

第2回 多変数関数の微分(2)

今回のポイント

1. 全微分可能性
2. 接平面の計算
3. 完全型微分方程式の判定と解法

4.3 全微分 (教 P.120~)

➤ 接平面があるか調べる = 全微分可能かどうか

点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通って2つの方向ベクトル $\vec{d}_1 = (1, 0, m_1)$ と $\vec{d}_2 = (1, 0, m_2)$ をもつ平面は、

$$z - z_1 = m_1(x - x_1) + m_2(y - y_1)$$

と書くことができる。(右上図)

これが平面 $z = f(x, y)$ の接平面だとすると、点 $A(x_1, y_1, z_1)$ で偏微分可能だとすると、

$$m_1 = f_x(x_1, y_1)$$

$$m_2 = f_y(x_1, y_1)$$

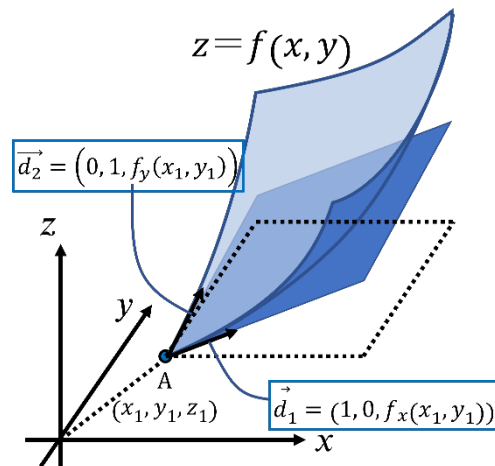
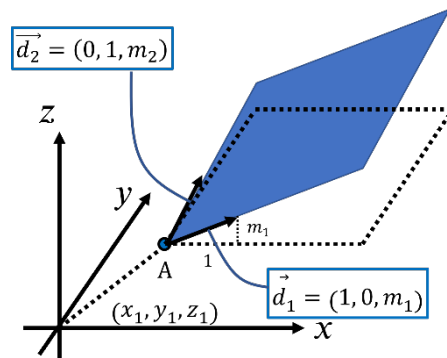
となるので、

$$z - z_1 = f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1)$$

と書くことができる。

ただし、

『点Aで偏微分可能である』 \neq 『接平面がある』
であることに注意すること。

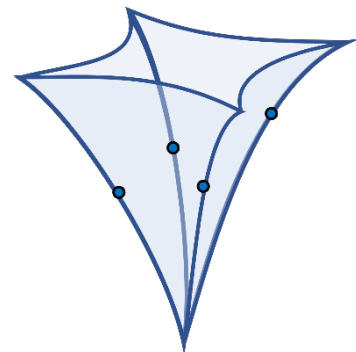


例えば、右のような平面の稜線部分では、偏微分はそれぞれ可能であるが接平面は定まらない。

接平面を求めるためには、 x, y 方向以外の方向にもなめらかな曲線が存在することを調べる必要がある。



全微分可能



曲面 $z = f(x, y)$ が曲面上の点 $A(x_1, y_1, z_1)$ において偏微分可能とする。

点 A を通って2つの方向ベクトル $\vec{d}_1 = (1, 0, f_x(x_1, y_1))$ と $\vec{d}_2 = (0, 1, f_y(x_1, y_1))$ をもつ平面 α

は、

$$\alpha: z - z_1 = f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1)$$

と書ける。

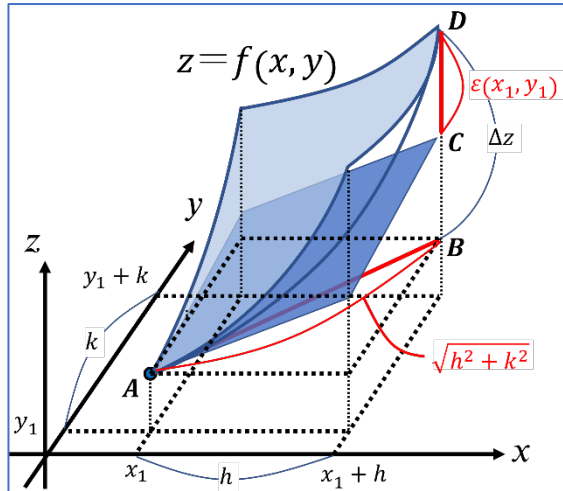
これが平面 $z = f(x, y)$ の接平面だとすると、点 $A(x_1, y_1, z_1)$ で偏微分可能だとすると、

