第 3 回　多変数関数の微分 (3)

今回のポイント

1. 合成関数の微分、方向微分係数
2. 2 変数関数のテイラー展開、マクローリン展開
3. 陰関数定理、微分、特異点

4.4　合成関数の微分とテイラーの定理　（教 P.128〜）

合成関数の微分

合成関数の微分公式

全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ について

(i)　$x = \varphi(t)$,　$y = \psi(t)$ でいずれも t について微分可能のとき、

⇒ 合成関数 $z = f\,(\varphi(t), \psi(t))$ は t について微分可能で、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

が成り立つ。

(ii)　$x = \varphi(u,\ v)$,　$y = \psi(u,\ v)$ でいずれも $u,\ v$ について偏微分可能のとき、

⇒ 合成関数 $z = f\,(\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v))$ は $u,\ v$ について偏微分可能で、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

が成り立つ。

例 12

$\boldsymbol{z = f(x, y) = x^3 + y^3}$ **,** $\boldsymbol{x = \cos t}$ **,** $\boldsymbol{y = \sin t}$ **のとき、**$\boldsymbol{\frac{dz}{dt}}$ **を求めよ。**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) + 3\sin^2 t \cdot \cos t$$
$$= \underline{3\sin t\cos t\,(\sin t - \cos t)}$$

$\boxed{\text{例 15}}$

全微分可能な関数 $\boldsymbol{z = f(x,y)}$**において、**$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$ **とするとき、**$\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$を求めよ。

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos t + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin t$$
$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r\sin t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r\cos t)$$

➢ 方向微分係数

$h^2 + k^2 = 1$ を満たす係数 h, kに対して、

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+ht, b+kt) - f(a,b)}{t}$$

が存在するならば、点(a,b) において(h,k)方向に微分可能である。
この極限値を(h,k)方向の**方向微分係数**と呼ぶ。

$\boxed{\text{問 22}}$

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \big((x,y) \neq (0,0)\big)}$$
$$\boldsymbol{f(0,0) = 0}$$

で定義される関数の原点 $(0,0)$ における(h,k)方向の方向微分係数を求めよ。
次の関係式より、z_u, z_vを求めよ。
$(h,k) \neq (0,0)$のとき、

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+ht, 0+kt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\frac{ht \cdot k^2t^2}{h^2t^2 + k^4t^4}\right\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{hk^2}{h^2 + k^4t^2}\right) = \underline{\frac{k^2}{h}}$$

$(h,k) = (0,0)$のとき、

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+ht, 0+kt) - f(0,0)}{t} = \underline{0}$$

➢ 2 変数関数のテイラー展開、マクローリン展開

1 変数関数のマクローリン展開は、

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}\cdot\frac{df(0)}{dx}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2f(0)}{dx^2}\cdot x^2$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3f(0)}{dx^3}\cdot x^3+\cdots++\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^nf(0)}{dx^n}\cdot x^n+R_{n+1}$$

と書けることはもう習った。これを 2 変数関数に拡張する。

2 変数関数 $z=f(x,y)$ の x,y をt を用いて$x=ht,\ y=kt$（h,k は定数）とすると、$z=f(ht,kt)$ となり、z は 1 変数関数 $z=z(t)$ と考えることができる。z の合成関数の微分から

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)$ は関数fに作用するので、"作用素"と呼ばれる

すると、

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$
$$=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{d}{dt}f$$
$$=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$
$$=\underline{\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f}$$

$$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\left(h^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+k^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f$$
$$=h^2\cdot f_{xx}+2hk\cdot f_{xy}+k^2\cdot f_{yy}$$

同様に、

$$\frac{d^3z}{dt^3}=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^nz}{dt^n}=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

と表される。よって、t の 1 変数関数 $z=z(t)$ のマクローリン展開は、

$$z(t) = z(0) + \frac{1}{1!}\cdot\frac{dz(0)}{dt}\cdot t + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2z(0)}{dt^2}\cdot t^2$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3z(0)}{dt^3}\cdot t^3 + \cdots + + \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^nz(0)}{dt^n}\cdot t^n + R_{n+1}$$

$t=1$ を代入すると、

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{1!}\cdot\frac{dz(0)}{dt} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2z(0)}{dt^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3z(0)}{dt^3} + \cdots + + \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^nz(0)}{dt^n} + R_{n+1}$$

$f(x,y)$

$f(0,0)$

$$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$

$$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$

$$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0)$$

$$\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

よって、

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0) + \frac{1}{2!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$
$$+\cdots + + \frac{1}{n!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + R_{n+1}$$

$$\left(\text{ただし、}R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(h\theta,k\theta)\quad(0<\theta<1)\right)$$

ここで、h,k を変数と考えると、$f(h,k)$ を(0,0)のまわりでマクローリン展開したものなので、2変数関数のマクローリン展開、テイラー展開および平均値の定理は、次のようになる。

定理14 マクローリンの定理（マクローリン展開）

関数$z=f(x,y)$ が原点(0,0) と(x,y) を結ぶ領域D でC^n級であれば、

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\cdot\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(0,0)$$
$$+\frac{1}{n!}\cdot\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y)\quad(0<\theta<1)$$

となるようなθ が存在する。

さらに$z = f(h,k)$ において、$x = a + ht,\ y = b + kt$ とおいて同様に考えれば、、$f(x,y)$ を(a,b)のまわりでテイラー展開したものとなり、

