第 5 回　多変数関数の積分（1）

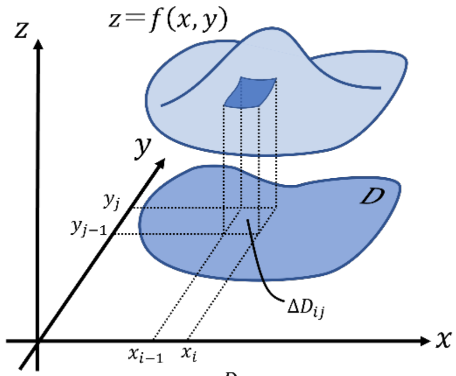
今回のポイント

1. 2 重積分の基本
2. 累次積分
3. 積分順序の交換

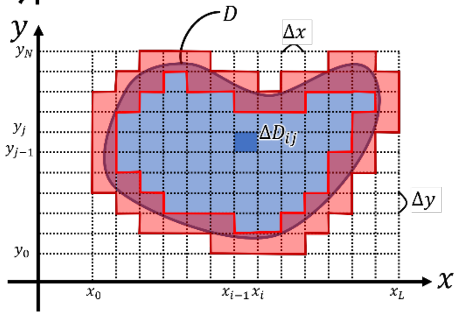
第 5 章　重積分法

5.1　2重積分（$\boxed{\text{教}}$P.146～）

➢ **2重積分の定義**



2重積分のイメージは、
“右上図のように xy 平面上の領域 D についての $z = f(x,y)$ の積分を考える。x_{i-1}からx_iまでとy_{i-1}からyまでで定義される小領域D_{ij} における$z = f(x,y)$ を高さとする角柱の総和をとってこの小領域を無限に小さくした体積”である。



右下図のように xy 平面上の領域 D を

$$x = x_0, \cdots x_{i-1}, x_i, \cdots x_L$$
$$y = y_0, \cdots y_{j-1}, y_j, \cdots y_N$$

で囲んだ$L \times N$個の長方形で区切り、

$$x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$$
$$y_{j-1} \leqq y \leqq y_j$$

でできる長方形をΔD_{ij} とする。その面積 ΔS_{ij} は$\Delta S_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ となる。
ここで、小領域D_{ij} における$z = f(x,y)$ の最大値をM_{ij} 、最小値をm_{ij}とおく
領域D に含まれる小領域ΔD_{ij} の総和をΣ_{small}、領域Dを完全に含む小領域ΔD_{ij} の総和をΣ_{large}とすると、

$$\Sigma_{\text{small}} m_{ij} \cdot \Delta S_{ij} \leqq \Sigma_{\substack{\text{large}\\ \text{or}\\ \text{small}}} f(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta S_{ij} \leqq \Sigma_{\text{large}} M_{ij} \cdot \Delta S_{ij}$$

底面積も高さも最小をとったときの総和

これをリーマン和と呼ぶ

底面積も高さも最大をとったときの総和

ここで、小領域ΔD_{ij}の各一辺$\Delta x, \Delta y$ を 0 に近づけたときに、上式の左右各辺がそれぞれを同じ値V に収束するとき、すなわち、

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Sigma_{\mathrm{small}} m_{ij}\cdot\Delta S_{ij} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Sigma_{\mathrm{large}} M_{ij}\cdot\Delta S_{ij} = V$$

のとき、はさみうちの原理から中辺のリーマン和もV に収束する。

このV を関数$f(x,y)$ の領域D における重積分と定義し、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{または} \quad \iint_D f(x,y)\,dS$$

などと表す。（$dxdy = dS$ を面積要素 とよぶ）

定理 1　重積分の定義

有界閉領域Dにおいて連続かつ有界な関数$z = f(x,y)$にたいして、

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Sigma_{\mathrm{small}} m_{ij}\cdot\Delta S_{ij} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Sigma_{\mathrm{large}} M_{ij}\cdot\Delta S_{ij} = V$$

となるとき、D における$f(x,y)$の 2 重積分は

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dS = V$$

重積分が存在するための条件は、領域 D 内で連続かつ有界であればいい。

重積分の基本性質は

定理 2~4 重積分の基本性質

<線形性>

(1) $$\iint_D \{kf(x,y) \pm hg(x,y)\}\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy \pm h\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

<積分領域の加法性>

(2) $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

<2 重積分の単調性>

(3) 領域D上で$f(x,y) \geq g(x,y)$ ならば、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \geq \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

特に、$f(x,y) \geq 0$ ならば、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$$

<2 重積分の不等式>

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

定理 5 重積分の平均値の定理

Dにおいて$f(x,y)$が連続であれば、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = f(\varepsilon,\eta)|D|$$

