担当教員：西沢 望 （S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

第 6 回　多変数関数の積分（2）

今回のポイント

1. 2 重積分の変数変換とヤコビアン
2. 広義多重積分
3. 3 重積分

2重積分の変数変換

領域$\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) |\ \mathbf{0} \le \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{\pi},\ \mathbf{0} \le \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{\pi}\}$における

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\ \mathbf{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ の重積分$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dxdy}$ を求めてみる。

$(2x + y)$と$(2x - y)$でまとまっているので、

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2x - y \end{cases} \quad \cdots (1)$$

と変数変換すればよいので、被積分関数は、

$$g(u, v) = u \cdot \sin v \quad \cdots (2)$$

となるので、積分は

$$\iint_D f(x, y)\, \underline{dxdy} \neq \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u \sin v\, \underline{dudv}$$

としたくなるが、

面積要素に関する考察が必要

面積要素の変換が少々複雑

いま、式(1)を用いて$x = \frac{1}{4}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$とできるので、それぞれの全微分は、

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases} \cdots (3)$$

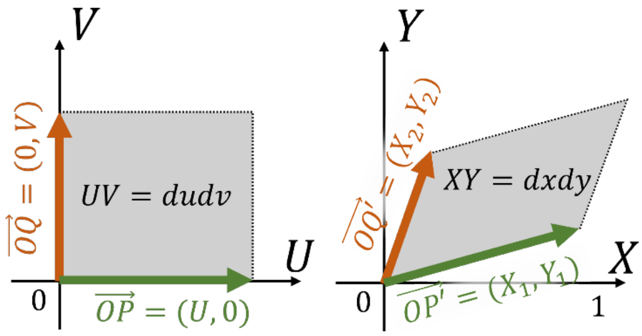
となる。$dx = X,\ dy = Y, du = U, dv = V$ とし、$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \frac{\partial x}{\partial v} = \beta,\ \frac{\partial y}{\partial u} = \gamma, \frac{\partial y}{\partial v} = \delta$ とすると、式(3)は、

$$\begin{cases} X = \alpha U + \beta V \\ Y = \gamma U + \delta V \end{cases} \cdots (4) \text{ または } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \cdots (5)$$

と書くことができる。

いま、UV座標平面上での面積要素$UV(=dudv)$が、上式によってXY座標平面上に写されたものを面積要素$dxdy$とおく。面積要素UVを決める 2 つのベクトル$\overrightarrow{OP}=(U,\ 0)$, $\overrightarrow{OQ}=(0,\ V)$が$\overrightarrow{OP'}=(X_1,Y_1)$, と$\overrightarrow{OQ'}=(X_2,\ Y_2)$ に写されたものとすると、

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha U\\\gamma U\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta V\\\delta V\end{pmatrix}\end{cases}$$



となり、面積要素UVは、る。このとき、XY座標平面上に写された領域は

$\overrightarrow{OP'}=(X_1,Y_1)$, と$\overrightarrow{OQ'}=(X_2,\ Y_2)$ から

なる平行四辺形となになるので、面積要素$dxdy$は、その面積$|X_1Y_2-X_2Y_1|$となる。

$$\begin{aligned}XY(=dxdy)&=|X_1Y_2-X_2Y_1|\\&=|\alpha U\cdot\delta V-\beta V\cdot\gamma U|\\&=|\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma|UV\\&=\left|\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right|dudv\end{aligned}$$

となる。この絶対値の中身をヤコビアンといい、Jで表す。

ヤコビアンは行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$とおくと、

$det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$ と表すことができる。

この行列式をヤコビアンもしくはヤコビの行列式と表す。

以上より、変数変換したときには面積要素は $dxdy=|J|dudv$ と変換すればよい。

例題では、$x=\frac{1}{4}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v)$から

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{4},\quad\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{4},\qquad\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2},\quad\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}$$

なので、

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^\pi \int_0^\pi u\sin v\,|J|dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \int_0^\pi u\sin v\,dudv\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^\pi [-\cos v]_0^\pi = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot 2 = \underline{\frac{\pi^2}{4}}$$

となる。

<u>定理 9　2 重積分の変数変換公式</u>

uv平面の有界閉領域Eをxy平面の有界閉領域Dに写すC^1級写像T が 1 対 1 で、E上のすべての点で$J \neq 0$ とする。

このときD上の連続関数$f(x,y)$ に対し、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J|dudv$$

が成り立つ。ただし、$T(u,v) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ である。

<u>系 1　2 重積分の変数変換公式</u>

1 次変換 $x = au + bv, y = cu + dv$, $(ad - bd \neq 0)$によって、

uv平面の有界閉領域Eをxy平面の有界閉領域Dに写されるとする。

このときD上の連続関数$f(x,y)$ に対し、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(au+bv, cu+dv)\,|ad-bc|dudv$$

例題2 (教 P.157)

$$\boldsymbol{\iint_D y\,dxdy \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le y - x \le 1, \quad 0 \le x + y \le 1\}}$$

$u = -x + y$, $v = x + y$ とおくと、

$$x = \frac{-u+v}{2},\ \ y = \frac{u+v}{2}$$

となるので、$E = \{(x,y) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$で、

$$|J| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_E \frac{u+v}{2}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 (u+v)dudv$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[\frac{u^2}{2}+v\right]_0^1 dv = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+v\right) dv = \frac{1}{4}\left[\frac{v}{2}+\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{4}}$$

系 2 極座標変換

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって、

$r\theta$平面の有界閉領域Eをxy平面の有界閉領域Dに写されるとする。

このときD上の連続関数$f(x,y)$ に対し、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r drd\theta$$

証明

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくとき、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

なので、

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r\cos^2\theta + r\sin^2\theta| = |r| = r$$

となるので、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

例題 3 (教 P.158)

(1) $\displaystyle\iint_D \boldsymbol{x\,dxdy}$ $\quad \boldsymbol{D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0\}}$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \left\{(x,y) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_E r\cos\theta \cdot rdrd\theta$$
$$= \int_0^1 r^2\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{1}{3}}$$

(2)　$\iint_D \boldsymbol{y\,dxdy}$　　$\boldsymbol{D = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad y \geq 0\right\}}$

$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \{(x,y) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = |abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta| = |abr| = abr$$