定理12（テイラーの定理）

関数$z = f(x,y)$ が領域D でC^n級で、D の 2 点$(a,b),(a+h,b+k)$ を結ぶ線分がD に含まれるとき、

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$$

$$+\frac{1}{n!} \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

となるようなθ が存在する。

定理 13（平均値の定理）

定理 12 で$n = 1$とすれば、

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+\theta h, b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

となるようなθ が存在する。

例

$f(x,y) = e^{2x+y}$ を点(0,0) のまわりにマクローリン展開してみる

$$f_x = 2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2x+y}}, \quad f_y = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2x+y}},$$
$$f_{xx} = 4\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2x+y}}, \quad f_{xy} = 2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2x+y}}, \quad f_{yy} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2x+y}},$$

よって、

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0、0) = 2, \quad f_y(0、0) = 1, \quad f_{xx}(0、0) = 4, \quad f_{xy}(0、0) = 2, \quad f_{yy}(0、0) = 1,$$

よって、

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!} \cdot \left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) + \frac{1}{2!} \cdot \left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) + \cdots$$

$$= 1 + \left(x \cdot f_x\left(0、0\right) + y \cdot f_y\left(0、0\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(x^2 f_{xx}\left(0、0\right) + 2xy \cdot f_{xy}\left(0、0\right) + y^2 f_{yy}\left(0、0\right)\right) + \cdots$$

$$= \underline{1 + (2x+y) + \frac{1}{2}(4x^2 + 4xy + y^2) + \cdots}$$

となる。

➢ 陰関数の微分

$F(x,y)=0$ が成り立っているとき、$F\big(x,f(x)\big)=0$ を満たす$y=f(x)$ が存在するならば、$y=f(x)$ を$F(x,y)=0$ の **陰関数** と呼ぶ。

例 18

$F(x,y)=2x-y=0$ のとき、y について解いた$y=2x$ を $F(x,y)=0$ の 陰関数と呼ぶ。

$F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のとき、$y=+\sqrt{1-x^2}$ または$y=-\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<+1)$ を $F(x,y)=0$ の 陰関数と呼ぶ。

定理 15（陰関数定理）

関数$F(x,y)$が点$A(a,b)$を含む領域でC^1級であり、次の 2 つを満たすとする。

$$F(a,b)=0,\quad F_y(a,b)\neq 0$$

このとき、$x=a$を含む開区間Iで定義されたC^1級関数$y=f(x)$ で

(i) $b=f(a)$

(ii) すべての$x\in I$について$F\big(x,f(x)\big)=0$

をみたすものがただ 1 つ存在する。

さらにこのとき、関数$f(x)$ は微分可能であり、次が成り立つ。

$$f'(x,y)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

後半の証明

$F(x,f(x)\,)=0$ の両辺をx で微分すると、

$$F_x\big(x,f(x)\big)+F_y\big(x,f(x)\big)\cdot f'(x)=0$$

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

例 (教科書演習 P.138 例題 4.15)

関係式 $x^2+xy+y^2=1$ で定まる陰関数$y=f(x)$ に対し、dy/dx , d^2y/dx^2 を求めよ。

$F(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$ として、

$F_x(x,y)=2x+y,\ \ F_y(x,y)=x+2y$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(2+y')(x+2y)-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

$$= -\frac{3(y - xy')}{(x+2y)^2} = -3 \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2} = -3 \cdot \frac{2(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}$$

$$= \underline{\frac{-6}{(x+2y)^3}}$$

➢ 陰関数の接線と法線

陰関数$F(x,y) = 0$上の点(a,b)における接線と法線の方程式は、$F_y(x,y) \neq 0$ならば、

$$y - b = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}(x-a)$$

また、$F_x(x,y) \neq 0$ ならば、

$$x - a = -\frac{F_y(a,b)}{F_x(a,b)}(y-b)$$

とかける。まとめると、$F_y(x,y) \neq 0$ または$F_x(x,y) \neq 0$ ならば、接線の方程式は、

$$\boldsymbol{F_x(a,b)(x-a) + F_y(a,b)(y-b) = 0}$$

となり、法線の方程式は、

$$\boldsymbol{F_y(a,b)(x-a) - F_x(a,b)(y-b) = 0}$$

で与えられる。

問 24

(1) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1 \quad (a,b)}$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ として、$F_x(a,b) = 2a, \quad F_y(a,b) = 2b$

接線の方程式は、

$$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$$
$$ax + by - 1 = 0$$

法線の方程式は、

$$2b(x-a) - 2a(y-b) = 0$$
$$bx - ay = 0$$

(2) $\boldsymbol{x^2 - y^2 = -1 \quad (1, \sqrt{2})}$

$F(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ として、$F_x(1,\sqrt{2}) = 2, \quad F_y(1,\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$

接線の方程式は、

$$2(x-1) - 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0$$

$$x + \sqrt{2}y + 1 = 0$$

法線の方程式は、

$$-2\sqrt{2}(x-1) - 2\left(y - \sqrt{2}\right) = 0$$
$$\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0$$

➢ 特異点

> 点$A(a,b)$において、C^1級のなめらかな曲線$F(x,y) = 0$ に対して、
> $F_y(x,y) \neq 0$ または$F_x(x,y) \neq 0$ ならば、
> 点A の近くで曲面の形は $y = f(x)$ または $x = g(y)$ で表される。
> このような点を正則点といい、この点では、ただ 1 つの接線が引ける。
>
> $\updownarrow$
>
> $F_y(x,y) = 0$ または$F_x(x,y) = 0$ である点を特異点という。

