

第4回 多変数関数の微分(4)

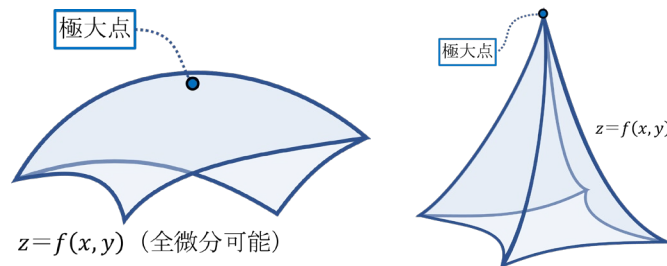
今回のポイント

1. 極値、陰関数の極値
2. 条件付き極値問題(ラグランジュの未定乗数法)

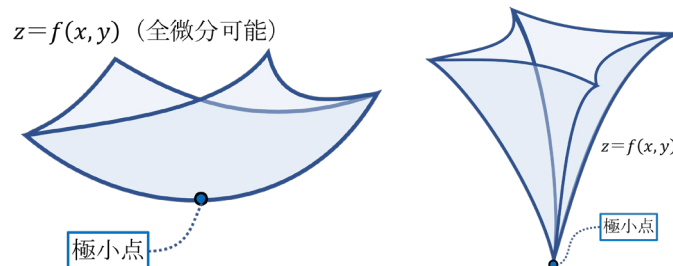
4.5 偏微分の応用 (教 P.138~)

➤ 極値

関数 $f(x, y)$ が点 $A(a, b)$ の近傍で定義されているとする。 A 以外の近傍すべての点に対して $f(x, y) < f(a, b)$ となるとき、 (a, b) で“極大である”、 $f(a, b)$ を極大値、 $(a, b, f(a, b))$ を極大点という。



$f(x, y) > f(a, b)$ となるとき、 (a, b) で“極小である”、 $f(a, b)$ を極小値、 $(a, b, f(a, b))$ を極小点という。

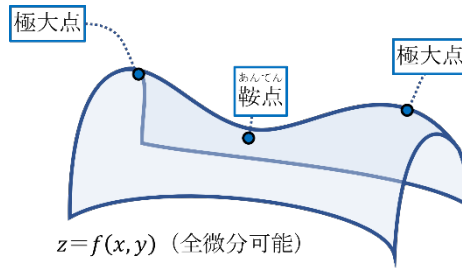


等号を含めた場合を**広義の極値**という。

全微分可能な2変数関数 $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとるならば、

$$f_x(a, b) = 0 \text{ かつ } f_y(a, b) = 0 \quad (\text{極値の必要条件})$$

であるが、この逆は成り立たない。たとえこの条件が成り立っていても極大値にも極小値にもならない点(鞍点:あんてん)が存在する。



そのために、2階の偏微分を考慮して調べる必要がある。

極値の必要条件

$$f_x(a, b) = 0 \text{ かつ } f_y(a, b) = 0$$

極値の十分条件

$$f_{xx}(a, b) = A, \quad f_{xy}(a, b) = B, \quad f_{yy}(a, b) = C$$

としたとき、

- (I) $B^2 - AC < 0$ のとき、
 - (i) $A < 0$ ならば、 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極大となる
 - (ii) $A > 0$ ならば、 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極小となる
- (II) $B^2 - AC > 0$ のとき、 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極値をとらない
- (III) $B^2 - AC = 0$ のとき、これだけでは極値を取るか判断できない

証明

点 $(a + h, b + k)$ のまわりでテイラー展開すると、

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b)$$

$a + h = x$
 $b + k = y$ とおく。

必要条件より $= 0$
左辺に移項

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left\{ h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} f(a, b)$$

$$= \frac{1}{2} (h^2 A + 2hk B + k^2 C)$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(a, b) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) = A, \\ f_{xy}(a, b) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a, b) = B, \\ f_{yy}(a, b) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a, b) = C \quad \text{とおく} \end{aligned}$$

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{k^2}{2} \left\{ A \left(\frac{h}{k} \right)^2 + 2B \left(\frac{h}{k} \right) + C \right\}$$

$\left(\frac{h}{k}\right)$ を X , 左辺を $Y = g(X)$ とおくと、

$$Y = g(X) = \frac{k^2}{2} \{AX^2 + 2BX + C\}$$

とおける。

判別式 $B^2 - AC$ で場合分けすると、

(I) $B^2 - AC < 0$

(i) かつ $A < 0$ ならば、

$$Y = g(X) < 0 \text{ なので、} f(x, y) - f(a, b) < 0$$

$$f(a, b) > f(x, y)$$

となり、 $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極大となる

(ii) かつ $A > 0$ ならば、

$$Y = g(X) > 0 \text{ なので、} f(x, y) - f(a, b) > 0$$

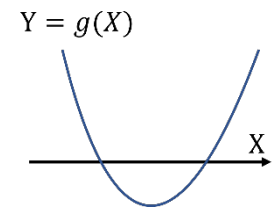
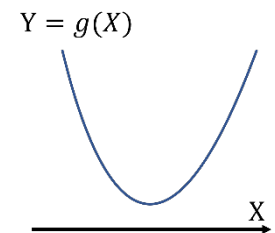
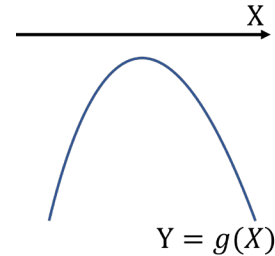
$$f(a, b) < f(x, y)$$