となるので、

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_E br\sin\theta \cdot abrdrd\theta$$
$$= ab^2\int_0^1 r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = ab^2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1[-\cos\theta]_0^\pi = \underline{\frac{2}{3}ab^2}$$

5.2 広義の 2 重積分 （$\boxed{教}$P.160～）

ここまでは有界閉領域Dでの積分であり、被積分関数$f(x,y)$はDで連続であるとした。1 変数関数の場合と同様に、有界閉領域でない場合を考える。

- <u>閉領域であるが有界でない例</u>

$$D = \{(x,y) \mid \ 0 \leq x,\ \ 0 \leq y\}$$

このとき、

$$D_n = \{(x,y) \mid \ 0 \leq x \leq n,\ \ 0 \leq y \leq n\}$$

や

$$E_n = \{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 \leq n^2,\ \ 0 \leq x,\ \ 0 \leq y\}$$

はDに含まれる有界閉領域の列であるので、$\{D_n\}, \{E_n\}$はDの<u>近似列</u>であるという。

- <u>有界であるが閉領域でない例</u>

$$D = \{(x,y) \mid \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

このとき、

$$D_n = \left\{(x,y) \mid \ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

はDの<u>近似列</u>である。

D上で連続な関数$f(x,y)$について、どのように近似列をとっても一定の有限な極限値

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = I$$

が存在するとき、この極限値Iを$\iint_D f(x,y)\,dxdy$と表し、広義２重積分という。また、$f(x,y)$はD上で広義２重積分可能であるという。

定理 10　広義重積分可能性の判定

$f(x,y)$がD上で連続かつ$f(x,y) \geq 0$であるとする。このときひとつの近似列$\{D_n\}$について

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = I$$

が存在すれば、$f(x,y)$はD上で広義２重積分可能であり、広義重積分はIとなる。

例 8

$$\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \quad D = \{(x,y)|\ 0 < x^2+y^2 \leq 1\}}$$

$D_n = \left\{(x,y)|\ \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y)|\ \frac{1}{n} \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to 2\pi\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I = 2\pi}$となる。

例題 4

$$\boldsymbol{\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \qquad \textbf{を示せ}$$

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},\qquad D = \{(x,y)|\ 0 \leq x,\ \ 0 \leq y\}$
とおいて$f(x,y)$のD上での広義重積分を２通りで示す。

$$D_n = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq n^2,\ \ 0 \leq x,\ \ 0 \leq y\ \}$$

とおくと$\{D_n\}$はDの近似列である。
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$D_n = \left\{(x,y)|\ 0 \leq r \leq n,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^n re^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}\left(-e^{-n^2}+1\right)$$

となる。$I_n(D_n)\to\frac{\pi}{4}\ (n\to\infty)$なので、$I=\frac{\pi}{4}$となる。

他方、$E_n=\{(x,y)|\ 0\le x\le n,\ 0\le x\le n\}$ とおくと$\{E_n\}$はDの近似列である。

$$I_n(E_n)=\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^n e^{-x^2}dx\int_0^n e^{-y^2}dy$$
$$=\left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2\to\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

となる。よって、両者から

$$\underline{\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$\boxed{\text{例 9}}$

$$\boldsymbol{I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 0<x\le 1,\ \ 0\le y\le x\}}$$

$D_n=\left\{(x,y)|\ \frac{1}{n}\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x-\frac{1}{n}\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x-y}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1 dx\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x-y}}dy$$

$$=2\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)dx=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}x\right]_{\frac{1}{n}}^1=2\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。$I_n(D_n)\to\frac{4}{3}\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\frac{4}{3}}$となる。

5.3 3 重積分 （$\boxed{\text{教}}$P.164〜）

2 重積分から 3 重積分になっても変数が拡張されるだけ。

$\boxed{\text{例 10}}$

$D=\{(x,y,z)|\ 0\le x,\ \ 0\le y,\ \ x+y+z\le 1\}$における 3 重積分を考える

$E=\{(x,y)|\ 0\le x,\ \ 0\le y,\ \ x+y\le 1\}$ とすると、$D=\{(x,y)|\ (x,y)\in E,\ z\le 1-x-y\}$ とあらわすことができるので、

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_E dxdy \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$$

となる

問 11

(1) $\displaystyle \boldsymbol{\iiint_D dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz}$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\,[z]_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy$$
$$= \int_0^1 dx \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{6}}$$

(2) $\displaystyle \boldsymbol{\iiint_D x\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\,dz}$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\,[xz]_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\,dy$$
$$= \int_0^1 dx \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{24}}$$

(3) $\displaystyle \boldsymbol{\iiint_D (1-x-y)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-x-y)\,dz}$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\,[(1-x-y)z]_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{12}}$$

➢ 3 重積分の変数変換

2 重積分に対する変数変換公式は 3 重積分においても成り立つ。

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w), \qquad z = z(u,v,w)$$

によって定義される。uvw平面からxyz平面へのC^1級写像T が

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

とするとき、

 担当教員：西沢 望 （S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

$$J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

をヤコビアンと呼ぶ。

定理 12　3 重積分の変数変換公式

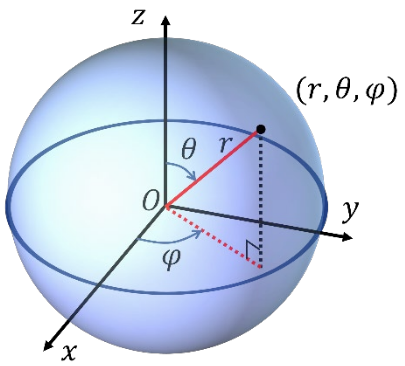
uvw平面の有界閉領域Eをxyz平面の有界閉領域Dに写すC^1級写像T が 1 対 1 で、E上のすべての点で$J \neq 0$とする。

このときD上の連続関数$f(x,y,z)$ に対し、

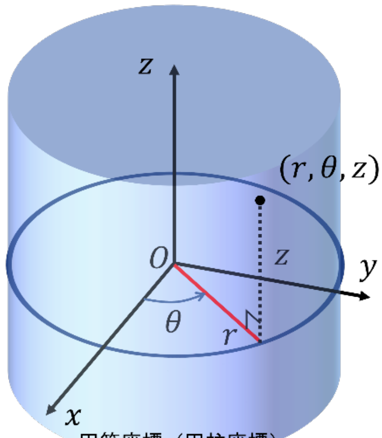
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdy = \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|dudvdw$$