となるような点(ε,η)がD 内に存在する

累次積分

具体的な積分の計算をおこなう場合、xとyに順序を付けて積分をおこなう。
これを累次積分という。

定理 6 長方形領域での累次積分

$f(x,y)$が長方形領域
$D=\{(x,y)|\ a\le x\le b,\ \ c\le y\le d\}$において
連続であれば、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

※　x 軸方向とy 軸方向のどちらから積分しても構わない

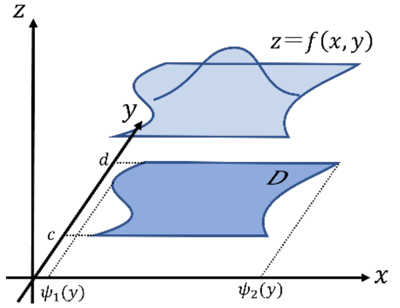
定理 7 縦線形領域での累次積分

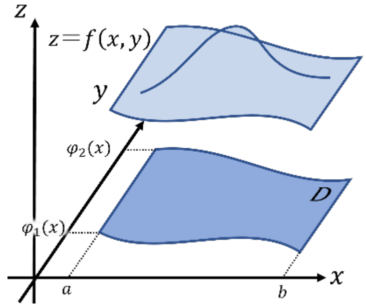
$f(x,y)$が領域$D=\{(x,y)|\ a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$において連続であれば、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$f(x,y)$が領域$D=\{(x,y)|\ c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$において連続であれば、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$





例 3

$D=\{(x,y)|\,1\leq x\leq 2,\ x\leq y\leq 2x\}$ のとき

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy=\int_1^2\left(\int_x^{2x}e^{\frac{y}{x}}\,dy\right)dx$$
$$=\int_1^2\left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_x^{2x}dx=\int_1^2 x(e^2-e)dx=\left[\frac{x^2}{2}(e^2-e)\right]_1^2=\underline{\frac{3}{2}e(e-1)}$$

例 4

3 直線$y=0,\ x-y+1=0,\ x+y-1=0$ で囲まれた閉領域Dとすると、

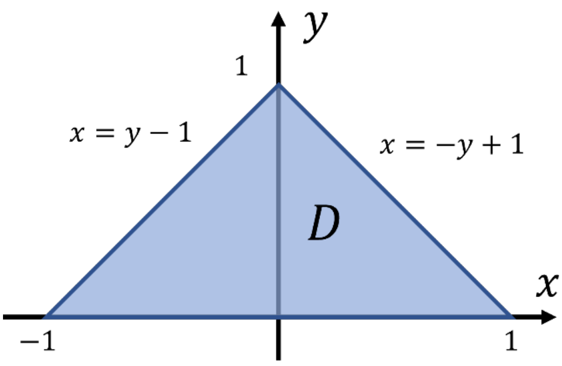
$D=\{(x,y)|\,0\leq y\leq 1,\ y-1\leq x\leq -y+1\}$ と表されるので、

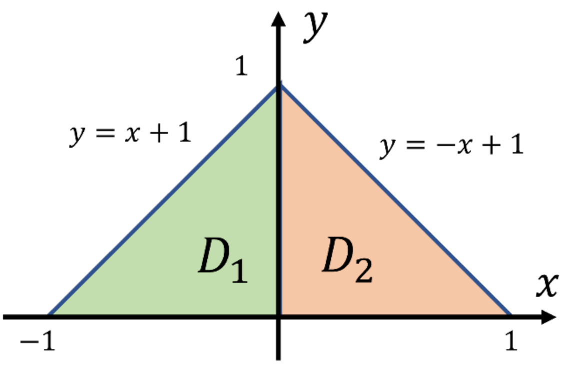
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{-y+1}f(x,y)\,dx$$

とすることもできる（下図左）。また、2 つの領域に分割して、

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1}f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)\,dxdy$$
$$=\int_{-1}^0 dx\int_0^{x+1}f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_0^{-x+1}f(x,y)\,dy$$

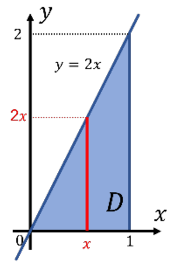
とすることもできる（下図右）。



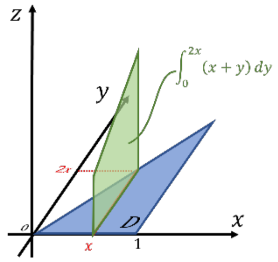


積分順序の交換

$D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\}$ における $x+y$ の重積分Vを求める。

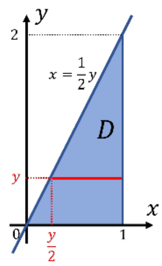


(i)　x を固定して y を先に積分する場合

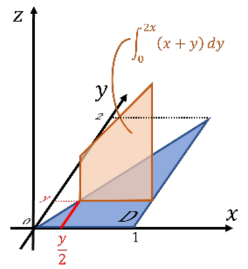


$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (x+y)\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2x} (x+y)\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{(2x)^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 4x^2\,dx = \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