$z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極小となる

(II) $B^2 - AC > 0$ のとき、

$Y = g(X)$ は符号が変わるので $z = f(x, y)$ は点 (a, b) で極値をとらない

(III) $B^2 - AC = 0$ のとき、これだけでは極値を取るか判断できない



例 20

$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ。

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y(x, y) = -3x + 3y^2 = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{xy}(x, y) = -3$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (-3)^2 - 0 \cdot 0 = 9 > 0$ なので $(0, 0)$ は極値ではない

$(x, y) = (1, 1)$ のとき、判別式 $D = (-3)^2 - 6 \cdot 6 = -27 < 0$ であり、 $A > 0$ なので

$f(1, 1) = -1$ は極小値である。

例

$f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^3 + 5$ の極値を求めよ。

$$f_x(x, y) = 6x - 6y = 0$$

$$\begin{aligned}x - y &= 0 \\f_y(x, y) &= -6x + 3y^2 = 0 \\y^2 - 2x &= 0\end{aligned}$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (2, 2)$ である。

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= 6 \\f_{xy}(x, y) &= -6 \\f_{yy}(x, y) &= 6y\end{aligned}$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (-6)^2 - 6 \cdot 0 = 36 > 0$ なので $(0, 0)$ は極値ではない
 $(x, y) = (2, 2)$ のとき、判別式 $D = (-6)^2 - 6 \cdot 12 = -36 < 0$ であり、 $A > 0$ なので
 $f(2, 2) = 1$ は極小値である。

➤ 陰関数の極値

陰関数の存在定理より、 $F(x, y) = 0, F_x(x, y) \neq 0$ のとき、陰関数 $y = f(x)$ が定まる。

$F(x, y)$ が C^2 級であるとき

陰関数の極値の必要条件

$$F(a, b) = 0 \text{ かつ } F_x(a, b) = 0$$

極値の十分条件

$$\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} > 0 \text{ ならば、} x = a \text{ で } y = f(x) \text{ は極大値 } b \text{ をとる}$$

$$\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} < 0 \text{ ならば、} x = a \text{ で } y = f(x) \text{ は極小値 } b \text{ をとる}$$

証明

存在定理より、 $F(x, y) = 0, F_y(x, y) \neq 0$ のとき、陰関数 $y = f(x)$ が定まる。

$F(x, y)$ が C^2 級であるとき、 $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つので、両辺を x で微分すると、

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)f'(x) = 0 \quad \dots (1)$$

さらにもう一度微分をすると、

$$\left(F_{xx}(x, y) + F_{xy}(x, y)f'(x) \right) + \left\{ \left(F_{yx}(x, f(x)) + F_{yy}(x, y)f'(x) \right) f'(x) + F_y(x, y)f''(x) \right\} = 0$$

... (2)

ここで、 $y = f(x)$ が、 $x = a$ において極値 $b = f(a)$ をもつとすると、
 $f'(a) = 0$ であることから(1)式から

$$F_x(a, b) = 0$$

となる。また、(2)式は、

$$F_{xx}(a, b) + F_y(x, y)f''(a) = 0$$

となり、

$$\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} > 0 \text{ ならば、 } f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(x, y)} < 0$$

より、 $x = a$ で $y = f(x)$ は極大値 b をとる。逆も同じ。

例題 6

$F(x, y) = x^4 + 3x^2 + y^3 - y = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ

必要条件より、

$$F(x, y) = x^4 + 3x^2 + y^3 - y = 0,$$

$$F_x(x, y) = 4x^3 + 6x = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2 + 6$$

$$F_y(x, y) = 3y^2 - 1 = 0$$

より、 $(x, y) = (0, 0)$ で

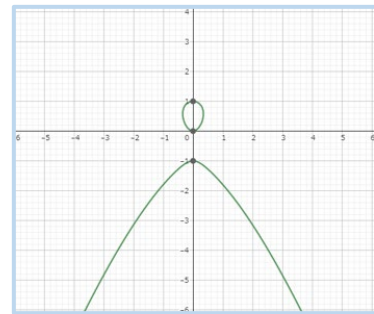
$$\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} = \frac{6}{-1} = -6 < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で極小値 $y = 0$ をもつ

また、 $(x, y) = (0, \pm 1)$ で

$$\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} = \frac{6}{2} = 3 > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で極大値 $y = \pm 1$ をもつ



➤ 条件付極値問題 (ラグランジュの未定乗数法)

変数 x と y が条件 $g(x, y) = 0$ を満たしながら動くとき、関数 $z = f(x, y)$ の極値を求める。

$z = f(x, y)$ の両辺を x で微分すると、

$$\frac{dz}{dx} = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$g(x, y) = 0$ も同様に両辺を x で微分すると、

$$g_x(x, y) + g_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

よって、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$

これを z の x 微分に代入して

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot \left\{ -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \right\} \\ \frac{dz}{dx} &= f_x(x,y) - \frac{f_y(x,y) \cdot g_x(x,y)}{g_y(x,y)}\end{aligned}$$

ここで、 $g(x,y) = 0$ 上の点 $(x,y) = (a,b)$ においてこの曲線が極値をもつとすると、 $\frac{dz}{dx} = 0$ で

あるから、

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= f_x(a,b) - \frac{f_y(a,b) \cdot g_x(a,b)}{g_y(a,b)} = 0 \\ f_x(a,b) &= \frac{f_y(a,b) \cdot g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\end{aligned}$$