例 19

$F(x,y) = x^2(x+a) - y^2 = 0$ の特異点を求め、特異点近くでの曲線の形状を求めよ。

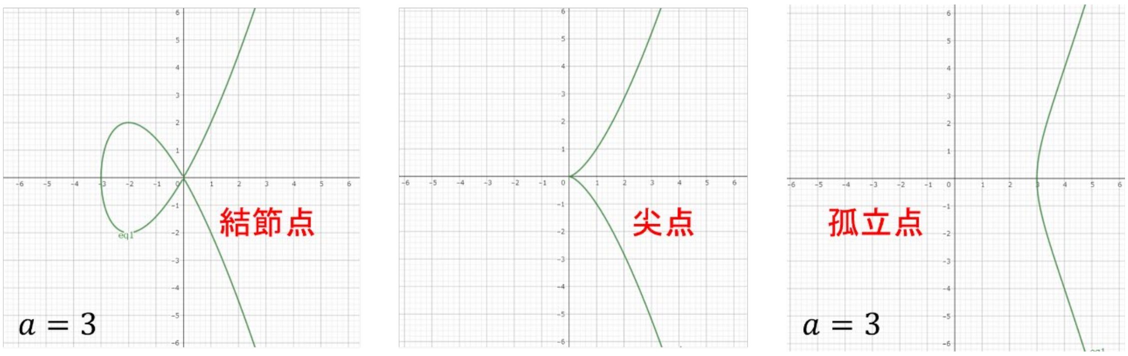
$$F(x,y) = x^2(x+a) - y^2 = 0$$
$$F_x(x,y) = 3x^2 + 2ax = 0$$
$$F_y(x,y) = -2y = 0$$

これら 3 式より$(x,y) = (0,0)$ が特異点である。

(i) $a > 0$ のとき、$y = \pm x\sqrt{x+a}$ となり 2 本の接線が引ける（結節点）

(ii) $a = 0$ のとき、$y = \pm x\sqrt{x}$ となり原点では接線が引けずとがった形になる（尖点）

(iii) $a < 0$ のとき、$x^2(x+a) = y^2 \geq 0$ となり原点近くにこれを満たす点が原点以外には存在しない。（孤立点）



【問題集】

合成関数の微分

(1) 次の関係式より、z_u, z_vを求めよ。

(1 − 1)　$z = \log(x^2 + y^2)$,　$x = u - v$,　$y = u + v$

(1 − 2)　$z = e^{x+y}$,　$x = \log(u + v)$,　$y = \log(u - v)$

(2) C^1 級関数$z = f(x, y)$ に対して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$とするとき、$\Delta^2 z$ を計算せよ。

(3) $z = \dfrac{y}{x}$,　$x = 2 + t$,　$y = 1 - t$ のとき、$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ。

(4) 次の関係式より、z_u, z_vを求めよ。

(4 − 1)　$z = \log(x^2 + y^2)$,　$x = 2u - v$,　$y = u + 3v$

(4 − 2)　$z = \tan^{-1}(x + y)$,　$x = uv$,　$y = u^2 + v^2$

(5) 全微分可能な関数$z = e^{-x^2-y^2}$について、

(5 − 1)　$x = ht$,　$y = kt$　(h, k:定数) のとき、$\frac{dz}{dt}$をもとめよ。

(5 − 2)　$x = r\cos\theta$,　$y = r\sin\theta$ のとき、$\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$をもとめよ。

(6) 全微分可能な関数$z = \log(x + y)$ $(x > 0,\ y > 0)$について、

(6 − 1)　$x = \cos t$,　$y = \sin t$　のとき、$\frac{dz}{dt}$をもとめよ。

(6 − 2)　$x = u + v$,　$y = uv$ のとき、$\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$をもとめよ。

(7) $f(x, y) = \log(x^2 + xy + y^2 + 1)$ について、

$\varphi(t) = e^t + e^{-t}$,　$\psi(t) = e^t - e^{-t}$　とする。

$g(t) = f(\varphi(t),\ \psi(t))$ とするとき、導関数$g'(t)$ を求めよ。

(8) $z = f(x、y)$ の2次元極表示におけるラプラシアンが次式で表されることを示せ。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

テイラー展開、マクローリン展開

次の関数のマクローリン展開を3次の項まで求めよ。

(1) $f(x, y) = e^x \log(1 + y)$

(2) $f(x, y) = \sin(x + y)$

(3) $f(x, y) = \cos(x + y)$

(4) e^{x+y}

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

次式のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。

(1) e^{x-y}

(2) $\cos(x + 2y)$

(3) $(1 + x) \sin y$

➢ 陰関数の微分

(1) 次の関係式で定まる陰関数$y = f(x)$ に対し、dy/dx を求めよ。

(1 − 1) $x^2 + xy - y^2 = 1$

(1 − 2) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

(1 − 3) $e^x + e^y = e^{x+y}$

(2) 次の関係式で定まる陰関数$y = f(x)$ に対し、dy/dx , d^2y/dx^2 を求めよ。

(2 − 1) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(2 − 2) $x^3 + x^2 - y^2 = 0$

(2 − 3) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$

(2 − 4) $x^3 + 2xy + y^3 = 0$

(2 − 5) $y = e^{2x+y}$

➢ 陰関数の接線と法線の方程式

次の曲線の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $x^2 - xy + y^2 = 1 \quad (1, 0)$

(2) $x - y^2 e^x = 0 \quad \left(4, \dfrac{2}{e^2}\right)$

(3) $x^2 + y^2 = 1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) $x^3 + x^2 y - xy + y = 0 \quad (1, -1)$