(ii)　y を固定して x を先に積分する場合



$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{\frac{y}{2}}^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{5y^2}{8} + y + \frac{1}{2} \right) dy = \left[-\frac{5y^3}{24} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^2 = \underline{\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$



このように、定理 7 に基づいて 2 通りの累次積分で表すことができるので、積分が煩雑になる場合には適宜順序を交換することができる。

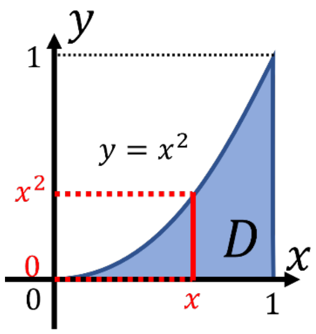
例 5

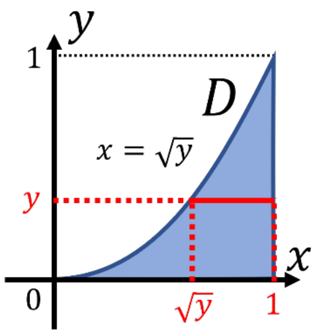
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$$ **の順序を交換してみよう。**

領域 D は x についての縦線形領域と見れば、$D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$であるが、

y についての縦線形領域と見れば、$D=\{(x,y)|\,0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 1\}$であるので、

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx$$





例題 1

$\displaystyle\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$ **の順序を交換してみよう。**

領域 D は下図左のようにとれば、$D = \{(x,y) \mid -1 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le y+2\}$である。

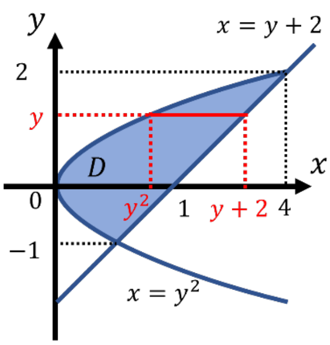
一方、下図右のように取る場合には小閉領域D_1 およびD_1に分かれて、

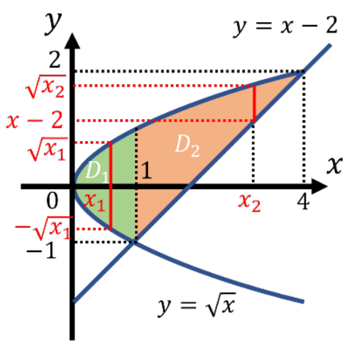
$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\quad -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 1 \le x \le 4,\ \ x-2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

となるので、

$$\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$$



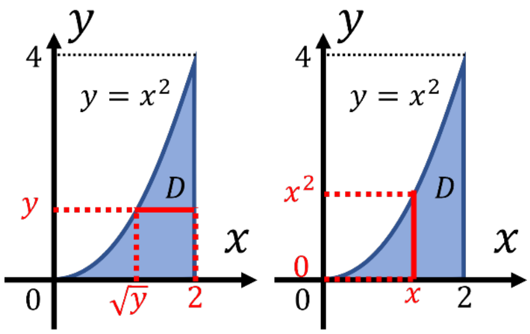


問 6

次の累次積分の積分順序を交換せよ

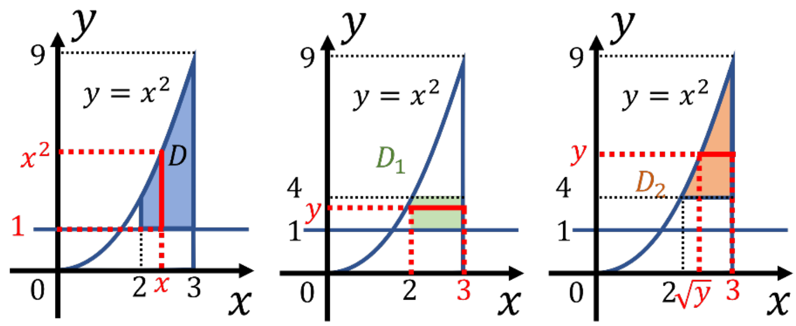
(1) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx$