が成り立つ。ただし、$T(u,v) = (\varphi(u,v), \varphi(u,v))$ である。

空間の極座標（球面座標）と円柱座標



極座標（球面座標）



円筒座標（円柱座標）

極座標（球面座標）

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$(r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

円筒座標（円柱座標）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

それぞれについて次の変数変換の公式が成り立つ

系 1　極座標変換公式

極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ によって、

xyz空間の領域Dと$r\theta\varphi$空間の領域Eが対応しているとき、

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdy = \iiint_E f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

系 2　円筒座標変換公式

円筒座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, z = z$ によって、
xyz空間の領域Dと$r\theta z$空間の領域Eが対応しているとき、

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdy = \iiint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r drd\theta dz$$

例題 5

次の 3 重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D \boldsymbol{dxdydz} \quad \boldsymbol{D} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{x^2+y^2+z^2 \le a^2},\ \boldsymbol{0 \le z}\right\}\ (a > 0)$

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと
$r\theta\varphi$空間の領域$E = \left\{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_E r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^2\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{2}{3}\pi a^3}$$

(2) $\displaystyle\iiint_D (\boldsymbol{x^2+y^2})\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{dxdydz} \quad \boldsymbol{D} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{x^2+y^2 \le 1},\ \boldsymbol{0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}}\right\}$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, z = z$ と円筒座標変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta z$空間の領域
$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le r\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_E r^2 z\, r drd\theta dz = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r^3 z\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^1 dr \left[r^3\frac{z^2}{2}\right]_0^r = \pi\int_0^1 r^5\, dr = \pi\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{6}\pi}$$

問 13

ヤコビアンを計算して、系 1 と系 2 が成り立つことを示せ。

極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ に対して、

$$\begin{aligned}
x_r &= \sin\theta\cos\varphi, & x_\theta &= r\cos\theta\cos\varphi, & x_\varphi &= -r\sin\theta\sin\varphi \\
y_r &= \sin\theta\sin\varphi, & y_\theta &= r\cos\theta\sin\varphi, & y_\varphi &= r\sin\theta\cos\varphi \\
z_r &= \cos\theta, & z_\theta &= -r\sin\theta, & z_\varphi &= 0
\end{aligned}$$

より、

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\theta\cos\varphi\cdot\ r\cos\theta\sin\varphi\cdot 0 + r\cos\theta\cos\varphi\cdot r\sin\theta\cos\varphi\cdot\cos\theta + (-\mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi)\\
&\qquad\qquad \cdot\sin\theta\sin\varphi\cdot(-r\sin\theta) - \sin\theta\cos\varphi\cdot(-r\sin\theta)\cdot r\sin\theta\cos\varphi\\
&\qquad\qquad - r\cos\theta\cos\varphi\cdot\sin\theta\sin\varphi\cdot 0 - (-r\sin\theta\sin\varphi)\cdot\ r\cos\theta\sin\varphi\cdot\cos\theta\\
&= r^2(\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi)\\
&= r^2(\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta) = \underline{r^2\sin\theta}
\end{aligned}
$$

円筒座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,$z = z$に対して、

$$
\begin{aligned}
&x_r = \cos\theta, &&x_\theta = -r\sin\theta, &&x_z = 0\\
&y_r = \sin\theta, &&y_\theta = r\cos\theta, &&y_z = 0\\
&z_r = 0, &&z_\theta = 0, &&z_\varphi = 1
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}\\
&= \cos\theta\cdot\ r\cos\theta\cdot 1 + (-r\sin\theta)\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot\sin\theta\cdot 0 - \cos\theta\cdot 0\cdot 0 - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta\\
&\qquad\qquad \cdot 1 - 0\cdot\ r\cos\theta\cdot 0\\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{r}
\end{aligned}
$$

覚えておくと計算が楽になる公式 (ウォリスの公式)

$n \geq 2$のとき、

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx
= \begin{cases}
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{: 偶数})\\[2ex]
\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{: 奇数})
\end{cases}
$$

【問題集】

二重積分の変数変換

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(1) $\iint_D x^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x-y\le 1,\quad 0\le x+y\le 1\}$

(2) $\iint_D (x-y)^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid -1\le x+2y\le 1, -1\le x-y\le 1\}$

(3) $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$

(4) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

(5) $\iint_D xy\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}\ a>0, b>0$

(6) $\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 3,\quad 0\le x,\quad 0\le y\}$

(7) $\iint_D (x-y)e^{x-y}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 1,\quad 0\le x-y\le 1\}$

(8) $\iint_D \left(px^2+qy^2\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\right\}$

(9) $\iint_D x^3+y^3\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

(10) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x\right\}$

(11) $\iint_D (x+2y)^3\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x+2y\le 1,\quad 0\le x-y\le 1,\}$

(12) $\iint_D x^2+y^2\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 4\right\}$

(13) $\iint_D y\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x-y\le 1,\quad 0\le x+y\le 1,\}$

(14) $\iint_D \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$

(15) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

(16) $\iint_D xy\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

(17) $\iint_D x^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\}$

(18) $\iint_D y\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

(19) $\iint_D \sqrt{x-y+1}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid -1\le x+y\le 1,\quad -1\le x-y\le 1\}$

(20) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}\ (a>0,b>0)$

(21) $\iint_D x^2+y^2\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

(22) $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\quad y\ge 0\}$

(23) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le ax\}$

(24) $\iint_D \frac{\tan^{-1}(x-y)}{x+y}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 2,\quad 0\le x-y\le 1\}$

➢ 広義の 2 重積分

次の広義積分を求めよ。

(1) $I=\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0<x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$

(2) $I=\iint_D \frac{1}{x^2y^2}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 1\le x,\ 1\le y\}$

(3) $I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<a^2\}$

(4) $I=\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le y<x\le 1\}\ (0<\alpha<1)$

(5) $I=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le y\}$

(6) $I=\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}\ (0<\alpha<1)$

(7) $I=\iint_D e^{-(x+y)}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x,\ 0\le y\le 1\}$

(8) $I=\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le y\le x,\quad 0<x^2+y^2\le 1\}$

(9) $I=\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0<x,\ 0\le y,\ x^2+y^2\le 1\}$