$g_x(a,b) \neq 0$ のとき、両辺を $g_x(a,b)$ で割ると、

$$\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} \equiv \lambda$$

これを未定乗数 λ とおくと、

$$\begin{aligned}f_x(a,b) &= \lambda g_x(a,b) \\ f_y(a,b) &= \lambda g_y(a,b)\end{aligned}$$

また、 (a,b) は $g(x,y) = 0$ 上の点なので、 $g(a,b) = 0$ である

ラグランジュの未定乗数法

$f(x,y), g(x,y)$ は C^1 級であるとする。

条件 $g(x,y) = 0$ のもとで関数 $z = f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとり、

$g_x(a,b) g_y(a,b)$ のうち少なくとも一方が 0 でないならば、

ある定数 λ に対して次式が成り立つ

$$\begin{cases} f_x(a,b) = \lambda g_x(a,b) \\ f_y(a,b) = \lambda g_y(a,b) \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$$

注意: $g(x,y) = 0$ が特異点をもたないときは上の 3 式を満たす (a,b) を求めればよいが、特異点をもつときには、 (a,b) 以外に特異点も候補となる。

例 21

条件 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ のもとで $f(x,y) = xy$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x, \quad g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y$$

であるから、ラグランジュの未定乗数法より

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ である。

このとき、

$$f(1, 1) = 1, \quad f(1, -1) = -1, \quad f(-1, 1) = -1, \quad f(-1, -1) = 1,$$

である。よって、

$f(x, y)$ は、 $(1, 1)$ および $(-1, -1)$ で極大値 1、

$f(x, y)$ は、 $(1, -1)$ および $(-1, 1)$ で極小値 -1 をとる

例 22

条件 $g(x, y) = x^3 - y^2 = 0$ のもとで $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は $(0, 0)$ に特異点を持つ。

$$f_x(x, y) = 2x + 2, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = 3x^2, \quad g_y(x, y) = -2y$$

より、

$$\begin{cases} 2x + 2 = 3\lambda x^2 \\ 2y = 2\lambda y \\ x^3 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{2x + 2}{3x^2} = \frac{y}{-2y} \\ g(x, y) = x^3 + y^2 = 0 \end{cases}$$

となるが、これを満たす (a, b) は存在しないため、極値をもつ可能性があるのは、 $g(x, y) = 0$ の特異点である $(0, 0)$ のみである。

このとき、 $f(0, 0) = 1$ であり、 $f(1, 1) = 5 > 1$ なので、

$f(x, y)$ は、 $(0, 0)$ で極小値 (最小値) 1 をとる。

【問題集】

➤ 極値の判別式

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

(2) $f(x, y) = xy(2 - x - y)$

(3) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 + 1)$

(4) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$

(5) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y + 1$

(6) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 4y^2$

(7) $f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3 + 1$

(8) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2) \quad (a > b > 0)$

(9) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x + y + 3$

(10) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(11) $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$

(12) $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$

(13) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

(14) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi)$

(15) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - y。$

➤ 陰関数の極値

次の関係式で定まる陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(1) $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$

(2) $F(x, y) = xy(y - x) - 16 = 0$

(3) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$

(4) $F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0$

(5) $F(x, y) = x^3 - xy - y^2 = 0$

(6) $F(x, y) = x^4 - 2y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$

(7) $F(x, y) = x^2 - xy + 2x + y^2 - y - 2 = 0$

(8) $F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 = 0$

(9) $F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$

(10) $F(x, y) = xy(y - x) - 2a^3$

$$(11) F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0$$

➤ 条件付き極値問題(ラグランジュの未定乗数法)

- (1) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + y$ の極値を求めよ。
- (2) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。
- (3) 条件 $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。
- (4) 条件 $g(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。
- (5) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値を求めよ。
- (6) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = 3x^2 + xy + y^2$ の極値を求めよ。
- (7) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。
- (8) 条件 $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。
- (9) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + y$ の極値を求めよ。
- (10) 条件 $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。
- (11) 条件 $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。
- (12) 条件 $g(x, y) = 2xy^2 + x^2y - 8 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。
- (13) Lagrange の未定乗数法により、条件 $x + y + z = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) のとき、 $f(x, y, z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$ の最大値を求めよ。

➤ 物理数学としての問題

- (1) 3変数 x, y, z の間に $F(x, y, z) = 0$ の関係があるとき、各変数は他の2変数の陰関数 $x(y, z), y(z, x), z(x, y)$ となる。このとき、次式となることを示せ。

$$\frac{\partial x(y, z)}{\partial y} \frac{\partial y(y, z)}{\partial z} \frac{\partial z(y, z)}{\partial x} = -1$$

【解答】

➤ 極値の判別式

教科書 P.139 問 26 (演習に出題)

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

$$f_x(x, y) = 2x - y + 2y - 4 = 0$$

$$2x - y = 4$$

$$f_y(x, y) = -x + 2y - 1 = 0$$

$$2y - x = 1$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (3, 2)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = -1$$

$$f_{yy}(x, y) = 2$$

より、

 $(x, y) = (3, 2)$ のとき、判別式 $D = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(3, 2) = -7$ は極小値である。