$$\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$$



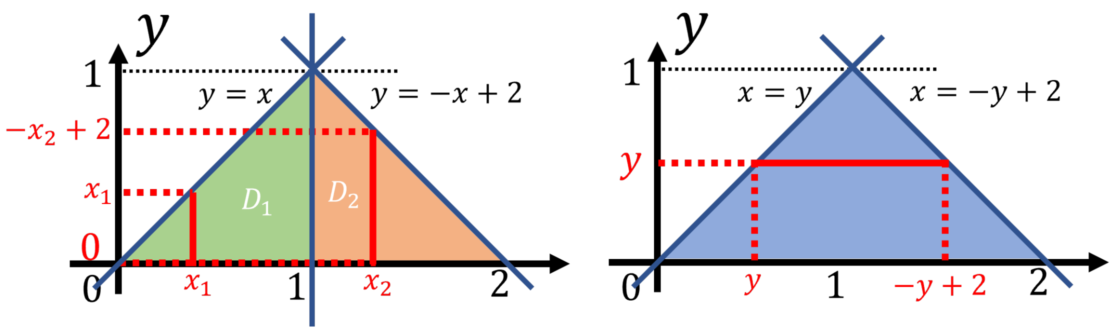
(2) $\displaystyle\int_2^3 dx \int_1^{x^2} f(x,y)\,dy$

$$\int_2^3 dx \int_1^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_1^4 dy \int_2^3 f(x,y)\,dx + \int_4^9 dy \int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)\,dx$$



(3) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{-y+2} f(x,y)\,dx$$



【問題集】

➢ 累次積分

次の二重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\mid y^2\le x\le y+2\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D xy(x-y)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D e^{px+qy}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\}$

(6) $\displaystyle\iint_D \sin(x+2y)\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le x\right\}$

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x\}$

(8) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\}$

(9) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\mid\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$

(10) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\}$

(11) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 3,\quad 1\le y\le x\}$

(12) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-\frac{x^2}{4}\right\}$

(13) $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{x^2} xe^y\,dy$

(14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta \, dr$

(15) $\displaystyle\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} y\cos(x-y)\, dx$

(16) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{2x} e^{\frac{y}{x}}\, dy$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr$

(18) $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1\}$における$f(x,y) = y$の重積分Vを

$\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right\} dx$ の形で求めよ。

(19) $D = \{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1\}$における$f(x,y) = y$の重積分Vを

$\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{h_1(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dy \right\} dx$ の形で求めよ。

次の二重積分をxでの積分とyでの積分の順序を変えて 2 通りに計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)\, dxdy, \qquad D = [0,1]\times[0,2]$

(2) $\displaystyle\iint_D (2x^2+y^2)\, dxdy, \qquad D = [0,1]\times[0,1]$

(3) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\, dxdy, \qquad D = [0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

次の二重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x^3y^2\, dxdy, \qquad D = [0,1]\times[0,1]$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin x\cos y\, dxdy, \qquad D = \left[0,\frac{\pi}{3}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

(3) $\displaystyle\iint_D e^x \sin y\, dxdy, \qquad D = [0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

(4) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad x+y\leq\pi\}$

(5) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\leq y\leq 2-x^2\}$

(6) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1, \quad y\geq 0\}$

積分順序の交換

次の累次積分の積分順序を交換し、その値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 x^2y\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi dx\int_0^x y\cos(x-y)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^1 \sin(\pi y^2)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)\,dy$

(6) $\displaystyle\int_0^a dy\int_y^{2a-y} f(x,y)\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \sqrt{y^2+y}\,dy$

(8) $\displaystyle\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^1 ye^{xy}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_0^2 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$

(10) $\displaystyle\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$

(11) $\displaystyle\int_0^9 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

(12) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$

(14) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

(15) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)\,dy$

(16) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$

(17) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

次の累次積分を積分順序を換えて 2 通りで計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x^3y\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (2x+y)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, \qquad x\le y\le 2x\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (ax+by)\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)|\ y\ge x^2,\ \ x\ge y^2\right\}$

【解答】

➢ 累次積分

教科書 P.153 問 5 (演習に出題)

次の二重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \iint_D xy\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d xy\,dy$$

$$=\int_a^b dx\left[x\frac{y^2}{2}\right]_c^d=\int_a^b x\frac{d^2-c^2}{2}dx=\left[\frac{x^2}{2}\frac{d^2-c^2}{2}\right]_a^b=\underline{\frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}}$$

(2) $\displaystyle \iint_D xy^2\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\left[x\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 x\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}dx$$

ここで$x=\cos\theta$ とおくと、x が $0\to 1$ のとき、θ は$\frac{\pi}{2}\to 0$ で、$dx=-\sin\theta\,d\theta$なので、

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^4\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\left[\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{1}{15}}$$

(3) $\displaystyle \iint_D y\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ y^2\le x\le y+2\}$