(10) $I=\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\}$

(11) $I=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x,\quad 0\le y\}$

(12) $I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1,\quad 0\le y\}$

(13) $I=\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0<x^2+y^2\le 1\}\ (0<\alpha<1)$

(14) $I=\iint_D \frac{x}{\sqrt[3]{y}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\quad 0<y\le 1\}$

(15) $I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le y<\sqrt{x}\le 1\}$

(16) $I=\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x,\quad 1\le y\}$

(17) $I=\iint_D \frac{xy^4}{1-x^2}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1,\quad 0\le x<1\}$

(18) $I=\iint_D \frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le y,\quad 0<x^2+y^2\le 1\}$

➢ 3 重積分

変数変換を用いて次の 3 重積分を求めよ。

(1) $\iiint_D z\,dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le z\}\ (a>0)$

(2) $\iiint_D (xy+yz+zx)\,dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ 0\le z\le y\le x\le 1\}$

(3) $\iiint_D (x-z)\,dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ 0\le x,\ 0\le y,\quad x^2+y^2+z^2\le 4\}$

(4) $\iiint_D z\,dxdydz$

$D=\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\le a^2,\ x^2+y^2\le ax,\ 0\le z\}\ (a>0)$

(5) $\iiint_D x^2\,dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\quad x+y+z\le 1\}$

(6) $\iiint_D dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\quad x+y+z\le a\}$

(7) $\iiint_D \sin(x+2y+3z)\,dxdydz$

$D=\{(x,y,z)|\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x+2y+3z\le \pi\}$

(8) $\iiint_D x^2\,dxdydz \qquad D=\left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

(9) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz \qquad D=\left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$

(10) $\iiint_D ze^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz \qquad D=\left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le z\right\}$

(11) $\iiint_D z\,dxdydz \qquad D=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\right\}$

(12) $\iiint_D xyz\,dxdydz \qquad D=\{(x,y,z)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$

(13) $\iiint_D y\,dxdydz \qquad D=\left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le y\right\}\ (a>0)$

【解答】

➢ 二重積分の変数変換

教科書 P.159 問 9 (演習に出題)

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid 0\le x-y\le 1,\quad 0\le x+y\le 1\}$

$u=x-y,\ v=x+y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\ \ y=\frac{-u+v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D x^2\,dxdy=\iint_E\frac{(u+v)^2}{4}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{8}\int_0^1\int_0^1(u^2+2uv+v^2)dudv$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left[\frac{u^3}{3}+vu^2+v^2u\right]_0^1 dv=\frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{1}{3}+v+v^2\right)dv=\frac{1}{8}\left[\frac{v}{3}+\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}\right]_0^1=\underline{\frac{7}{48}}$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid -1\le x+2y\le 1,-1\le x-y\le 1\}$

$u=x+2y,\ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+2v}{3},\ \ y=\frac{u-v}{3}$$

となるので、$E=\{(x,y)\mid -1\le u\le 1,-1\le v\le 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

となるので、

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy=\iint_E v^2\cdot\frac{1}{3}dudv=\frac{1}{3}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 v^2dudv$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^1\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^1 du=\frac{1}{3}\int_{-1}^1\left(\frac{2}{3}\right)du=\frac{1}{3}\left[\frac{2u}{3}\right]_{-1}^1=\underline{\frac{4}{9}}$$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \{(x, y) |\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_E r^2 \cdot rdrd\theta$$
$$= \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(4)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$　　$D = \left\{(x, y) |\ x^2 + y^2 \le a^2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0\right\}$

$x = ar\cos\theta, y = ar\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \left\{(x, y) |\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ a\sin\theta & ar\cos\theta \end{vmatrix} = |a^2 r\cos^2\theta + a^2 r\sin^2\theta| = |a^2 r| = a^2 r$$

となるので、

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_E a\sqrt{1 - r^2} \cdot a^2 rdrd\theta = \frac{a^3\pi}{2}\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\,dr$$

ここで$\sqrt{1 - r^2} = t$ とおくと、$rdr = -tdt$となるので、

$$= \frac{a^3\pi}{2}\int_0^1 t^2\,dr = \frac{a^3\pi}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\frac{a^3\pi}{6}}$$

(5)　$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$　　$D = \left\{(x, y) |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$　$a > 0, b > 0$

$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \{(x, y) |\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = |abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta| = |abr| = abr$$

となるので、

$$\iint_D xy\,dxdy = \iint_E abr^2\cos\theta\sin\theta \cdot abrdrd\theta$$
$$= a^2b^2\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = a^2b^2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 [-\cos^2\theta]_0^{2\pi} = \underline{0}$$

教科書 P.176 演習問題 5-A. 5.（レポートに出題）

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy \qquad D=\{(x,y)|\,1\le x+y\le 3,\quad 0\le x,\quad 0\le y\}$

$u=x+y,\ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)|\,1\le u\le 3, -u\le v\le u\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy=\iint_E \frac{u^2+v^2}{2u^3}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{4}\int_1^3 du\int_{-u}^{u}\left(\frac{1}{u}+\frac{v^2}{u^3}\right)dv$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 du\left[\frac{1}{u}v+\frac{1}{u^3}\frac{v^3}{3}\right]_{-u}^{u}=\frac{2}{3}\int_1^3 du=\underline{\frac{4}{3}}$$

(7) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x-y}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)|0\le x+y\le 1,\quad 0\le x-y\le 1\}$

$u=x+y,\ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)|\,0\le u\le 1,\ \ 0\le v\le 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D (x-y)e^{x-y}\,dxdy=\iint_E ve^u\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\,dv\int_0^1 e^u\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1[e^u]_0^1=\underline{\frac{1}{4}(e-1)}$$

(8) $\displaystyle\iint_D \left(px^2+qy^2\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)|\,x^2+y^2\le a^2\right\}$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\{(x,y)|\,0\le r\le a,\ \ 0\le\theta\le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D (px^2+qy^2)\,dxdy=\iint_E (pr^2\cos^2\theta+qr^2\sin^2\theta)\cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \left(pr^3 \frac{1+\cos 2\theta}{2} + qr^3 \frac{1-\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a dr \left[pr^3 \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + qr^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = \pi \int_0^a (pr^3 + qr^3)\, dr$$

$$= \pi \left[p\frac{r^4}{4} + q\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \underline{\frac{\pi a^4}{4}(p+q)}$$