$$m_1 = f_x(x_1, y_1)$$

$$m_2 = f_y(x_1, y_1)$$

となるので、

$$z - z_1 = f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1)$$



上図の B, C, D の z 座標をそれぞれ z_1, z_2, z_3 とおくと

$$z_1 = f(x_1, y_1)$$

$$z_2 = z_1 + f_x(x_1, y_1) \cdot (x + h - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y + k - y_1)$$

$$= z_1 + f_x(x_1, y_1) \cdot h + f_y(x_1, y_1) \cdot k$$

$$z_3 = f(x_1 + h, y_1 + k)$$

ここで、 $BD = \Delta z$, $CD = \epsilon(x_1, y_1)$ とおくと、

$$BD = BC + CD$$

$$\Delta z = (z_2 - z_1) + \epsilon(x_1, y_1)$$

$$= f_x(x_1, y_1) \cdot h + f_y(x_1, y_1) \cdot k + \epsilon(x_1, y_1)$$

この $\epsilon(x_1, y_1)$ とは、点 B 上における平面 α と接平面の誤差である。

ここで、 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ としたとき

$$\frac{\epsilon(x_1, y_1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$$

となれば、全微分可能といい、平面 α は曲面 $z = f(x, y)$ の接平面となる。

全微分可能かどうか調べるには、

$$\frac{\epsilon(x_1, y_1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1) - f_x(x_1, y_1) \cdot h - f_y(x_1, y_1) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

となるので、この $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ における極限を調べれば良い。

全微分可能の定義

2変数関数 $z = f(x, y)$ が点 (x_1, y_1) で偏微分可能なとき、

$$\Delta z = f_x(x_1, y_1) \cdot h + f_y(x_1, y_1) \cdot k + \varepsilon(x_1, y_1)$$

に対して、

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(x_1, y_1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成り立つならば、2変数関数 $z = f(x, y)$ は点 (x_1, y_1) において全微分可能という。

例 12

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ が $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ。

$$f(0+h, 0+k) = h^2 + hk + k^2$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_x(0, 0) = 0,$$

$$f_y(x, y) = x + 2y, \quad f_y(0, 0) = 0,$$

$$\therefore \frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^2 + hk + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} + \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能である。

例題 4

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ が $(0, 0)$ で連続かつ偏微分可能であるが、全微分可能でないことを示せ。

$f(x, y)$ が $(0, 0)$ で連続なことは明らか。

$$f(0+h, 0+k) = \sqrt{|hk|}$$

$$f(0, 0) = 0$$

またすべての x, y について $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ なので $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

$$\therefore \frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

であるが、 $k = h$ として $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすると上式は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり 0 にはならない。よって

全微分可能ではない。

定理 8

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍について偏微分可能で、 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ が (a, b) で連続ならば

$f(x, y)$ は (a, b) で全微分可能

系

(1) 関数 $f(x, y)$ が領域 D で C^1 級であるならば、

$f(x, y)$ は D で全微分可能

(2) 関数 $f(x, y)$ が領域 D で n 回微分可能で、 n 次導関数がすべて D で連続ならば、

$f(x, y)$ は D で C^n 級

C^1 級 (微分可能で $f'(x, y)$ が連続) \Rightarrow 全微分可能 \Rightarrow 連続かつ偏微分可能

➤ 全微分の定義全微分の定義

2 変数関数 $z = f(x, y)$ が点 (x_1, y_1) で全微分可能なとき、

$$dz = f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy$$

が成り立ち、これを点 (x_1, y_1) における $f(x, y)$ の“全微分”という。

x, y, z の増分 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ を限りなく 0 に近づけていったときの微分量をそれぞれ dx, dy, dz と表す。