$y^2=y+2$ より交点は$y=-1,2$ なので

$$\iint_D y\,dxdy=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} y\,dx$$

$$=\int_{-1}^2 dx\,y[x]_{y^2}^{y+2}=\int_{-1}^2(y^2+2y-y^3)dx=\left[\frac{y^3}{3}+y^2-\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^2=\underline{\frac{9}{4}}$$

教科書 P.176 演習問題 5-A. 1. (演習、レポートに出題)

次の二重積分を求めよ。

(4) $\displaystyle \iint_D xy(x-y)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, \quad 0\le y\le 1\}$

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1 xy(x-y)\,dy$$
$$=\int_0^2\left\{x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1-x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1\right\}dx=\int_0^2\left\{\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right\}dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{6}\right]_0^2=\underline{\frac{2}{3}}$$

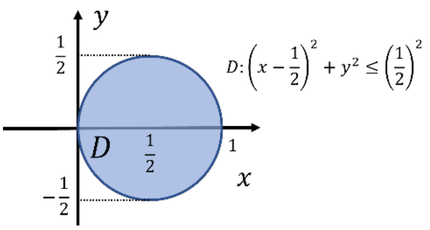
(5) $\displaystyle \iint_D e^{px+qy}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1\}$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 e^{px+qy}\,dy=\int_0^1 dx\left[\frac{1}{q}e^{px+qy}\right]_0^1=\frac{1}{q}\int_0^1\{e^{px+q}-e^{px}\}dx=\frac{1}{pq}[e^{px+q}-e^{px}]_0^1$$
$$=\underline{\frac{1}{pq}(e^p-1)(e^q-1)}$$

(6) $\displaystyle \iint_D \sin(x+2y)\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le x\right\}$

$$\iint_D y\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^x \sin(x+2y)\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\,[\cos(x+2y)]_0^x=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x-\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{2}{3}}$$

(7) $\displaystyle \iint_D \sqrt{x}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x\}$



左図より

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy=\int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx$$

ここで$\sqrt{1-x}=t$ とおくと、x が $0\to 1$ のとき、t は $1\to 0$ で、$dx=-2tdt$なので、

$$=\int_0^1 4t^2(1-t^2)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\underline{\frac{8}{15}}$$

教科書演習 P.152 例題 5.1

次の二重積分を求めよ。

(8) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\,0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\}$

$$\iint_D xy\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1 (x+y)\,dy$$

$$=\int_0^2 x\left\{[y]_0^1+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\right\}dx=\int_0^2\left\{\frac{3}{2}x\right\}dx=\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2=\underline{3}$$

(9) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)|\ \ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$

$$\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy=\int_{-1}^1 dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\underline{\frac{2}{3}}$$

教科書演習 P.152 問題 5.1

次の二重積分を求めよ。

(10) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\,1\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\}$

$$\iint_D xe^y\,dxdy=\int_1^2 dx\int_0^1 xe^y\,dy$$

$$=\int_1^2 x[e^y]_0^1\,dx=(e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\underline{\frac{3}{2}(e-1)}$$

(11) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\,1\le x\le 3,\quad 1\le y\le x\}$

$$\int_1^3 dx\int_1^x y\,dy=\int_1^3 dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^x=\frac{1}{2}\int_1^3(x^2-1)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3=\underline{\frac{10}{3}}$$

(12) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)|\,0\le y\le 1-\frac{x^2}{4}\right\}$

$$\iint_D x\,dxdy=\int_{-2}^2 dx\int_0^{1-\frac{x^2}{4}} x\,dy$$

$$=\int_{-2}^2 dx\,x[y]_0^{1-\frac{x^2}{4}}=\int_{-2}^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_{-2}^2=\underline{0}$$

教科書演習 P.153 例題 5.2

次の累次積分を求めよ。

(13) $$\int_0^a dx \int_0^{x^2} xe^y\,dy = \int_0^a \left\{xe^{x^2} - x\right\} dx = \left[\frac{e^{x^2} - x^2}{2}\right]_0^a = \underline{\frac{e^{a^2} - a^2 - 1}{2}}$$

(14) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{1}{20}}$$

教科書演習 P.153 問題 5.2

次の累次積分を求めよ。

(15) $$\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} y\cos(x-y)\,dx = \int_0^{\pi} y[\sin(x-y)]_y^{\pi}\,dy = \int_0^{\pi} y\sin y\,dy = \int_0^{\pi} y\sin y\,dy$$

$$= [y(-\cos y)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos y)dy = \pi + [\sin y]_0^{\pi} = \underline{\pi}$$