(9)　$\displaystyle \iint_D \boldsymbol{x^3 + y^3\, dxdy}$　　$\displaystyle \boldsymbol{D = \left\{ (x,y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0 \right\}}$

$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = |abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta| = |abr| = abr$$

となるので、

$$\iint_D (x^3 + y^3)\, dxdy = ab \int_0^1 r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 r^3 \cos^3\theta + b^3 r^3 \sin^3\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{ab}{5} \left\{ a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta + b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta \right\}$$

ここでカッコ内の第 1 項は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

において$\sin\theta = t$ とおくと、$\cos\theta\, d\theta = dt$となるので、

$$= \int_0^1 (1 - t^2)\, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

同様に第 2 項は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

において$\cos\theta = t$ とおくと、$-\sin\theta\, d\theta = dt$となるので、

$$= \int_0^1 (1 - t^2)\, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

よって求める積分値は

$$\frac{ab}{5}\left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^3 \right) = \underline{\frac{2ab}{15}(a^3 + b^3)}$$

(10)　$\displaystyle \iint_D \boldsymbol{\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy}$　　$\boldsymbol{D = \{ (x,y) | x^2 + y^2 \le x \}}$

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \left\{(x,y) \mid 0 \le r \le \cos\theta\,, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_E \sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\cos\theta} = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{1-|\sin\theta|^3\}\,d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-\sin^3\theta\}\,d\theta$$

ここで$\cos\theta = t$ とおくと、$-\sin\theta\,d\theta = dt$となるので、第二項は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

となるので、求める積分は、

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{3\pi-4}{9}}$$

教科書演習 P.155 例題 5.4

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(11) $\displaystyle\iint_D (x+2y)^3\,dxdy \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le x+2y \le 1, \quad 0 \le x-y \le 1,\}$

$u = x+2y,\ \ v = x-y$ とおくと、

$$x = \frac{u+2v}{3},\ \ y = \frac{u-v}{3}$$

となるので、$E = \{(x,y) \mid 0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 1\}$で、

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

となるので、

$$\iint_D (x+2y)^3\,dxdy = \iint_E u^3\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_0^1 dv\int_0^1 u^3\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{12}}$$

(12) $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \mid \ x^2+y^2 \le 4\right\}$

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\{(x,y)|\,0\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D x^2+y^2\,dxdy=\iint_E r^3\,drd\theta=\int_0^2 r^3\,dr\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=\underline{8\pi}$$

教科書演習 P.155 問題 5.5

(13) $\displaystyle\iint_D \boldsymbol{y\,dxdy}\qquad \boldsymbol{D=\{(x,y)|\,0\leq x-y\leq 1,\quad 0\leq x+y\leq 1,\}}$

$u=x+y,\ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)|\,0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D y\,dxdy=\iint_E\frac{u-v}{2}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{4}\int_0^1 du\int_0^1(u-v)\,dv$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 du\left[uv-\frac{v^2}{2}\right]_0^1 dv=\frac{1}{4}\int_0^1\left\{u-\frac{1}{2}\right\}dv=\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}u\right]_0^1=\underline{0}$$

(14) $\displaystyle\iint_D\boldsymbol{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)dxdy}\qquad\boldsymbol{D=\left\{(x,y)|\,x^2+y^2\leq 1\right\}}$

$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\{(x,y)|\,0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta+\frac{1}{3}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta+\frac{1}{3}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta+\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{16}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{24}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{12}\pi=\underline{\frac{5}{24}\pi}$$

(15) $\displaystyle\iint_D\boldsymbol{\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy}\qquad\boldsymbol{D=\left\{(x,y)|\,x^2+y^2\leq 1,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0\right\}}$

$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\iint_E \sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{\pi}{6}}$$

教科書演習 P.156 例題 5.5

(16) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

$x=2r\cos\theta, y=3r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J|=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2r\sin\theta\\ 3\sin\theta & 3r\cos\theta\end{vmatrix}=|6r\cos^2\theta+6r\sin^2\theta|=|6r|=6r$$

となるので、

$$\iint_D xy\,dxdy=\iint_E 6r^2\cos\theta\sin\theta\cdot 6rdrd\theta$$
$$=36\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=18\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1[-\cos^2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{9}{2}}$$

教科書演習 P.156 例題 5.6

(17) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy \qquad D=\{(x,y)|\, x^2+y^2\le 2x\}$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le r\le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iint_D x^2\,dxdy=\iint_E r^2\cos^2\theta\cdot rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\,dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=8\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{5}{4}\pi}$$

教科書演習 P.156 問題 5.6

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(18) $\displaystyle \iint_D y\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\right\}$

$x=ar\cos\theta\,, y=br\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)\middle|\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J|=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=|abr\cos^2\theta+abr\sin^2\theta|=|abr|=abr$$

となるので、

$$\iint_D y\,dxdy=\iint_E br\sin\theta\cdot abrdrd\theta$$
$$=ab^2\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=ab^2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{ab^2}{3}}$$

教科書演習 P.169 演習問題 5-A. 4

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(19) $\displaystyle \iint_D \sqrt{x-y+1}\,dxdy \qquad D=\{(x,y)|-1\le x+y\le 1,\quad -1\le x-y\le 1\}$

$u=x+y,\ \ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\ \ y=\frac{u-v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)|-1\le u\le 1,-1\le v\le 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D \sqrt{x-y+1}\,dxdy=\iint_E \sqrt{v+1}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 du\int_{-1}^1\sqrt{v+1}\,dv$$
$$=\left[\frac{2}{3}(v+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}\int_1^3 du=\underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

(20) $\displaystyle \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le 1\right\}(a>0,b>0)$

$x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\{(x,y)|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\iint_E\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\cdot rdrd\theta$$
$$=\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 4\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\underline{\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

(21) $\displaystyle\iint_D \boldsymbol{x^2+y^2\,dxdy}\qquad \boldsymbol{D=\left\{(x,y)|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}}$

$x=2r\cos\theta\,,y=3r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\{(x,y)|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。よって、

$$|J|=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2r\sin\theta\\ 3\sin\theta & 3r\cos\theta\end{vmatrix}=|6r\cos^2\theta+6r\sin^2\theta|=|6r|=6r$$