(5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\alpha, \beta)$

(6) $x^2 - y^2 = -1 \quad (1, \sqrt{2})$

(7) $x^3 + y^3 = 1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

➢ 特異点

次の曲線の特異点を求めよ。

(1) $x(x+1)^2 - y^2 = 0$

(2) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - x^2 y = 0$

(4) $x^3 - 3x + y^2 = 0$

(5) $y^2 - 2x^2 y + x^4 - x^5 = 0$

(6) $x^3 - 3axy - y^3 = 0$

(7) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$

➢ 物理数学としての問題

3変数x, y, zの間に$F(x, y, z) = 0$ の関係があるとき、各変数は他の2変数の陰関数

$x(y, z), y(z, x), z(x, y)$ となる。このとき、次式となることを示せ。

$$\frac{\partial x(y,z)}{\partial y}\frac{\partial y(y,z)}{\partial z}\frac{\partial z(y,z)}{\partial x} = -1$$

【解答】

➢ 合成関数の微分

教科書 P.130 問 21（レポートに出題）

(1) 次の関係式より、z_u, z_v を求めよ。

(1 − 1) $\boldsymbol{z = \log(x^2 + y^2)}$, $\boldsymbol{x = u - v}$, $\boldsymbol{y = u + v}$

$$z = \log((u-v)^2 + (u+v)^2) = \log\{2(u^2+v^2)\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot 1$$

$$= \frac{u-v}{u^2+v^2} + \frac{u+v}{u^2+v^2} = \underline{\frac{2u}{u^2+v^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \underline{\frac{2v}{u^2+v^2}}$$

(1 − 2) $\boldsymbol{z = e^{x+y}}$, $\boldsymbol{x = \log(u+v)}$, $\boldsymbol{y = \log(u-v)}$

$$z = e^{x+y} = (u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = e^{x+y}\cdot\frac{1}{u+v} + e^{x+y}\cdot\frac{1}{u-v}$$

$$= (u-v) + (u+v) = \underline{2u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \underline{-2v}$$

教科書 P.145 演習問題 4-B 1（レポートに出題）

(2) $\boldsymbol{C^1}$ 級関数 $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ に対して $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$ とするとき、$\boldsymbol{\Delta^2 z}$ を計算せよ。

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

この 2 式から

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\Delta^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \cos^2\theta\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$+\sin^2\theta\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$=\underline{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}$$

教科書演習 P.135 問題 4.10

(3) $\boldsymbol{z=\frac{y}{x},\quad x=2+t,\quad y=1-t}$ **のとき、**$\boldsymbol{\frac{dz}{dt}}$**を求めよ。**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2},\qquad\frac{dx}{dt}=1,\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x},\qquad\frac{dy}{dt}=-1$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot1+\frac{1}{x}\cdot(-1)=\frac{-y-x}{x^2}$$

$$=\underline{\frac{-3}{(t+2)^2}}$$

教科書演習 P.135 問題 4.11

(4) 次の関係式より、$\boldsymbol{z_u,z_v}$**を求めよ。**

(4 − 1) $\boldsymbol{z=\log(x^2+y^2),\quad x=2u-v,\quad y=u+3v}$

$$z=\log((u-v)^2+(u+v)^2)=\log(5u^2+2uv+2v^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot2+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot1=\frac{4x+2y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{8u-4v+2u+6v}{5u^2+2uv+2v^2}=\underline{\frac{10u+2v}{5u^2+2uv+2v^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\underline{\frac{2u+20v}{5u^2+2uv+2v^2}}$$

(4 − 2) $\boldsymbol{z=\tan^{-1}(x+y),\quad x=uv,\quad y=u^2+v^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2v}{1+(x+y)^2}\cdot1+\frac{2u}{1+(x+y)^2}\cdot1$$

$$=\underline{\frac{2u+v}{1+(u^2+uv+v^2)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\underline{\frac{u+2v}{1+(u^2+uv+v^2)^2}}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.182 演習問題 23

(5) 全微分可能な関数$z = e^{-x^2-y^2}$について、

(5 − 1) $x = ht$, $y = kt$ (h, k:定数) のとき、$\frac{dz}{dt}$をもとめよ。

(5 − 2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき、$\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$をもとめよ。

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}$, $\frac{dx}{dt} = h$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$, $\frac{dy}{dt} = k$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\ &= -2hxe^{-x^2-y^2} + -2kye^{-x^2-y^2}\\ &= \underline{-2(h^2+k^2)te^{-(h^2+k^2)/t}}\end{aligned}$$

(2) $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial y}{dr} = \sin\theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$, $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\\ &= \cos\theta\cdot(-2x)e^{-x^2-y^2} + \sin\theta\cdot(-2)ye^{-x^2-y^2}\\ &= \underline{-2re^{-r^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \left(-2xe^{-x^2-y^2}\right)\cdot(-r\sin\theta) + \left(-2ye^{-x^2-y^2}\right)\cdot(r\cos\theta)\\ &= 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot e^{-r^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\cdot e^{-r^2}\\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.183 実践問題 23

(6) 全微分可能な関数$z = \log(x+y)$ ($x > 0$, $y > 0$)について、

(6 − 1) $x = \cos t$, $y = \sin t$ のとき、$\frac{dz}{dt}$をもとめよ。

(6 − 2) $x = u + v$, $y = uv$ のとき、$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$をもとめよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$$