関数 $z = f(x, y)$ が点 (x_1, y_1) で全微分可能なとき、 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f_x(x_1, y_1) + f_y(x_1, y_1) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(x_1, y_1)}{\Delta x}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ dz & & dx & & dy & & 0 \text{ (全微分可能より)} \end{array}$$

となって、

$$dz = f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy$$

と表され、これは点 (x_1, y_1) における $z = f(x, y)$ の“全微分”と定義される。

例 13

$z = x^3 + xy + y^3$ の全微分を求めよ

$$z_x = 3x^2 + y, \quad z_y = x + 3y^2$$

となるので

$$\underline{dz = (3x^2 + y)dx + (x + 3y^2)dy}$$

➤ 接平面と法線

接平面の方程式

2変数関数 $z = f(x, y)$ は点 (x_1, y_1) において全微分可能のとき、曲面上の点 $A(x_1, y_1, z_1)$ における接平面の方程式は次式で与えられる。

$$z - z_1 = f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1)$$

また、この接平面の法線は、

$$\frac{x - x_1}{f_x(x_1, y_1)} = \frac{y - y_1}{f_y(x_1, y_1)} = \frac{z - z_1}{-1}$$

例題 5

次の曲面の与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ。

(1) $z = x^2 + y^2 \quad (1, 1, 2)$

$f(x, y) = x^2 + y^2$ とすると、

$f_x(x, y) = 2x, \quad f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad f_y(1, 1) = 2$

よって、接平面の方程式は

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$\underline{2x + 2y - z = 2}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{-1}}$$

(2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (a, b, c)$

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とすると、

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_x(a, b) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}} = -\frac{a}{c},$$

$$f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(a, b) = \frac{-b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}} = -\frac{b}{c},$$

よって、接平面の方程式は

$$z - c = -\frac{a}{c}(x - a) - \frac{b}{c}(y - b)$$


$$\underline{ax + by + cz = 1}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{-\frac{a(x - a)}{c} = -\frac{b(y - b)}{c} = \frac{z - c}{-1}}$$

$$\underline{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}}$$

➤ 微分方程式とは

<p>方程式</p> $x^2 + 3x - 4 = 0$ <p>→ $x = 1, -4$ (解)</p> <p>⇒ 未知の数 x を求める。</p>		<p>微分方程式</p> $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$ <p>→ <u>$y = x^2 - 5x + C$ (Cは任意定数) ... (一般解)</u></p> <p>⇒ 未知の関数 x を求める。</p> <p>初期条件を与えられれば、Cは一意に決まり、</p> $y(0) = 0$ <p>とすれば、$C = 0$ となるので</p> $y = x^2 - 5x \text{ ... (特殊解)}$
--	---	---

物理現象の多くは微分方程式で書き表される。

(例) 空気抵抗のある自由落下運動 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - b \frac{dx}{dt}$

(例) ばね振動 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t$

➤ 完全微分方程式

微分方程式のうち、全微分 $dz = 0$ の形になるもの

$$dz = f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy = 0$$

を“完全微分形”または“完全微分方程式”という。

1 階微分方程式:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \dots (*)$$

を変形すると

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

となる。ここで もし、 $f_x = P(x, y), f_y = Q(x, y)$ がなりたてば、

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy \\ &= df(x, y) = 0 \end{aligned}$$