となるので、

$$\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy=6\int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi}(4r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\left\{4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta+9\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right\}=6\left\{4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta+9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\right\}$$
$$=6\left\{4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\underline{\frac{39}{2}\pi}$$

(22) $\displaystyle\iint_D\boldsymbol{\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy}\qquad \boldsymbol{D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0,\quad y\ge 0\}}$

$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_E\frac{1}{1+r^2}\cdot rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}[\log\{1+r^2\}]_0^1=\underline{\frac{\pi}{2}\log 2}$$

(23) $\displaystyle\iint_D\boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy}\qquad \boldsymbol{D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le ax\}}$

$x=ar\cos\theta\,,y=ar\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)\mid 0\le r\le\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=a\iint_E\sqrt{1-r^2}\cdot a^2rdrd\theta=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\cos\theta}=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{1-|\sin\theta|^3\}\,d\theta=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-\sin^3\theta\}\,d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)\right\}=\underline{\frac{3\pi-4}{9}a^3}$$

キャンパス・ゼミ　微分積分　P.218　演習問題 29

変数変換を用いて次の二重積分を求めよ。

(24) $\displaystyle\iint_D\frac{\tan^{-1}(x-y)}{x+y}dxdy$ 　　$D=\{(x,y)\mid 1\le x+y\le 2,\quad 0\le x-y\le 1\}$

$u=x+y,\ v=x-y$ とおくと、

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}$$

となるので、$E=\{(x,y)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\}$で、

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

となるので、

$$\iint_D\frac{\tan^{-1}(x-y)}{x+y}dxdy=\iint_E\frac{\tan^{-1}v}{u}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1\tan^{-1}v\,dv\int_0^1\frac{1}{u}du$$

ここで、

$$\int_0^1\tan^{-1}v\,dv=[v\tan^{-1}v]_0^1-\int_0^1\frac{v}{1+v^2}dv=\left[v\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\log(1+v^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^1\frac{1}{u}du=[\log u]_0^1=\log 2$$

よって

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)\log 2=\underline{\frac{1}{8}(\pi-2\log 2)\log 2}$$

➢ 広義の 2 重積分

教科書 P.163 問 10（レポートに出題）

次の広義積分を求めよ。

(1) $\boldsymbol{I = \iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}}$

$D_n = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} e^{\frac{y}{x}}\,dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} (xe^x - x)\,dx = [xe^x]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^x\,dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} x\,dx$$

$$= \left[xe^x - e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \left(e - e - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2}\right) = e^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{1}{2}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{1}{2}}$となる。

(2) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{x^2y^2}\,dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 1 \leq x,\ 1 \leq y\}}$

$D_n = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq n,\ 1 \leq y \leq n\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{x^2y^2}\,dxdy = \int_1^n dx \int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\,dy$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \left[-\frac{1}{y}\right]_1^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

となる。$I_n(D_n) \to 1\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = 1}$となる。

(3) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}}$

$D_n = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x = ar\cos\theta, y = ar\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{1 - \frac{1}{n}},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$

が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi a\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=2\pi a\left[\sqrt{1-r^2}\right]_{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^{0}=2\pi a\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

となる。$I_n(D_n)\to 2\pi a\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=2\pi a}$となる。

(4) $\boldsymbol{I=\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 0\le y<x\le 1\}\ (0<\alpha<1)}$

$D_n=\left\{(x,y)|\ \frac{1}{n}\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x-\frac{1}{n}\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}dx\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dy=-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{(x-y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^{x-\frac{1}{n}}dx$$

$$=-\frac{1}{1-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-x^{1-\alpha}\right\}dx=-\frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}x-\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{1-\alpha}\left\{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-\frac{1}{2-\alpha}\right)-\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}\left(1-\frac{1}{2-\alpha}\right)\right\}\to\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(n\to\infty)$$

となる。$I_n(D_n)\to\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}}$となる。

(5) $\boldsymbol{I=\iint_D\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 0\le y\}}$

$D_n=\{(x,y)|\ -n\le x\le n,\ \ 0\le y\le n\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$　とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n=\{(x,y)|\,0\le r\le n,\ \ 0\le\theta\le\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dxdy=\int_0^n\frac{r}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dr\int_0^\pi d\theta=\pi\int_0^n\frac{r}{(1+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dr$$

$\alpha\ne 2$のとき

$$=\frac{\pi}{2-\alpha}\left[(1+r^2)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right]_0^n=\frac{\pi}{2-\alpha}\left\{(1+n^2)^{\frac{2-\alpha}{2}}-1\right\}$$

となる。

$\alpha<2$のとき、$I_n(D_n)\to\infty\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\infty}$となる。

$\alpha>2$のとき、$I_n(D_n)\to\frac{\pi}{\alpha-2}\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\frac{\pi}{\alpha-2}}$となる。

$\alpha=2$のとき、

$$I_n(D_n) = \pi \int_0^n \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{1}{2}[\log r^2]_0^n = \frac{1}{2}(2\log n - 1) \to \infty \ (n \to \infty)$$

なので、$\underline{I = \infty}$となる。

(6) $\boldsymbol{I = \iint_D \log(x^2+y^2)\, dxdy \quad D = \left\{(x,y) \middle| \ 0 < x^2+y^2 \le 1\right\} \ (0 < \alpha < 1)}$

$D_n = \left\{(x,y) \middle| \ \frac{1}{n^2} \le \ x^2+y^2 \le 1\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y) \middle| \ \frac{1}{n} \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_D \log(x^2+y^2)\, dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1 r\log(r^2)\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r\log r\, dr$$

$$= 4\pi\left\{\left[\frac{r^2\log r}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^1 r dr\right\} = 4\pi\left[\frac{r^2\log r}{2} - \frac{r^2}{4}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = 4\pi\left\{\left(0-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2n^2}\log\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}\right\}$$

$$\to -\pi \ \ (n \to \infty)$$

となる。$I_n(D_n) \to -\pi \ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = -\pi}$となる。

教科書 P.176 演習問題 5-A 6 (レポートに出題)

(7) $\boldsymbol{I = \iint_D e^{-(x+y)}\, dxdy \quad D = \{(x,y) |\ 0 \le x,\ \ 0 \le y \le 1\}}$