(2) $f(x, y) = xy(2 - x - y)$

$$f_x(x, y) = 2y - 2xy - y^2 = 0$$

$$f_y(x, y) = 2x - x^2 - 2xy = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (2, 0), (0, 2), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = -2y$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 - 2x + 2y$$

$$f_{yy}(x, y) = -2x$$

より、

 $(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (2)^2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ なので $(0, 0)$ は極値ではない $(x, y) = (2, 0)$ のとき、判別式 $D = (-2)^2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ なので $(2, 0)$ は極値ではない $(x, y) = (0, 2)$ のとき、判別式 $D = (-2)^2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$ なので $(0, 2)$ は極値ではない $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ のとき、判別式 $D = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} < 0$ であり、 $A < 0$ なので $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$ は極大値である。

(3) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 + 1)$

$$f_x(x, y) = 3x^2y + y^3 + y = 0$$

$$f_y(x, y) = 3xy^2 + x^3 + x = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0)$, である。

$$f_{xx}(x, y) = 6xy$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 1$$

$$f_{yy}(x, y) = 6xy$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (1)^2 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$ なので $(0, 0)$ は極値ではない

$$(4) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$$

$$f_x(x, y) = (x^2 + 2x + y^2)e^{x-y} = 0$$

$$f_y(x, y) = (-x^2 + 2y - y^2)e^{x-y} = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (-1, 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = (x^2 + 4x + y^2 + 2)e^{x-y}$$

$$f_{xy}(x, y) = (-x^2 - 2x + 2y - y^2)e^{x-y}$$

$$f_{yy}(x, y) = (x^2 - 4y + y^2 + 2)e^{x-y}$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (0)^2 - 2 \cdot 2 = -4 < 0$ であり、 $A > 0$ なので

$f(0, 0) = 0$ は極小値である。

$(x, y) = (-1, 1)$ のとき、判別式 $D = (2e^{-2})^2 - (0) \cdot (0) = 4e^{-4} > 0$ なので $(-1, 1)$ は極値ではない

$$(5) \quad f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y + 1$$

$$f_x(x, y) = 2x + 4y - 6 = 0$$

$$x + 2y = 3$$

$$f_y(x, y) = 4x + 4y - 8 = 0$$

$$x + y = 2$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (1, 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 4$$

より、

$(x, y) = (1, 1)$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 2 \cdot 4 = 8 > 0$ なので $(1, 1)$ は極値ではない

教科書 P.145 演習問題 4-A 13 (レポートに出題)

次の関数の極値を求めよ。

$$(6) \quad f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 4y^2$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$f_y(x, y) = -8y = 0$$

$$y = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (2, 0)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = -8$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (0)^2 - (-6) \cdot (-8) = -48 < 0$ であり、 $A < 0$ なので $f(0, 0) = 0$ は極大値である。

$(x, y) = (2, 0)$ のとき、判別式 $D = (0)^2 - 6 \cdot (-8) = 48 > 0$ なので $(2, 0)$ は極値ではない

$$(7) \quad f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3 + 1$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 9y = 0$$

$$x^2 = 3y$$

$$f_y(x, y) = -9x + 3y^2 = 0$$

$$y^2 = 3x$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{xy}(x, y) = -9$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (-9)^2 - 0 \cdot 0 = 81 > 0$ なので $(0, 0)$ は極値ではない

$(x, y) = (3, 3)$ のとき、判別式 $D = (-9)^2 - (18) \cdot (18) = -243 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(3, 3) = -26$ は極小値である。

$$(8) \quad f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2) \quad (a > b > 0)$$

$$f_x(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2 - a) = 0$$

$$f_y(x, y) = -2ye^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2 - b) = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = -2e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2 - a - 2ax^4 - 2bx^2y^2 + 4ax^2)$$

$$f_{xy}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2 - a - b)$$

$$f_{yy}(x, y) = -2e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2 - b - 2by^4 - 2ax^2y^2 + 4by^2)$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (0)^2 - 2a \cdot 2b = -4ab < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(0, 0) = 0$ は極小値である。

$(x, y) = (\pm 1, 0)$ のとき、判別式 $D = \{0\}^2 - \left\{\frac{-4a}{e}\right\} \cdot \left\{\frac{-2(a-b)}{e}\right\} = -\frac{8a(a-b)}{e^2} < 0$ であり、 $A < 0$ なので $f(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$ は極大値である。

$(x, y) = (0, \pm 1)$ のとき、判別式 $D = \{0\}^2 - \left\{\frac{-2(b-a)}{e}\right\} \cdot \left\{\frac{-4b}{e}\right\} = -\frac{8b(b-a)}{e^2} > 0$ なので $(0, \pm 1)$ は極値ではない

教科書演習 P.142 例題 4.18

次の関数の極値を求めよ。

$$(9) \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x + y + 3$$

$$f_x(x, y) = 2x + y - 4 = 0$$

$$f_y(x, y) = x + 2y + 1 = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (3, -2)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

$$f_{yy}(x, y) = 2$$

より、

$(x, y) = (3, -2)$ のとき、判別式 $D = (1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(3, -2) = -4$ は極小値である。

$$(10) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0$$

$$x^3 - x + y = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

$$y^3 + x - y = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{xy}(x, y) = 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - (-4) \cdot (-4) = 0$ となり、判別式では判別できない。しかし、 $f(0, 0) = 0$ であるのに対して、 $f(0, y) = y^4 - 2y^2 = y^2(y^2 - 2)$ は y が 0 に近いときは負となる。一方で、 $f(x, x) = 2x^4 > 0 = f(0, 0)$ であるから極値とはならない。