(1) $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos t$,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{1}{x+y}\cdot(-\sin t) + \frac{1}{x+y}\cdot\cos t\\ &= \underline{\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial u}=1,\quad \dfrac{\partial y}{du}=v,\quad \dfrac{\partial x}{\partial v}=1,\quad \dfrac{\partial y}{\partial v}=u$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{x+y}\cdot 1+\frac{1}{x+y}\cdot v$$

$$=\underline{\frac{1+v}{u+v+uv}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{x+y}\cdot 1+\frac{1}{x+y}\cdot u$$

$$=\underline{\frac{1+u}{u+v+uv}}$$

チャート P.223 基本例題 111

(7) $f(x,y)=\log\left(x^2+xy+y^2+1\right)$ について、
$\varphi(t)=e^t+e^{-t}$, $\psi(t)=e^t-e^{-t}$ とする。
$g(t)=f(\varphi(t),\ \psi(t))$ とするとき、導関数 $g'(t)$ を求めよ。

$f(x,y)=\log(x^2+xy+y^2+1)$より

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=e^t-e^{-t},\quad \frac{\partial\psi(t)}{\partial y}=e^t+e^{-t},$$

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi(t)}{\partial y}$$

$$=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1}\cdot(e^t-e^{-t})+\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}\cdot(e^t+e^{-t})$$

$$=\frac{x^2+4xy+y^2}{x^2+xy+y^2+1}=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}+4e^{2t}-4e^{-2t}+e^{2t}-2+e^{-2t}}{e^{2t}+2+e^{-2t}+e^{2t}-e^{-2t}+e^{2t}-2+e^{-2t}+1}$$

$$=\underline{\frac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}}$$

前年度 レポート問題(レポートに出題)

(8) $z=f(x、y)$ の2次元極表示におけるラプラシアンが次式で表されることを示せ。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ に対して

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} + r\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

この 2 式から

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} \qquad (2)$$

(1)(2)式をそれぞれx, yで微分して足し合わせると、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\cdots(3)$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}$$

また、

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

であるから、(3)式は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \cos\theta\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}\right)$$

$$+ \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\sin\theta\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\cdot\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right)$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\left(\frac{\sin^2\theta}{r}+\frac{\cos^2\theta}{r}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial r}+\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\right)$$

$$=\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}}$$

➢ テイラー展開、マクローリン展開

教科書 P.144 演習問題 4-A 10.(演習に出題)

次の関数のマクローリン展開を3次の項まで求めよ。

(1) $\boldsymbol{f(x,y)=e^x\log(1+y)}$

$f(0,0)=0,$

$f_x(x,y)=e^x\log(1+y),\quad f_x(0,0)=0\quad f_y(x,y)=e^x/(1+y),\quad f_y(0,0)=1$

$f_{xx}(x,y)=e^x\log(1+y),\quad f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=e^x/(1+y),\quad f_{xy}(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y)=-e^x/(1+y)^2,\quad f_{yy}(0,0)=-1$

$f_{xxx}(x,y)=e^x\log(1+y),\quad f_{xxx}(0,0)=0$

$f_{xxy}(x,y)=e^x/(1+y),\quad f_{xxy}(0,0)=1$

$f_{xyy}(x,y)=-e^x/(1+y)^2,\quad f_{xyy}(0,0)=-1$

$f_{yyy}(x,y)=2e^x/(1+y)^3,\quad f_{yyy}(0,0)=2$

よって、

$$f(x,y)=0+(0\cdot x+1\cdot y)+\frac{1}{2!}(0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy-1\cdot y^2)$$

$$+\frac{1}{3!}(0\cdot x^3+3\cdot 1\cdot x^2y-3\cdot 1\cdot xy^2+2\cdot y^3)$$

$$=\underline{y+\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3\right)}$$

(2) $\boldsymbol{f(x,y)=\sin(x+y)}$

$f(0,0)=0,$

$f_x(x,y)=\cos(x+y),\quad f_x(0,0)=1\quad f_y(x,y)=\cos(x+y),\quad f_y(0,0)=1$

$f_{xx}(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=-\sin(x+y),$

$f_{xx}(0,0)=f_{xy}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$

$f_{xxx}(x,y)=f_{xxy}(x,y)=f_{xyy}(x,y)=f_{yyy}(x,y)=-\cos(x+y),$

$$f_{xxx}(0,0) = f_{xxy}(0,0) = f_{xyy}(0,0) = f_{yyy}(0,0) = -1$$

よって、

$$f(x,y) = 0 + (1\cdot x + 1\cdot y) + \frac{1}{2!}(0\cdot x^2 + 2\cdot 0\cdot xy + 0\cdot y^2)$$
$$-\frac{1}{3!}(1\cdot x^3 + 3\cdot 1\cdot x^2y + 3\cdot 1\cdot xy^2 + 1\cdot y^3)$$
$$= \underline{(x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3}$$

(3) $f(x,y) = \cos(x+y)$

$f(0,0) = 1,$

$f_x(x,y) = -\sin(x+y),\quad f_x(0,0) = 0\quad f_y(x,y) = -\sin(x+y),\quad f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\cos(x+y),$

$f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = -1$

$f_{xxx}(x,y) = f_{xxy}(x,y) = f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = -\sin(x+y),$

$f_{xxx}(0,0) = f_{xxy}(0,0) = f_{xyy}(0,0) = f_{yyy}(0,0) = 0$

よって、

$$f(x,y) = 1 + (0\cdot x + 0\cdot y) - \frac{1}{2!}(1\cdot x^2 + 2\cdot 1\cdot xy + 1\cdot y^2)$$
$$-\frac{1}{3!}(0\cdot x^3 + 3\cdot 0\cdot x^2y + 3\cdot 0\cdot xy^2 + 0\cdot y^3)$$
$$= \underline{1 - \frac{1}{2}(x+y)^2}$$