(16) $$\int_0^1 dx \int_x^{2x} e^{\frac{y}{x}}\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} e^{\frac{y}{x}}\,dy = \int_0^1 x\left[e^{\frac{y}{x}}\right]_x^{2x} dx = \int_0^1 x(e^2 - e)dx$$

$$= (e^2 - e)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(e^2 - e)}$$

(17) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+r^2}\right)' dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{1}{1+r^2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{1}{1+\cos 2\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.206 演習問題 26

(18) **$D = \left\{(x,y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1\right\}$における$f(x,y) = y$の重積分Vを**

$$\int_0^1 \left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right\} dx$$ **の形で求めよ。**

$$V = \int_0^1 \left\{\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} y\,dy\right\} dx = \int_0^1 \left\{\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^4 dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-4x^{\frac{3}{2}}+6x-4x^{\frac{1}{2}}+1\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+3x^2-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{5}+3-\frac{8}{3}+1\right)=\underline{\frac{1}{30}}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.207 演習問題 27

(19) $\boldsymbol{D=\{(x,y)|\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1\}}$**における**$\boldsymbol{f(x,y)=y}$ **の重積分Vを**

$$\int_0^1\left\{\int_{h_1(y)}^{h(y)}f(x,y)\,dy\right\}dx$$ **の形で求めよ。**

$$V=\int_0^1\left\{\int_0^{(1-\sqrt{y})^2}y\,dx\right\}dy=\int_0^1 y\left\{[x]_0^{(1-\sqrt{y})^2}\right\}dx=\int_0^1 y\left(1-\sqrt{y}\right)^2dx$$

$$=\int_0^1\left(y^2-2y^{\frac{3}{2}}+y\right)dx=\left[\frac{y^3}{3}-\frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)=\underline{\frac{1}{30}}$$

チャート P.269 例題 126

次の二重積分をxでの積分とyでの積分の順序を変えて 2 通りに計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D(x+y)\,dxdy,\qquad D=[0,1]\times[0,2]$

$$\iint_D(x+y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^2(x+y)\,dy$$

$$=\int_0^1dx\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\int_0^1\{2x+2\}\,dx=[x^2+2x]_0^1=\underline{3}$$

$$\iint_D(x+y)\,dxdy=\int_0^2dy\int_0^1(x+y)\,dx$$

$$=\int_0^2dy\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_0^1=\int_0^2\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\left[\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\underline{3}$$

(2) $\displaystyle\iint_D(2x^2+y^2)\,dxdy,\qquad D=[0,1]\times[0,1]$

$$\iint_D(2x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^1(2x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[2x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \int_0^1 \left\{2x^2 + \frac{1}{3}\right\} dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x}{3}\right]_0^1 = \underline{1}$$

$$\iint_D (2x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 (2x^2 + y^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{2x^3}{3} + y^2 x\right]_0^1 = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + y^2\right) dy = \left[\frac{2y}{3} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \underline{1}$$

(3) $\displaystyle \iint_D \sin(x+y)\, dxdy, \qquad D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\iint_D \sin(x+y)\, dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} dx\, [\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\pi} \{\sin x + \cos x\}\, dx = [-\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \underline{2}$$

$$\iint_D \sin(x+y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\pi} \sin(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy\, [-\cos(x+y)]_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos y + \cos y\}\, dy = 2[\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{2}$$

チャート P.271　例題 127

次の二重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle \iint_D x^3 y^2\, dxdy, \qquad D = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\iint_D x^3 y^2\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 x^3 y^2\, dy$$

$$= \int_0^1 dx\, x^3 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{12}}$$

(2) $\displaystyle \iint_D \sin x \cos y\, dxdy, \qquad D = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\iint_D \sin x \cos y\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos y\, dy$$

$$= [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{1}{4}}$$

(3) $\displaystyle\iint_D e^x \sin y \, dxdy, \qquad D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\iint_D e^x \sin y \, dxdy = \int_0^1 e^x \, dx \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin y \, dy$$
$$= [e^x]_0^1 [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{6}} = \underline{(e-1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}$$

チャート P.272 例題 128

次の二重積分を計算せよ。

(4) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y) \, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq \pi\}$

$$\iint_D \sin(x+y) \, dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} \sin(x+y) \, dy$$
$$= \int_0^{\pi} dx \, [-\cos(x+y)]_0^{\pi-x} = \int_0^{\pi} (1+\cos x) \, dx = [x - \sin x]_0^{\pi} = \underline{\pi}$$

(5) $\displaystyle\iint_D (x+y) \, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x \leq y \leq 2 - x^2\}$

$$\iint_D \sin x \cos y \, dxdy = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (x+y) \, dy$$
$$= \int_{-2}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x^2} dx = \int_{-2}^1 \left\{\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{7x^2}{2} + 2x + 2\right\} dx$$
$$= \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{6} + x^2 + 2x\right]_{-2}^1$$
$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{32}{10} - 4 + \frac{28}{3} + 4 - 4\right)$$
$$= \underline{-\frac{9}{20}}$$