$(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 20 \cdot 20 = -384 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ は極小値である。

$(x, y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 20 \cdot 20 = -384 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ は極小値である。

教科書演習 P.142 問題 4.18

次の関数の極値を求めよ。

(11) $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - y = 0$$

$$f_y(x, y) = -x + 3y^2 = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{xy}(x, y) = -1$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (-1)^2 - 0 \cdot 0 > 0$ であり極値とならない。

$(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき、判別式 $D = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$ であり、 $A > 0$ なので

$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$ は極小値である。

(12) $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}y - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{y^2} = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (2, 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = \frac{4}{x^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2}{y^3}$$

より、

$(x, y) = (2, 1)$ のとき、判別式 $D = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}) \cdot (2) = -\frac{3}{4} < 0$ であり、 $A > 0$ なので

$f(2, 1) = 3$ は極小値である。

$$(13) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$$

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4y = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4x = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (1, -1), (-1, 1)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2$$

より、

$(x, y) = (0, 0)$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 0 \cdot 0 > 0$ となり、極値とはならない。

$(x, y) = (1, -1)$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 12 \cdot 12 = -128 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(1, -1) = -2$ は極小値である。

$(x, y) = (-1, 1)$ のとき、判別式 $D = (4)^2 - 12 \cdot 12 = -128 < 0$ であり、 $A > 0$ なので $f(-1, 1) = -2$ は極小値である。

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.194 演習問題 24

$$(14) \quad f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi)$$

$$f_x(x, y) = \cos x - \cos(x + y) = 0$$

$$f_y(x, y) = \cos y - \cos(x + y) = 0$$

より、

$$\cos x = \cos y$$

$$\cos x = \cos(x + y)$$

であるから、定義域より、 $x = y$ となる。第 2 式に代入すると

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\cos x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, 1$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \quad (0 < x < \pi \text{ より})$$

よって、極値となりうるのは、 $(x, y) = (\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ である。

$$f_{xx}(x, y) = -\sin x + \sin(x + y)$$

$$f_{xy}(x, y) = \sin(x + y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -\sin y + \sin(x + y)$$

より、

$(x, y) = (\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ のとき、判別式 $D = (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) < 0$ であり、 $A < 0$ なので $f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ は極大値である。

チャート P.233 基本例題 116

(15) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - y$ の極値を調べよ。

$$f_x(x, y) = 2x - y + 1 = 0$$

$$f_y(x, y) = -x + 2y - 1 = 0$$

より、極値となりうるのは、 $(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である。

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = -1$$

$$f_{yy}(x, y) = 2$$

より、

$(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき、判別式 $D = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$ であり、 $A > 0$ なので

$f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$ は極小値である。

➤ 陰関数の極値

教科書 P.141 問 27 (レポートに出題)

次の関係式で定まる陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

$$(1) F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 2x - y = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (\pm 1, \pm 2)$ である。

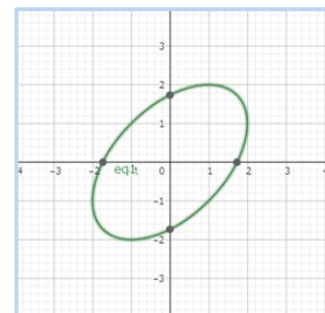
$$F_{xx}(x, y) = 2$$

$$F_y(x, y) = -x + 2y$$

より、 $(x, y) = (1, 2)$ で

$$\frac{F_{xx}(1, 2)}{F_y(1, 2)} = \frac{2}{3} > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $y = 2$ をもつ



また、 $(x, y) = (-1, -2)$ で

$$\frac{F_{xx}(-1, -2)}{F_y(-1, -2)} = \frac{2}{-3} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $y = -2$ をもつ

$$(2) F(x, y) = xy(y - x) - 16 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = xy(y - x) - 16 = 0,$$

$$F_x(x, y) = y^2 - 2xy = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (2, 4)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = -2y$$

$$F_y(x, y) = 2xy - x^2$$

より、 $(x, y) = (2, 4)$ で

$$\frac{F_{xx}(2, 4)}{F_y(2, 4)} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $y = 4$ をもつ

$$(3) F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0$$

$$y = x^2$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), \left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\right)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 6x$$

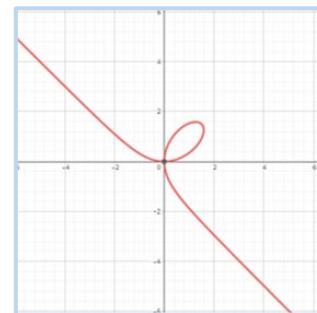
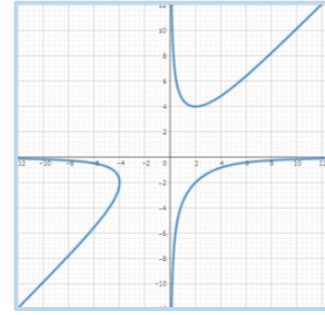
$$F_y(x, y) = -3x + 3y^2$$

より、 $(x, y) = (0, 0)$ では $F_y(x, y) = 0$ となり、陰関数 $y = f(x)$ は定まらない

また、 $(x, y) = \left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\right)$ では、

$$\frac{F_{xx}\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\right)}{F_y\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 2 > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 2^{\frac{1}{3}}$ で極大値 $y = 2^{\frac{2}{3}}$ をもつ



$$(4) F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2$$

$$F_y(x, y) = -4x + 6y$$

より、 $(x, y) = (1, 1)$ で

$$\frac{F_{xx}(1, 1)}{F_y(1, 1)} = \frac{12}{2} > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $y = 1$ をもつ