教科書演習 P.137 問題 4.14（レポートに出題）

次式のマクローリン展開を3次の項まで求めよ。

(4) e^{x+y}

$f(0,0) = 1,$

$f_x(x,y) = e^{x+y},\quad f_x(0,0) = 1\quad f_y(x,y) = e^{x+y},\quad f_y(0,0) = 1$

$f_{xx}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{xx}(0,0) = 1$

$f_{xy}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{xy}(0,0) = 1$

$f_{yy}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{yy}(0,0) = 1$

$f_{xxx}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{xxx}(0,0) = 1$

$f_{xxy}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{xxy}(0,0) = 1$

$f_{xyy}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{xyy}(0,0) = 1$

$f_{yyy}(x,y) = e^{x+y},\quad f_{yyy}(0,0) = 1$

よって、

$$f(x,y)=1+(1\cdot x+1\cdot y)+\frac{1}{2!}(1\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy+1\cdot y^2)$$

$$+\frac{1}{3!}(1\cdot x^3+3\cdot 1\cdot x^2y+3\cdot 1\cdot xy^2+1\cdot y^3)$$

$$=\underline{1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{6}(x+y)^3}$$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ （レポートに出題）

$f(0,0)=1,$

$f_x(x,y)=x(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad f_y(x,y)=y(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}},$

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y)=(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\quad f_{xx}(0,0)=1$

$f_{xy}(x,y)=3xy(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}\quad f_{xy}(0,0)=0$

$f_{yy}(x,y)=(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}+3y^2(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}},\quad f_{yy}(0,0)=1$

$f_{xxx}(x,y)=9x(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}+15x^3(1-x^2-y^2)^{-\frac{7}{2}},\quad f_{xxx}(0,0)=0$

$f_{xxy}(x,y)=3y(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}+15x^2y(1-x^2-y^2)^{-\frac{7}{2}},\quad f_{xxy}(0,0)=0$

$f_{xyy}(x,y)=3x(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}+15xy^2(1-x^2-y^2)^{-\frac{7}{2}},\quad f_{xyy}(0,0)=0$

$f_{yyy}(x,y)=9y(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}+15y^3(1-x^2-y^2)^{-\frac{7}{2}},\quad f_{yyy}(0,0)=0$

よって、

$$f(x,y)=1+(0\cdot x+0\cdot y)+\frac{1}{2!}(1\cdot x^2+2\cdot 0\cdot xy+1\cdot y^2)$$

$$+\frac{1}{3!}(0\cdot x^3+3\cdot 0\cdot x^2y+3\cdot 0\cdot xy^2+0\cdot y^3)$$

$$=\underline{1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

チャート P.229 基本例題 115

次式のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。

(1) e^{x-y}

$f(0,0)=1,$

$f_x(x,y)=e^{x-y},\quad f_x(0,0)=1\quad f_y(x,y)=-e^{x-y},\quad f_y(0,0)=-1$

$f_{xx}(x,y)=e^{x-y},\quad f_{xx}(0,0)=1$

$f_{xy}(x,y)=-e^{x-y},\quad f_{xy}(0,0)=-1$

$f_{yy}(x,y)=e^{x-y},\quad f_{yy}(0,0)=1$

よって、

$$f(x,y)=1+(1\cdot x-1\cdot y)+\frac{1}{2!}(1\cdot x^2-2\cdot 1\cdot xy+1\cdot y^2)$$

$$=\underline{1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2}$$

(2) $\cos(x+2y)$

$f(0,0)=1,$

$f_x(x,y)=-\sin(x+2y),\quad f_x(0,0)=0\quad f_y(x,y)=-2\sin(x+2y),\quad f_y(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y)=-\cos(x+2y)\quad f_{xx}(0,0)=-1$

$f_{xy}(x,y)=\ -2\cos(x+2y)\quad f_{xy}(0,0)=-2$

$f_{yy}(x,y)=-4\sin(x+2y)\quad f_{xy}(0,0)=-4,$

よって、

$$f(x,y)=1+(0\cdot x+0\cdot y)-\frac{1}{2!}(1\cdot x^2+2\cdot 2\cdot xy+4\cdot y^2)$$

$$=\underline{1-\frac{1}{2}(x^3+4xy+4x^2)}$$

(3) $(1+x)\sin y$

$f(0,0)=0,$

$f_x(x,y)=\sin y,\quad f_x(0,0)=0\quad f_y(x,y)=(1+x)\cos y,\quad f_y(0,0)=1$

$f_{xx}(x,y)=0\quad f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=\ \cos y,\quad f_{xy}(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y)=-(1+x)\sin y,\quad f_{xy}(0,0)=0,$

よって、

$$f(x,y)=0+(0\cdot x+1\cdot y)+\frac{1}{2!}(0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy+0\cdot y^2)$$

$$=\underline{y+xy}$$

➢ 陰関数の微分

教科書 P.135 問 23 (演習に出題)

(1) **次の関係式で定まる陰関数$\boldsymbol{y=f(x)}$に対し、$\boldsymbol{dy/dx}$を求めよ。**

(1 − 1) $\boldsymbol{x^2+xy-y^2=1}$

$F(x,y)=x^2+xy-y^2-1$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\underline{\frac{2x+y}{x-2y}}$$