$D_n = \{(x,y) |\ 0 \le x \le n,\ \ 0 \le y \le 1\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} e^{-(x+y)}\, dxdy = \int_0^n dx \int_0^1 e^{-(x+y)}\, dy$$

$$= \int_0^n \left[-e^{-(x+y)}\right]_0^1 dx = \int_0^n \left\{-e^{-(x+1)} + e^{-x}\right\} dx$$

$$= \left[e^{-(x+1)} - e^{-x}\right]_0^n = e^{-(n+1)} - e^{-n} - e^{-1} + 1$$

となる。$I_n(D_n) \to 1 - e^{-1} \ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = 1 - e^{-1}}$となる。

(8) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \quad D = \left\{(x,y) \middle| \ \ 0 \le y \le x, \qquad 0 < x^2+y^2 \le 1\right\}}$

$D_n = \left\{(x,y) \middle| \ 0 \le y \le x,\ \frac{1}{n} \le x^2+y^2 \le 1\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n=\left\{(x,y)|\ \frac{1}{n}\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)$$

となる。$I_n(D_n)\to\frac{\sqrt{2}}{4}\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\frac{\sqrt{2}}{4}}$となる。

(9) $\boldsymbol{I=\iint_D\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 0<x,\ \ 0\le y,\ \ x^2+y^2\le 1\}}$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n=\left\{(x,y)|\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy=\int_0^1 r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2$$

となる。$I_n(D_n)\to\frac{\pi^2}{16}\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=\frac{\pi^2}{16}}$となる。

(10) $\boldsymbol{I=\iint_D(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\}}$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n=\{(x,y)|\ 1\le r\le n,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n)=\iint_{D_n}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy=\int_1^n r^{-2}dr\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\left[-\frac{1}{r}\right]_1^n=2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

となる。$I_n(D_n)\to 2\pi\ (n\to\infty)$なので、$\underline{I=2\pi}$となる。

教科書演習 P.158 例題 5.7

次の広義積分を求めよ。

(11) $\boldsymbol{I=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\quad D=\{(x,y)|\ 0\le x,\qquad 0\le y\}}$

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n=\left\{(x,y)|\ 0\le r\le n,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^n re^{-r^2}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^n re^{-r^2}\,dr$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[-e^{-r^2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{\pi}{4}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{\pi}{4}}$となる。

教科書演習 P.158 問題 5.7

次の広義積分を求めよ。

(12) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \quad D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 < 1,\quad 0 \le y\}}$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y)|\ 0 \le r \le \sqrt{1-\frac{1}{n}},\ 0 \le \theta \le \pi\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy = \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \int_0^{\pi} d\theta = \pi\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$
$$= \pi\left[\sqrt{1-r^2}\right]_{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}^0 = \pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to \pi\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \pi}$となる。

(13) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy \quad D = \{(x,y)|\ 0 < x^2+y^2 \le 1\}\ (0 < \alpha < 1)}$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y)|\ \frac{1}{n} \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2\alpha}\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \frac{\pi}{1-\alpha}\left[r^{2+2\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{\pi}{1-\alpha}\left\{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2+2\alpha}\right\}$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{\pi}{1-\alpha}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{\pi}{1-\alpha}}$となる。

教科書演習 P.159 問題 5.8

(14) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{x}{\sqrt[3]{y}} dxdy \quad D = \{(x,y) \mid\ 0 \le x \le 1, \quad 0 < y \le 1\}}$

$D_n = \left\{(x,y) \mid\ 0 \le x \le 1,\ \ \frac{1}{n} \le y \le 1\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{x}{\sqrt[3]{y}} dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{y}} dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{3}{4}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{3}{4}}$となる。

(15) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x - y^2}} dxdy \quad D = \left\{(x,y) \mid\ 0 \le y < \sqrt{x} \le 1\right\}}$

$D_n = \left\{(x,y) \mid\ \frac{1}{n} \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x - y^2}} dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{\sqrt{x - y^2}} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2}} dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right]_0^{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{\pi}{2}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{\pi}{2}}$となる。

教科書演習 P.169 演習問題 5-A. 5

次の広義積分を求めよ。

(16) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{1}{(x + y)^3} dxdy \quad D = \{(x,y) \mid\ 0 \le x, \quad 1 \le y\}}$

$D_n = \{(x,y) \mid\ 0 \le x \le n,\ \ 1 \le y \le n\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{(x + y)^3} dxdy = \int_0^n dx \int_1^n \frac{1}{(x + y)^3} dy = \int_0^n dx \left[-\frac{1}{2}(x + y)^{-2}\right]_1^n$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^n \{(x + 1)^{-2} - (x + n)^{-2}\}\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n + 1}\right)$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{1}{2}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{1}{2}}$となる。

(17) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{xy^4}{1-x^2} dxdy \quad D = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \le 1, \quad 0 \le x < 1\}}$

$D_n = \left\{(x,y) |\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x < \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{xy^4}{1-x^2} dxdy = \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{x}{1-x^2} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy^4}{1-x^2} dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{x}{1-x^2} \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{5}\int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{25}\left[(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = -\frac{2}{25}\left[(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{25}\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{2}{25}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{2}{25}}$となる。

(18) $\boldsymbol{I = \iint_D \frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dxdy \quad D = \{(x,y) |\ 0 \le x \le y, \quad 0 < x^2 + y^2 \le 1\}}$

$D_n = \left\{(x,y) |\ 0 \le x \le y,\ \frac{1}{n} \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$とおくと、$\{D_n\}$は$D$の近似列である。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E_n = \left\{(x,y) |\ \frac{1}{n} \le r \le 1, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$I_n(D_n) = \iint_{D_n} \frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{\frac{4}{3}} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{7} r^{\frac{7}{3}}\right]_{\frac{1}{n}}^1 [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{14}\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{3}}\right\}$$

となる。$I_n(D_n) \to \frac{3\sqrt{2}}{14}\ (n \to \infty)$なので、$\underline{I = \frac{3\sqrt{2}}{14}}$となる。

➢ 3 重積分

教科書 P.167 問 14

変数変換を用いて次の 3 重積分を求めよ。

(1) $\iiint_D z\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ \ 0\le z\right\}\ (a>0)$

$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと

$r\theta\varphi$空間の領域$E=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid\ 0\le r\le a,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz=\iiint_E r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta d\varphi=\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{1}{4}\pi}$$

教科書 P.177 演習問題 5-A. 7.