また、 $(x, y) = (-1, -1)$ で

$$\frac{F_{xx}(-1, -1)}{F_y(-1, -1)} = \frac{12}{-2} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $y = -1$ をもつ

$$(5) F(x, y) = x^3 - xy - y^2 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^3 - xy - y^2 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 3x^2 - y = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{27}\right)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 6x$$

$$F_y(x, y) = -x - 2y$$

より、 $(x, y) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{27}\right)$ で

$$\frac{F_{xx}\left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{27}\right)}{F_y\left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{27}\right)} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{27}} = 18 > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -\frac{2}{9}$ で極大値 $y = \frac{4}{27}$ をもつ

$$(6) F(x, y) = x^4 - 2y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^4 - 2y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 4x^3 - 4x = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, -1), (0, \frac{1}{2}), (\pm 1, 0), (\pm 1, -\frac{3}{2})$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$F_y(x, y) = -6y^2 - 6y$$

より、 $(x, y) = (0, -1)$ では $F_y(x, y) = 0$ となり、陰関数 $y = f(x)$ は定まらない

$(x, y) = (0, \frac{1}{2})$ で

$$\frac{F_{xx}(0, \frac{1}{2})}{F_y(0, \frac{1}{2})} = \frac{-4}{-\frac{9}{2}} > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で極大値 $y = \frac{1}{2}$ をもつ

$(x, y) = (\pm 1, 0)$ で $F_y(x, y) = 0$ となり、陰関数 $y = f(x)$ は定まらない

$(x, y) = (\pm 1, -\frac{3}{2})$ では、

$$\frac{F_{xx}(1, -\frac{3}{2})}{F_y(1, -\frac{3}{2})} = \frac{8}{-\frac{9}{2}} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = \pm 1$ で極小値 $y = -\frac{3}{2}$ をもつ

教科書演習 P.143 例題 4.19

$$(7) F(x, y) = x^2 - xy + 2x + y^2 - y - 2 = 0$$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^2 - xy + 2x + y^2 - y - 2 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 2x - y + 2 = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 2), (-2, -2)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 2$$

$$F_y(x, y) = -x + 2y - 1$$

より、 $(x, y) = (0, 2)$ で

$$\frac{F_{xx}(0, 2)}{F_y(0, 2)} = \frac{2}{3} > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で極小値 $y = 2$ をもつ

また、 $(x, y) = (-2, -2)$ で

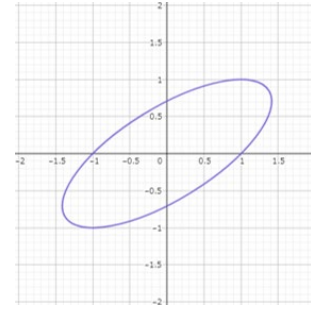
$$\frac{F_{xx}(-2, -2)}{F_y(-2, -2)} = -\frac{2}{3} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -2$ で極小値 $y = -2$ をもつ

$$(8) F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 = 0$$

必要条件より、

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^3 + 3xy + y^3 = 0, \\ F_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ y &= -x^2 \end{aligned}$$



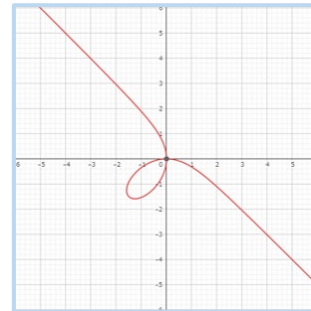
極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$ である。

$$\begin{aligned} F_{xx}(x, y) &= 6x \\ F_y(x, y) &= 3x + 3y^2 \end{aligned}$$

より、 $(x, y) = (0, 0)$ では $F_y(x, y) = 0$ となり、陰関数 $y = f(x)$ は定まらない

また、 $(x, y) = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$ では、

$$\frac{F_{xx}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}{F_y\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)} = \frac{6 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{3 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)} = 2 > 0$$



となり、 $y = f(x)$ は $x = -2\frac{1}{3}$ で極大値 $y = -2\frac{2}{3}$ をもつ

教科書演習 P.143 問題 4.19

$$(9) F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$$

必要条件より、

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0, \\ F_x(x, y) &= 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ である。

$$\begin{aligned} F_{xx}(x, y) &= 2 \\ F_y(x, y) &= -2x + 4y \end{aligned}$$

より、 $(x, y) = (1, 1)$ で

$$\frac{F_{xx}(1, 1)}{F_y(1, 1)} = \frac{2}{2} = 1 > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $y = 1$ をもつ

また、 $(x, y) = (-1, -1)$ で

$$\frac{F_{xx}(-2, -2)}{F_y(-2, -2)} = -\frac{2}{2} = -1 < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $y = -1$ をもつ

(10) $F(x, y) = xy(y - x) - 2a^3$

必要条件より、

$$F(x, y) = xy(y - x) - 2a^3 = 0,$$

$$F_x(x, y) = y^2 - 2xy = 0$$

$$y = -x^2$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (a, 2a)$ 、である。

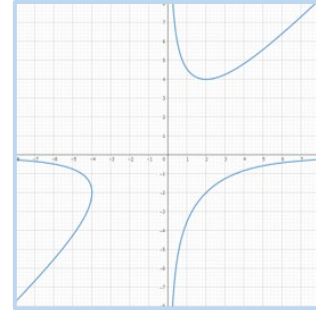
$$F_{xx}(x, y) = -2y$$

$$F_y(x, y) = 2xy - x^2$$

より、 $(x, y) = (a, 2a)$ では

$$\frac{F_{xx}(a, a)}{F_y(a, a)} = \frac{-4a}{3a^2} < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = a$ で極小値 $y = 2a$ をもつ



