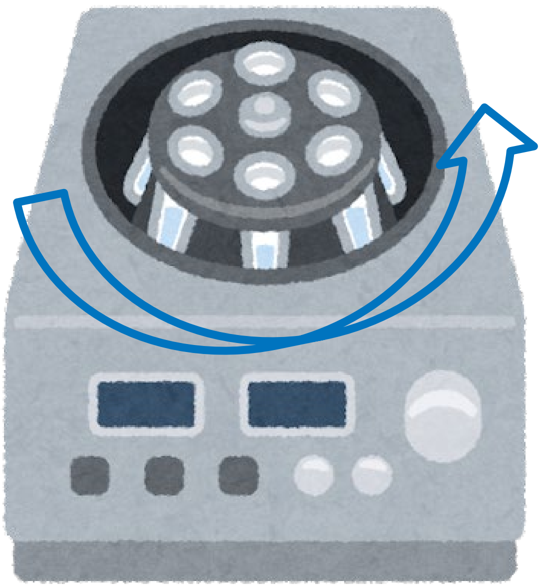
$$ma = F$$

止まっているのだから0

Tと同じ大きさの外側にはたらく遠心力がはたらく

$$0 = T - m\frac{v^2}{r}$$

[閑話?] 遠心分離機



遠心分離機

比重差のあるものを物質を高速回転させることで
分離する装置

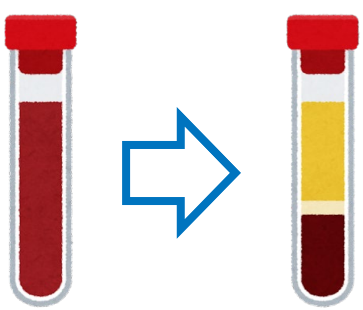
× 遠心力を利用して分離
◯ 向心力を利用して分離

密度の低い成分(軽いもの) → 中央よりに
密度の高い成分(思いもの) → 外側に

$$F = mr\omega^2$$

← 一定

m が小さいと遠心力 F も小さく
m が大きいと遠心力 F も大きくなる



m が大きい物質はより大きな遠心力
F により外側に押し出され、
結果rが大きくなる

[閑話?] 遠心分離機

アズワンWEBショップサイトAZXELより

0-8120-01　ミニ遠心機 135×145×140mm 6200rpm　CM-610T

Mini Centrifuge 135 x 145 x 140mm 6200rpm

☆☆☆☆☆レビューを書く

特徴

- 5秒で最大回転数に達し、OFF後約2秒で完全停止します。
- スイッチの他に、フタの開閉でもON／OFFの操作ができます。
- フタを開けると自動的に停止する安全装置が付いています。
- 10分間連続運転すると自動的に停止します。

仕様

- 幅×奥行×高さ（mm）：135×145×140
- 回転数（rpm）：6200
- 最大処理能力：1.5／2.0／2.2mLマイクロチューブ×6本
- 遠心加速度：2000G
- 安全装置：リッドオープン連動ブレーキ・停止忘れ防止タイマー（10分）
- 電源：AC100V　50/60Hz
- コード長：1.8m　2Pタイプ
- 重量：1.1kg
- 使用可能チューブサイズ：φ9.5～φ11mm×36～42mm

回転数（rpm）

rpm = revolutions per minute

1分間での回転数 n

$$6200[\mathrm{rpm}] = \frac{6200 \times 2\pi}{60} = 650[\mathrm{rad/s}]$$

遠心加速度（G）

遠心効果 Z とも表され、重力比での遠心力の大きさを示す

$$Z = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}$$

このときの回転半径は?

$$Z = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}\left(= \frac{\pi^2 r n^2}{900g}\right)$$

ここでは使わないけど
回転数から遠心加速度を求める式

より

$$r = \frac{Zg}{\omega^2} = \frac{2000 \times 9.8}{650^2} = 4.6 \times 10^{-2}[\mathrm{m}] = 4.6[\mathrm{cm}]$$

惑星の運動

Wikipediaより

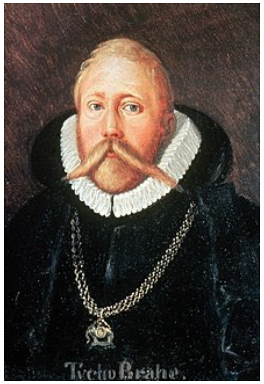

Johannes Kepler (1571-1630)