(1 − 2) $\boldsymbol{x^3-3axy+y^3=0}$

$F(x,y)=x^3-3axy+y^3$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2-3ay}{-3ax+3y^2}=\underline{\frac{x^2-ay}{ax-y^2}}$$

(1 − 3) $\boldsymbol{e^x+e^y=e^{x+y}}$

$F(x,y)=e^x+e^y-e^{x+y}$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{e^x-e^{x+y}}{e^y-e^{x+y}}=\underline{\frac{e^x(e^y-1)}{e^y(1-e^x)}}$$

教科書 P.145 演習問題 4-A 11 (レポートに出題)

(2) **次の関係式で定まる陰関数$\boldsymbol{y=f(x)}$に対し、$\boldsymbol{dy/dx}$,$\boldsymbol{d^2y/dx^2}$を求めよ。**

(2 − 1) $\boldsymbol{x^2+xy+y^2=1}$

$F(x,y)=x^2+xy+y^2-1$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\underline{\frac{2x+y}{x+2y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(2+\frac{dy}{dx}\right)(x+2y)-\left(x+2\frac{dy}{dx}\right)(2x+y)}{(x+2y)^2}$$

$$=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}=-\underline{\frac{6}{(x+2y)^3}}$$

(2 − 2) $\boldsymbol{x^3+x^2-y^2=0}$

$F(x,y)=x^3+x^2-y^2$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2+2x}{-2y}=\underline{\frac{3x^2+2x}{2y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6x+2)(2y)-(3x^2+2x)\left(2\frac{dy}{dx}\right)}{(2y)^2}=\underline{\frac{4y^2(3x+1)-x^2(3x+2)^2}{4y^3}}$$

(2 − 3)　$x^3-3xy+y^3=0$

$F(x,y)=x^3-3xy+y^3$ として、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2-3y}{-3x+3y^2}=\underline{\frac{x^2-y}{x-y^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(2x-\frac{dy}{dx}\right)(x-y^2)-(x^2-y)\left(1-2y\frac{dy}{dx}\right)}{(x-y^2)^2}=\frac{2xy(1+x^3-3xy+y^3)}{(x-y^2)^3}$$

$$=\underline{\frac{2xy}{(x-y^2)^3}}$$

教科書演習　P.138 問題 4.15

次の関係式 で定まる陰関数$y=f(x)$ に対し、dy/dx , d^2y/dx^2 を求めよ。

(2 − 4)　$x^3+2xy+y^3=0$

$F(x,y)=x^3+2xy+y^3$=0 として、

$$F_x(x,y)=3x^2+2y,\quad F_y(x,y)=2x+3y^2\quad より\quad \frac{dy}{dx}=\underline{-\frac{3x^2+2y}{2x+3y^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(6x+2y')(2x+3y^2)-(3x^2+2y)(2+6yy')}{(2x+3y^2)^2}$$

$$=-\frac{(6x^2+18xy^2-4y)+y'(4x+18x^2y+18y^2)}{(2x+3y^2)^2}$$

$$=-\frac{(6x^2+18xy^2-4y)(2x+3y^2)-(4x+18x^2y+6y^2)(3x^2+2y)}{(2x+3y^2)^3}$$

$$=-\frac{\{-16xy+54xy(x^3+2xy+y^3)\}}{(2x+3y^2)^3}=\underline{\frac{16xy}{(2x+3y^2)^3}}$$

(2 − 5)　$y=e^{2x+y}$

$F(x,y)=e^{2x+y}-y=0$として、

$$F_x(x,y)=2e^{2x+y},\quad F_y(x,y)=e^{2x+y}-1\quad より\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2e^{2x+y}}{e^{2x+y}-1}=\underline{\frac{2y}{1-y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y'(1-y)-2y(-1y')}{(1-y)^2}=\frac{2}{(1-y)^2}\frac{2y}{1-y}=\frac{4y}{(1-y)^3}$$

➢ 陰関数の接線と法線の方程式

教科書 P.144 演習問題 4-A 9.

次の曲線の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $\boldsymbol{x^2-xy+y^2=1\quad(1,0)}$

$F(x,y)=x^2-xy+y^2-1$ として、$F_x(1,0)=2,\quad F_y(1,0)=-1$

接線の方程式は、

$$2(x-1)-y=0$$

$$\underline{2x-y-2=0}$$

法線の方程式は、

$$-1(x-1)-2y=0$$

$$\underline{x+2y-1=0}$$

(2) $\boldsymbol{x-y^2e^x=0\quad\left(4,\frac{2}{e^2}\right)}$

$F(x,y)=\ x-y^2e^x$ として、$F_x(x,y)=\ 1-y^2e^x,\quad F_y(x,y)=\ -2ye^x$

$$F_x\left(4,\frac{2}{e^2}\right)=-3,\quad F_y\left(4,\frac{2}{e^2}\right)=\ -4e^2$$

接線の方程式は、

$$-3(x-4)-4e^2\left(y-\frac{2}{e^2}\right)=0$$

$$\underline{3x+4e^2y=20}$$

法線の方程式は、

$$-4e^2(x-4)-3\left(y-\frac{2}{e^2}\right)=0$$

$$\underline{4e^2x+3y=16e^2-\frac{6}{e^2}}$$

教科書演習 P.139 例題 4.16

(3) $\boldsymbol{x^2+y^2=1\quad\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$F(x,y)=x^2+y^2-1$ として、$F_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2},\quad F_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

接線の方程式は、

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$\underline{x+y-\sqrt{2}=0}$$