(6) $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}$

$$\iint_D x^2 y \, dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 [x^2 y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2(1-x^2) \, dx$$

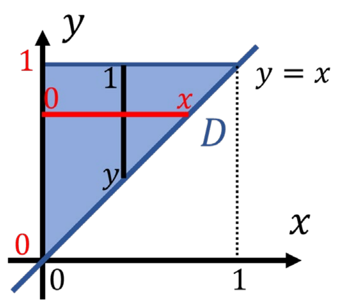
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \underline{\frac{2}{15}}$$

➢ 積分順序の交換

教科書 P.155 問 7 (演習に出題)

次の累次積分の積分順序を交換し、その値を求めよ。

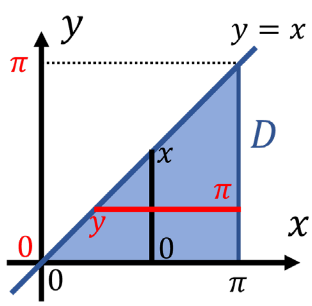
(1) $\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 y\, dx$



$$\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 y\, dx = \underline{\int_0^1 dx \int_0^x x^2 y\, dy}$$

$$= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{10}}$$

(2) $\int_0^\pi dx \int_0^x y\cos(x-y)\, dy$



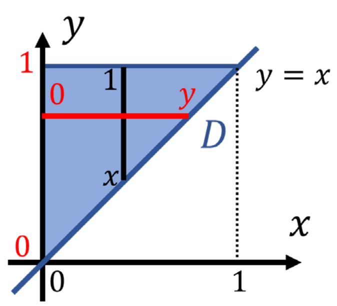
$$\int_0^\pi dx \int_0^x y\cos(x-y)\, dx = \underline{\int_0^\pi dy \int_y^\pi y\cos(x-y)\, dx}$$

$$= \int_0^\pi y[\sin(x-y)]_y^\pi dy = \int_0^\pi y \sin y\, dy$$

$$= [y(-\cos y)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos y) dy$$

$$= \pi + [\sin y]_0^\pi = \underline{\pi}$$

(3) $\int_0^1 dx \int_x^1 \sin(\pi y^2)\, dy$



$$\int_0^1 dx \int_x^1 \sin(\pi y^2)\, dx = \underline{\int_0^1 dy \int_0^y \sin(\pi y^2)\, dx}$$

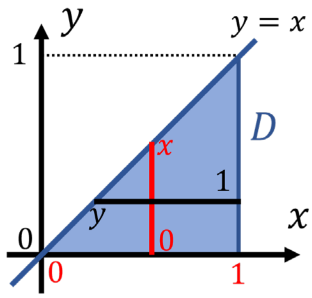
$$= \int_0^1 \sin(\pi y^2)\,[x]_0^y dx = \int_0^1 y\sin(\pi y^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2\pi}\cos(\pi y^2)\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{\pi}}$$

(4) $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx$

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx = \underline{\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy}$$

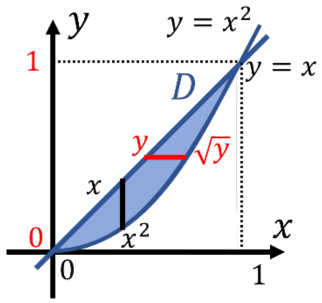
$$= \int_0^1 e^{-x^2}[y]_0^x dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$



教科書 P.176 演習問題 5-A 2（レポートに出題）

(5) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)\,dy$

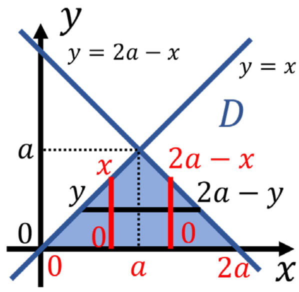
$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)\,dy = \underline{\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx}$$



(6) $\int_0^a dy \int_y^{2a-y} f(x,y)\,dx$

$$\int_0^a dy \int_y^{2a-y} f(x,y)\,dx$$

$$= \underline{\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{2a-x} f(x,y)\,dy}$$

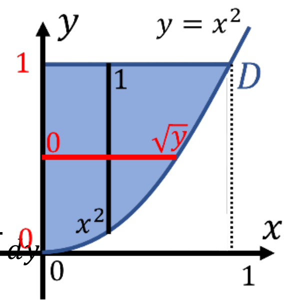


教科書 P.176 演習問題 5-A 4（レポートに出題）

(7) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2+y}\,dy$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2+y}\,dy = \underline{\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y^2+y}\,dx}$$