(11) $F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0$

必要条件より、

$$F(x, y) = x^4 - 4xy + 3y^2 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 0$$

極値となりうるのは、 $(x, y) = (0, 0)(1, 1)(-1, -1)$ である。

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2$$

$$F_y(x, y) = -4x + 6y$$

より、 $(x, y) = (0, 0)$ では $F_y(x, y) = 0$ となり、陰関数 $y = f(x)$ は定まらない

$(x, y) = (1, 1)$ で

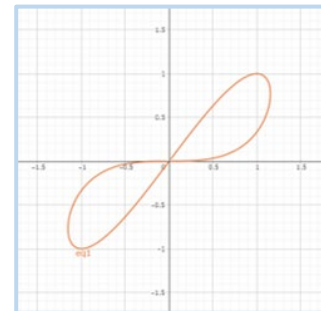
$$\frac{F_{xx}(1, 1)}{F_y(1, 1)} = \frac{12}{2} = 6 > 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = 1$ で極大値 $y = 1$ をもつ

$(x, y) = (-1, -1)$ で

$$\frac{F_{xx}(-1, -1)}{F_y(-1, -1)} = \frac{12}{-2} = -6 < 0$$

となり、 $y = f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $y = -1$ をもつ



➤ 条件付き極値問題(ラグランジュの未定乗数法)

教科書 P.143 問 30

(1) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + y$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 1, \quad g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y$$

より、

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(2, 2)$, $(-2, -2)$ である。

このとき、

$$f(2, 2) = 4, \quad f(-2, -2) = -4,$$

である。よって、

$f(x, y)$ は、 $(2, 2)$ で極大値 4、

$f(x, y)$ は、 $(-2, -2)$ で極小値 -4 をとる

(2) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = y, \quad g_y(x, y) = x$$

より、

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

から、極値をもつ可能性がある点は、 $(1, 1)$, $(-1, -1)$ である。

このとき、

$$f(1, 1) = 2, \quad f(-1, -1) = 2, \quad \text{また、} f\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} > 2,$$

である。よって、

$f(x, y)$ は、 $(1, 1)$ および $(-1, -1)$ で極小値 2 をとる

教科書 P.145 演習問題 4-A 15 (レポートに出題)

(3) 条件 $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x, \quad g_x(x, y) = 2x + y, \quad g_y(x, y) = 2y + x$$

より、

$$\begin{cases} y = \lambda(2x + y) \\ x = \lambda(2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{y}{2x + y} = \frac{x}{2y + x} \\ g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}), (\pm 1, \mp 1)$ である。

このとき、

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}, \quad f(\pm 1, \mp 1) = -1$$

である。よって、

$$f(x, y) \text{ は、} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ で極大値 } \frac{1}{3}$$

$$f(x, y) \text{ は、} (\pm 1, \mp 1) \text{ で極小値 } -1 \text{ をとる}$$

(4) 条件 $g(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ。
 $g(x, y) = 0$ は $(0, 0)$ に特異点を持つので、 $x \neq 0, y \neq 0$ のとき、

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = 3x^2 - 6y, \quad g_y(x, y) = -6x + 3y^2$$

より、

$$\begin{cases} 2x = \lambda(3x^2 - 6y) \\ 2y = \lambda(-6x + 3y^2) \\ x^3 - 6xy + y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{2x}{3x^2 - 6y} = \frac{2y}{-6x + 3y^2} \\ g(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(0, 0), (3, 3)$ である。

このとき、

$$f(0, 0) = 0, \quad f(3, 3) = 18,$$

である。よって、

$$f(x, y) \text{ は、} (0, 0) \text{ で極小値 } 0,$$

$$f(x, y) \text{ は、} (3, 3) \text{ で極大値 } 18 \text{ をとる}$$

教科書演習 P.144 例題 4.20

(5) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値を求めよ。
 $g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 2, \quad g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y$$

より、

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{1}{2x} = \frac{2}{2y} \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ である。

このとき、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5},$$

である。よって、

$$f(x, y) \text{ は } \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ で極大値 } \sqrt{5}、$$

$$f(x, y) \text{ は } \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ で極小値 } -\sqrt{5} \text{ をとる}$$

(6) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = 3x^2 + xy + y^2$ の極値を求めよ。
よって、

$$f_x(x, y) = 6x + y, \quad f_y(x, y) = x + 2y, \quad g_x(x, y) = y, \quad g_y(x, y) = x$$

より、

$$\begin{cases} 6x + y = \lambda y \\ x + 2y = \lambda x \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{6x + y}{y} = \frac{x + 2y}{x} \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}), (-3^{-\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}})$ である。

このとき、

$$f\left(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right) = 2\sqrt{3} + 1, \quad f\left(-3^{-\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right) = 2\sqrt{3} + 1 \quad \text{また、} f(1, 1) = 5 > 2\sqrt{3} + 1$$

である。よって、

$$f(x, y) \text{ は } \left(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right) \text{ と } \left(-3^{-\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right) \text{ で極小値 } 2\sqrt{3} + 1 \text{ をとる}$$