法線の方程式は、

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$\underline{x-y=0}$$

(4) $\boldsymbol{x^3+x^2y-xy+y=0}\quad \boldsymbol{(1,-1)}$

$F(x,y)=x^3+x^2y-xy+y=0$ として、

$F_x(x,y)=3x^2+2xy-y,\quad F_y(x,y)=x^2-x+1$ より

$$F_x(1,-1)=2,\quad F_y\left(1,\sqrt{2}\right)=1$$

接線の方程式は、

$$2(x-1)+(y+1)=0$$

$$\underline{2x+y-1=0}$$

法線の方程式は、

$$(x-1)-2(y+1)=0$$

$$\underline{x-2y-3=0}$$

教科書演習　P.139　問題 4.16

(5) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}\quad \boldsymbol{(\alpha,\beta)}$

$F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$ として、

$F_x(x,y)=\dfrac{2x}{a^2},\quad F_y(x,y)=\dfrac{2y}{b^2}$ より、

$$F_x(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha}{a^2},\quad F_y(\alpha,\beta)=\frac{2\beta}{b^2}$$

接線の方程式は、

$$\frac{2\alpha}{a^2}(x-\alpha)+\frac{2\beta}{b^2}(y-\beta)=0$$

$$\underline{\frac{2\alpha}{a^2}x+\frac{2\beta}{b^2}y-1=0}$$

法線の方程式は、

$$\frac{2\beta}{b^2}(x-\alpha)-\frac{2\alpha}{a^2}(y-\beta)=0$$

$$\underline{\frac{2\beta}{b^2}x-\frac{2\alpha}{a^2}y=\alpha\beta\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)}$$

(6) $\boldsymbol{x^2-y^2=-1}$　$\boldsymbol{(1,\sqrt{2})}$

$F(x,y)=x^2-y^2+1$ として、$F_x(1,\sqrt{2})=2,\quad F_y(1,\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

接線の方程式は、

$$2(x-1)-2\sqrt{2}(y-\sqrt{2})=0$$

$$x+\sqrt{2}y+1=0$$

法線の方程式は、

$$-2\sqrt{2}(x-1)-2(y-\sqrt{2})=0$$

$$\sqrt{2}x+y-2\sqrt{2}=0$$

チャート P.235 基本例題 118

(7) $\boldsymbol{x^3+y^3=1}$　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}$

$F(x,y)=x^3+y^3-1$ として、

$F_x(x,y)=3x^2,\quad F_y(x,y)=3y^2$ より、$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$ より

$$F_x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=3\cdot 2^{-\frac{2}{3}},\quad F_y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$$

接線の方程式は、

$$3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\left(x-2^{-\frac{1}{3}}\right)+3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\left(y-2^{-\frac{1}{3}}\right)=0$$

$$\underline{x+y-2^{\frac{2}{3}}=0}$$

➢ 特異点

教科書 P.137 問 25

次の曲線の特異点を求めよ。

(1) $\boldsymbol{x(x+1)^2 - y^2 = 0}$

$F(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$F_y(x,y) = -2y = 0$$

3 式より、特異点は、$\underline{(-1,0)}$

(2) $\boldsymbol{x^3 - 3axy + y^3 = 0}$

$F(x,y) = x^3 - 3axy + y^3$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0,$$

$$F_y(x,y) = -3ax + 3y^2 = 0$$

3 式より、特異点は、$\underline{(0,0)}$

(3) $\boldsymbol{x^2 + y^2 - x^2y = 0}$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 2x - 2xy = 0,$$

$$F_y(x,y) = 2y - x^2 = 0$$

3 式より、特異点は、$\underline{(0,0)}$

教科書 P.145 演習問題 4-A 12.

次の曲線の特異点を求めよ。

(4) $\boldsymbol{x^3 - 3x + y^2 = 0}$

$F(x,y) = x^3 - 3x + y^2$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0,$$

$$F_y(x,y) = 2y = 0$$

3 式より、特異点はない

(5) $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0$

$F(x,y) = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = -4xy + 4x^3 - 5x^4 = 0,$$

$$F_y(x,y) = 2y - 2x^2 = 0$$

3 式より、特異点は、$\underline{(0,0)}$

(6) $x^3 - 3axy - y^3 = 0$

$F(x,y) = x^3 - 3axy - y^3$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0,$$

$$F_y(x,y) = -3ax - 3y^2 = 0$$

3 式より、特異点は、$\underline{(0,0)}$

教科書演習 P.140 問題 4.17

次の曲線の特異点を求めよ。

(7) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \quad (a \neq 0)$

$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$ とおくと、

$$F(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2) = 0,$$

$$F_y(x,y) = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)$$

3 式より、特異点は、$\underline{(0,0)}$

➢ 物理数学としての問題

前年度 レポート問題

3変数x,y,zの間に$F(x,y,z)=0$ の関係があるとき、各変数は他の2変数の陰関数

$x(y,z), y(z,x), z(x,y)$ となる。このとき、次式となることを示せ。

$$\frac{\partial x(y,z)}{\partial y}\frac{\partial y(y,z)}{\partial z}\frac{\partial z(y,z)}{\partial x} = -1$$

x,y,zに関する全微分は、

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)dz \cdots (1)$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)dz + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx \cdots (2)$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \cdots (3)$$

(3)式をdxに付いて解くと

$$dx = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dy + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dx \cdots (4)$$

これと(1)式と比較すると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} \cdots (5)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} \cdots (6)$$

同様にdyについて解いて(2)式と比較すると

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1} \cdots (7)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1} \cdots (8)$$

よって、式(5)と(7)より

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \left\{-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}\right\}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \underline{-1}$$