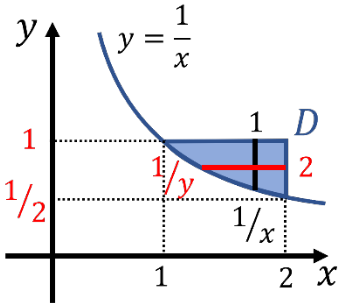
$$= \int_0^1 \sqrt{y^2+y}\,[x]_0^{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^1 y\sqrt{y+1}\,dy$$



ここで$\sqrt{1+y}=t$ とおくと、y が $0\to 1$ のとき、t は $1\to\sqrt{2}$ で、$dy=2tdt$なので、

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2(t^2-1)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \underline{\frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

(8) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{1} ye^{xy}\, dx$



$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{1} ye^{xy}\, dy = \underline{\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} ye^{xy}\, dx}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} [e^{xy}]_{\frac{1}{y}}^{2} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (e^{2y} - e)\, dy = \left[\frac{e^{2y}}{2} - ey\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \underline{\frac{e^2}{2} - e}$$

教科書演習 P.154 例題 5.3

(9) $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy$

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy = \underline{\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\, dx}$$

(10) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx$

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx = \underline{\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy + \int_2^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy}$$

教科書演習 P.154 問題 5.3

(11) $\int_0^9 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy$

$$\int_0^9 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy = \underline{\int_0^3 dy \int_{y^2}^{9} f(x,y)\, dx}$$

(12) $\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)\, dx$

$$\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)\, dx = \underline{\int_{-2}^{0} dy \int_{-y}^{2} f(x,y)\, dx + \int_0^2 dy \int_y^2 f(x,y)\, dx}$$

教科書演習 P.154 問題 5.4

(13) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \underline{\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}[x]_0^y\,dy = \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = -\frac{1}{3}\left[(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$$

(14) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \underline{\int_0^1 dx \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}\,dy}$$

$$= \int_0^1 xe^{\frac{x^2}{2}}\,dy = \left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = \underline{\sqrt{e}-1}$$

チャート P.275 例題 130

(15) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)\,dy$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)\,dy = \underline{\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 f(x,y)\,dx}$$

(16) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)\,dy$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)\,dy = \underline{\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx}$$

(17) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \underline{\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}} f(x,y)\,dy}$$

チャート P.276 例題 131

次の累次積分を積分順序を換えて 2 通りで計算せよ。

(1) $\displaystyle \iint_D \boldsymbol{x^3 y\, dxdy}, \qquad \boldsymbol{D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x\}}$

$$\int_0^1 dx \int_0^x x^3 y\, dy = \int_0^1 \left[x^3 \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\, dx = \underline{\frac{1}{12}}$$

$$\int_0^1 dy \int_y^1 x^3 y\, dx = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} y\right]_y^1 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (y - y^5)\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{12}}$$

(2) $\displaystyle \iint_D \boldsymbol{(2x + y)\, dxdy}, \qquad \boldsymbol{D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x\}}$

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x + y)\, dy = \int_0^1 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx = \frac{7}{2}\int_0^1 x^2\, dx = \underline{\frac{7}{6}}$$

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} (2x + y)\, dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{1} (2x + y)\, dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 + xy]_{\frac{y}{2}}^{y}\, dx + \int_1^2 [x^2 + xy]_{\frac{y}{2}}^{1}\, dx = \frac{5}{4}\int_0^1 y^2\, dx - \frac{1}{4}\int_1^2 (3y^2 - 4y - 4)\, dx$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4}[y^3 - 2y^2 - 4y]_1^2 = \underline{\frac{7}{6}}$$

(3) $\displaystyle \iint_D \boldsymbol{(ax + by)\, dxdy}, \qquad \boldsymbol{D = \left\{(x,y) \mid y \ge x^2,\ \ x \ge y^2\right\}}$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (ax + by)\, dy = \int_0^1 \left[axy + b\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left\{ax^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}bx - ax^3 - b\frac{x^4}{2}\right\} dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}bx^2 - \frac{1}{4}ax^4 - b\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \underline{\frac{3}{20}(a + b)}$$

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (ax + by)\, dx = \int_0^1 \left[a\frac{x^2}{2} + bxy\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}ay + by^{\frac{3}{2}} - a\frac{y^4}{2} - by^3\right\} dy$$

$$= \left[\frac{1}{4}ay^2 + \frac{2}{5}by^{\frac{5}{2}} - a\frac{y^5}{10} - \frac{1}{4}by^4\right]_0^1 = \underline{\frac{3}{20}(a + b)}$$