教科書演習 P.144 問題 4.20

(7) 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。
 $g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x, \quad g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y$$

より、

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ である。

このとき、

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2, \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2, \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2$$

である。よって、

$f(x, y)$ は、 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ および $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ で極大値 2、

$f(x, y)$ は、 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ および $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ で極小値 -2

(8) 条件 $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = xy$ の極値を求めよ。

よって、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x, \quad g_x(x, y) = 2x - y, \quad g_y(x, y) = -x + 2y$$

より、

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(-x + 2y) \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{y}{2x - y} = \frac{x}{-x + 2y} \\ g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(1, 1), (-1, -1), (3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}), (3^{\frac{1}{2}}, -3^{\frac{1}{2}})$ である。

このとき、

$$f(1, 1) = 1, \quad f(-1, -1) = 1, \quad f\left(3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{3}, \quad f\left(3^{\frac{1}{2}}, -3^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{3}$$

である。よって、 $f(x, y)$ は、

$(1, 1), (-1, -1)$ で極大値 $2\sqrt{3} + 1$ 、 $(3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}), (3^{\frac{1}{2}}, -3^{\frac{1}{2}})$ で極小値 $-\frac{1}{3}$ をとる

(9) 条件 $g(x, y) = xy - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + y$ の極値を求めよ。

よって、

$$f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 1, \quad g_x(x, y) = y, \quad g_y(x, y) = x$$

より、

$$\begin{cases} 1 = \lambda y \\ 1 = \lambda x \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(1, 1), (-1, -1)$ である。

このとき、

$$f(1, 1) = 2, \quad f(-1, -1) = -2,$$

である。よって、 $f(x, y)$ は、

$(1, 1)$ で極大値 2、 $(-1, -1)$ で極小値 -2をとる

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.196 演習問題 25

(10) 条件 $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 2, \quad g_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

より、

$$\begin{cases} 1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \\ 2 = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } 2\sqrt{x} = 4\sqrt{y} \\ g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$ である。このとき、 $f(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}) = \frac{2}{3}$ である。

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.196 演習問題 25

(11) 条件 $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点を持たないので、

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = 2x + y, \quad g_y(x, y) = 2y + x$$

より、

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) \\ 2y = \lambda(2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} \text{ より } \frac{2x}{2x + y} = \frac{2y}{2y + x} \\ g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\pm 1, \pm 1), (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ である。

このとき、

$$f(1, 1) = 2, \quad f(-1, -1) = 2, \quad f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6, \quad f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6,$$

である。

チャート P.233 基本例題 116

(12) 条件 $g(x, y) = 2xy^2 + x^2y - 8 = 0$ のもとで $f(x, y) = x + 2y$ の極値をもつ可能性のある点を求めよ。

$g(x, y) = 0$ は特異点をもたない

$$f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 2, \quad g_x(x, y) = 2y^2 + 2xy, \quad g_y(x, y) = 4xy + x^2$$

より、

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2y^2 + 2xy) \\ 2 = \lambda(4xy + x^2) \\ 2xy^2 + x^2y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} \text{ より } \frac{1}{2y^2 + 2xy} = \frac{2}{4xy + x^2} \\ g(x,y) = 2xy^2 + x^2y - 8 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(2, 1)$ である。

このとき、 $f(2, 1) = 4$ である。よって、 $f(x, y)$ は $(2, 1)$ で極小値 4をとる

前年度レポート問題(レポートに出題)

(13) Lagrange の未定乗数法により、条件 $x + y + z = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) のとき、 $f(x, y, z) = (1-x)(1-y)(1-z)$ の最大値を求めよ。

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

とおくと、 $g(x, y, z) = 0$ は特異点をもたない

$$f_x = -(1-y)(1-z), \quad f_y = -(1-x)(1-z), \quad f_z = -(1-x)(1-y),$$

$$g_x(x, y, z) = 1, \quad g_y(x, y, z) = 1, \quad g_z(x, y, z) = 1$$

より、

$$\begin{cases} \frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} = \frac{f_z(a,b)}{g_z(a,b)} \text{ より} \\ \frac{1}{-(1-y)(1-z)} = \frac{1}{-(1-x)(1-z)} = \frac{1}{-(1-x)(1-y)}, \\ g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

より、極値をもつ可能性がある点は、 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である。

このとき、 $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{8}{27}$ である。よって、 $f(x, y, z)$ は $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ で極大値 $\frac{8}{27}$ をとる

➤ 物理数学としての問題

前年度レポート問題(確認テストに出題)

(1) 3変数 x, y, z の間に $F(x, y, z) = 0$ の関係があるとき、

各変数は他の2変数の陰関数 $x(y, z), y(z, x), z(x, y)$ となる。

このとき、次式となることを示せ。

$$\frac{\partial x(y, z)}{\partial y} \frac{\partial y(y, z)}{\partial z} \frac{\partial z(y, z)}{\partial x} = -1$$

x, y, z に関する全微分は、

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) dz \cdots (1)$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx \cdots (2)$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \cdots (3)$$

(3)式を dx に付いて解くと

$$dx = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dy + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dz \cdots (4)$$

これと(1)式と比較すると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} \cdots (5)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} \cdots (6)$$

同様に dy について解いて(2)式と比較すると

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1} \cdots (7)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1} \cdots (8)$$

よって、式(5)と(7)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= \left\{ -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} \right\} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$