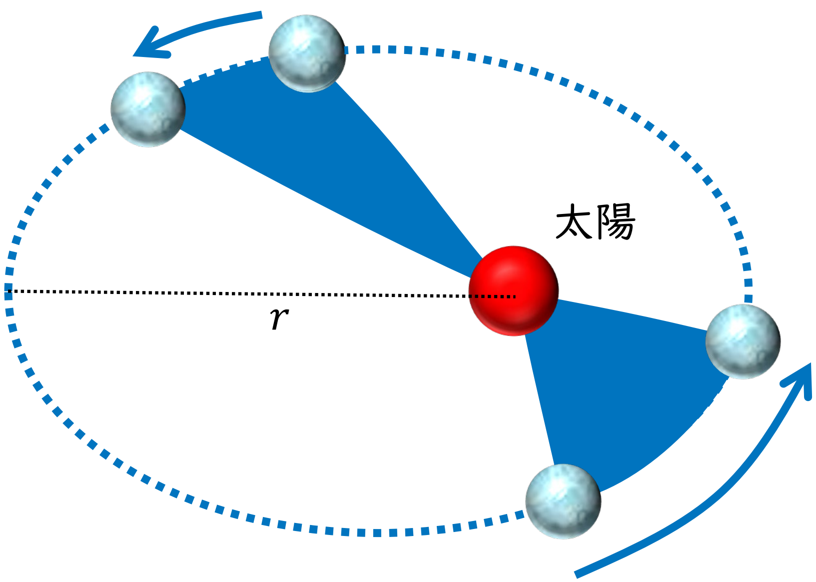
16世紀にティコ・ブラーエ（デンマーク）が天体を観測した記録からケプラー（ドイツ）は1610年に惑星の運動についての**ケプラーの法則**を発見した。

（1） 惑星の軌道は太陽を1つの焦点とする楕円である

（2） 惑星と太陽を結ぶ動径が一定時間に通過する面積は一定である。

（3） 惑星の公転周期の2乗は楕円軌道の長半径の3乗に比例する


Tycho Brahe (1546-1601)



Planet	Major radius r [au]	Priod T [yr]	T^2/r^3
Mercury	0.3871	0.24085	1.000055
Venus	0.7233	0.61520	1.000178
Earth	1.0000	1.00002	1.000020
Mars	1.5237	1.88085	1.000023
Jupiter	5.2026	11.8620	0.999205
Saturn	9.5549	29.4572	0.994728
Uranus	19.2184	84.0205	0.994532
Neptune	30.1104	164.7701	0.994506

惑星の運動

Isaac Newton (1643-1727)

17世紀、ニュートン(イングランド)は、
惑星の楕円運動は太陽から惑星に引力が働いているためと考えた

惑星の運動はほとんど等速円運動なので

$$F = mr\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

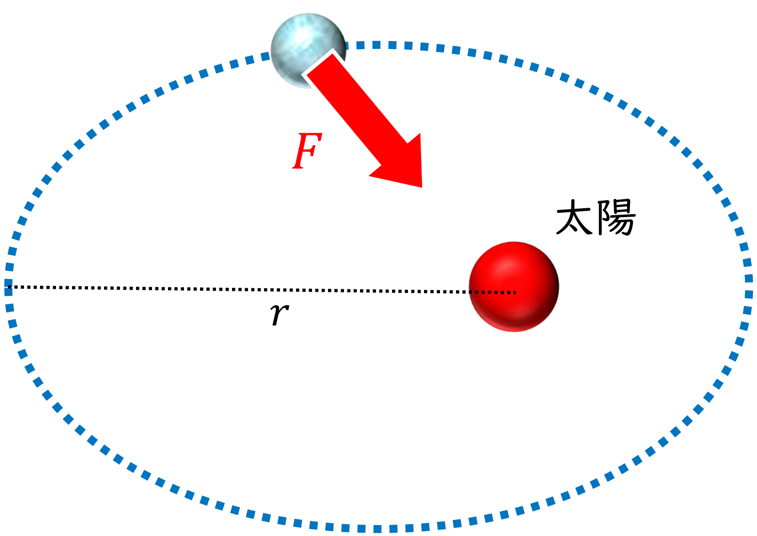
ケプラーの第3法則から 比例定数 k として $T^2 = kr^3$ であるから

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{kr^3} = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\frac{m}{r^2}$$

この力は太陽の質量 M にも比例すると考えられるので、G を比例定数として

$$\frac{4\pi^2}{k} \equiv GM$$

とすれば、 $F =$ ＿＿＿＿＿ (　　　　　　)



ニュートンは太陽と惑星だけでなくすべての物体間に
このような力がはたらくと考えて＿＿＿＿＿と名付けた。

G は万有引力定数といい

$$G = 6.673 \times 10^{-11} [\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$$

である。

[演習2] 地球上での重力加速度

万有引力の法則は

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

と書けることを学んだ。地球上での重力加速度と月面上での重力加速度をもとめ、月の上では重力が $1/6$ になることを確かめてみよ。
地球と月の質量と半径は以下の値を用いよ

	地球	月
半径[m]	6.38×10^6	1.74×10^6
質量[kg]	5.97×10^{24}	7.34×10^{22}