(2) $\iiint_D (xy+yz+zx)\,dxdydz \quad D=\{(x,y,z)\mid\ 0\le z\ \le y\le x\le 1\}$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y dz\,(xy+yz+zx)=\int_0^1 dx\int_0^x dy\left[xyz+\frac{z^2}{2}(y+x)\right]_0^y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,(y^3+3xy^2)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[\frac{y^4}{4}+xy^3\right]_0^x=\frac{5}{8}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{5}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\underline{\frac{1}{8}}$$

(3) $\iiint_D (x-z)\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid\ 0\le x,\ \ 0\le y,\quad x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$

$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと

$r\theta\varphi$空間の領域$E=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid\ 0\le r\le 2,\ \ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz=\iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi-r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^2 r^3\,dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\theta)d\varphi$$

$$=\int_0^2 r^3\,dr\int_0^{\pi}\left(\sin^2\theta-\frac{\pi}{2}\cos\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\pi}{8}\cos 2\theta\right]_0^{\pi}=4\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{2\pi}$$

(4) $\iiint_D z\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le a^2,\ \ x^2+y^2\le ax,\ \ 0\le z\right\}(a>0)$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$と円筒座標系に変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta z$空間の領域$E=\left\{(r,\theta,z)\mid\ 0\le r\le a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le z\le\sqrt{a^2-r^2}\right\}$と対応する。

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iiint_E zr\,drd\theta dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} (a^2r - r^3)\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{a\cos\theta}$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta - \cos^4\theta)\,d\theta = \frac{a^4}{32}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\cos 2\theta - \cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^4}{64}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (5 + 4\cos 2\theta - \cos 4\theta)\,d\theta = \frac{a^4}{64}\left[5\theta + 2\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{5\pi a^4}{64}}$$

教科書演習 P.162 例題 5.10

(5) $\displaystyle \iiint_D \boldsymbol{x^2\,dxdydz} \quad \boldsymbol{D = \{(x,y,z) \mid\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z,\quad x+y+z \le 1\}}$

$E = \{(x,y) \mid\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1\}$ とすると、$D = \{(x,y) \mid\ (x,y) \in E,\ z \le 1-x-y\}$ とあらわすことができるので、順次

$$\iiint_D x^2\,dxdydz = \iint_E dxdy \int_0^{1-x-y} x^2\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x^2\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2(1-x-y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left\{x^2(1-x) - x^3(1-x) - \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{60}}$$

教科書演習 P.162 問題 5.10

(6) $\displaystyle \iiint_D \boldsymbol{dxdydz} \quad \boldsymbol{D = \{(x,y,z) \mid\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z,\quad x+y+z \le a\}}$

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy\,[z]_0^{a-x-y} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a-x-y)\,dy$$

$$= \int_0^a dx \left[ay - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-(a-x)^3}{3} \right]_0^a = \underline{\frac{a^3}{6}}$$

(7) $\displaystyle \iiint_D \sin(x+2y+3z)\,dxdydz$

$$D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z,\ x+2y+3z \le \pi\}$$

$E = \{(x,y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+2y \le \pi\}$ とすると、

$D = \left\{(x,y) \mid (x,y) \in E,\ 0 \le z \le \frac{\pi-x-2y}{3}\right\}$ とあらわすことができるので、

$$I = \iint_E dxdy \int_0^{\frac{\pi-x-2y}{3}} \sin(x+2y+3z)\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi-x-2y}{3}} \sin(x+2y+3z)\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} dy \left[\frac{-\cos(x+2y+3z)}{3} \right]_0^{\frac{\pi-x-2y}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \{1+\cos(x+2y)\}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} dx \left[y + \frac{\sin(x+2y)}{2} \right]_0^{\frac{\pi-x}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi} dx\,\{\pi - x - \sin x\} = \frac{1}{6}\left[\pi x - \frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi} = \underline{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{3}}$$

教科書演習 P.163 例題 5.11

(8) $\displaystyle \iiint_D x^2\,dxdydz \quad D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta\varphi$空間の領域$E = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_E r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4\,dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{8}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{4}{15}\pi}$$

教科書演習 P.163 例題 5.12

(9) $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, z=z$と円筒座標系に変換すると、$xyz$空間の領域$D$と$r\theta z$空間の領域$E=\{(r,\theta,z)\mid\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le r\}$と対応する。

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint_E r^2\,drd\theta dz=\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r dz$$
$$=2\pi\int_0^1 r^3\,dr=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

教科書演習 P.163 問題 5.11

(10) $\displaystyle\iiint_D ze^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le z\right\}$

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta\varphi$空間の領域$E=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$と対応する。

$$\iiint_D ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\iiint_E r\cos\theta\cdot e^{-r^2}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$=\int_0^1 r^3e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$=2\pi\int_0^1 r^3e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

ここで、rについての積分は$t=r^2$とおくと、$dt=2rdr$

$$\int_0^1 r^3e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}\,dr=\frac{1}{2}\left\{[-te^{-t}]_0^1+\int_0^1 e^{-t}\,dr\right\}=\frac{1}{2}[-te^{-t}-e^{-t}]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$

また、θについての積分は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}[-\cos^2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

よって、

$$I=\ 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{1}{2}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$$

(11) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz \quad D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\right\}$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, z=z$と円筒座標系に変換すると、$xyz$空間の領域$D$と$r\theta z$空間の領域$E=\left\{(r,\theta,z)\mid\ 0\le r\le 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$と対応する。

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iiint_E zr\,drd\theta dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-r^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (4r - r^3)\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta - \cos^4\theta)\,d\theta = 4\left\{2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \underline{\frac{5\pi}{4}}$$

教科書演習 P.169 演習問題 5-A. 6

(12) $\boldsymbol{\iiint_D xyz\,dxdydz \quad D = \{(x,y,z)|\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz\,(xyz) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{8}}$$

(13) $\boldsymbol{\iiint_D y\,dxdydz \quad D = \left\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \ 0 \le y\right\}}$ $(a > 0)$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta\varphi$空間の領域$E = \{(r,\theta,\varphi)|\ 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi\}$と対応する。

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_E r^3 \sin^2\theta \sin\varphi\,drd\theta d\varphi = \int_0^1 r^3\,dr \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\} \cdot [-\cos\varphi]_0^\pi = \underline{\frac{\pi}{4}}$$