となるので、(*)の微分方程式の解は

$$f(x, y) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。

完全微分方程式として微分方程式を解くには、上の赤線部分を確認して完全微分形であることを示す必要がある。赤線部分を確認するのに、シュワルツの定理を用いる。

完全微分方程式の判定条件とその一般解

$$\text{微分方程式} \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \dots (1)$$

(ただし、 $P(x, y)$ および $Q(x, y)$ は連続な偏導関数をもつ)について

- (i) **判定条件** $P_y = Q_x$ を満たすならば、これは“完全微分方程式”であり、
 (ii) その一般解は

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C$$

である。

(ただし、 x_0, y_0 は x, y のそれぞれの定義域の中の定数を表す)

【証明】

- (i) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全微分方程式であるならば、
 その定義より2変数関数 $f(x, y)$ があって、 $df = f_x dx + f_y dy = 0$ を満たすので、

$$P(x, y) = f_x, \quad Q(x, y) = f_y$$

となる。全微分可能であるならば、 $P(x, y)$ および $Q(x, y)$ は連続な偏導関数を持つので、 f は2階の偏導関数をもつ。シュワルツの定理より

$$P_y = (f_x)_y = f_{xy} = f_{yx} = (f_y)_x = Q_x \\ \therefore \underline{P_y = Q_x}$$

が成り立つ。

- (ii) 逆に $P_y = Q_x$ が成り立っているものとする、
 ここで、 x_0 を変数 x の定義域の中のある値とし、 P を連続関数として

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + g(y) \dots (2)$$

とおく。この式の両辺を y で微分すると、

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y} g(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y)dx &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)dx \\ &= \int_{x_0}^x P_y(x, y)dx = \int_{x_0}^x Q_x(x, y)dx \end{aligned}$$

$$= \int_{x_0}^x Q_x(x, y)dx + g'(y) \dots (3)$$

$$= Q(x, y) - Q(x_0, y) + g'(y)$$

ここで $f_y = Q(x, y)$ であるから $g'(y) = Q(x_0, y)$ となる。

$$g(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy \cdots (4)$$

となる。(4)式を(2)式に代入すると、

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy \cdots (5)$$

(5)式を x で微分すると $f_x = P(x, y)$ となるので、

$$df = f_x dx + f_y dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

となり、(1)式は完全微分方程式であり、(1)式の一般解 $f(x, y) = 0$ は、

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C$$

である。

例題 (キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.57)

(1) $(2x + 5y)dx + (5x + 2y)dy = 0$

$$P(x, y) = 2x + 5y, \quad Q(x, y) = 5x + 2y \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = 5, \quad Q_x(x, y) = 5 \text{ なので、 } P_x(x, y) = Q_y(x, y) \text{ が成り立つ。}$$

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x + 5y)dx + \int_0^y (5 \cdot 0 + 2y)dy = C$$

$$[x^2 + 5xy]_0^x + [y^2]_0^y = C$$

$$\underline{x^2 + 5xy + y^2 = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2) $(2xy - \cos x)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

$$P(x, y) = 2xy - \cos x, \quad Q(x, y) = x^2 - 1 \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = 2x, \quad Q_x(x, y) = 2x \text{ なので、 } P_x(x, y) = Q_y(x, y) \text{ が成り立つ。}$$

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2xy - \cos x)dx + \int_0^y (0^2 - 1)dy = C$$

$$[x^2y - \sin x]_0^x + [-y]_0^y = C$$

$$\underline{x^2y - \sin x - y = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

例題 13 (キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.58)

(1) $(x^2 + y)dx + (x - e^y)dy = 0$

$$P(x, y) = x^2 + y, \quad Q(x, y) = x - e^y \text{ とおくと、}$$

$P_y(x, y) = 1$, $Q_x(x, y) = 1$ なので、 $P_x(x, y) = Q_y(x, y)$ が成り立つ。
よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (x^2 + y) dx + \int_0^y (0 - e^y) dy = C$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_0^x + [-e^y]_0^y = C'$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - e^y + 1 = C'$$

$$\underline{x^3 + 3xy - 3e^y = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$(2) \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$Q_x(x, y) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

なので、 $P_x(x, y) = Q_y(x, y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \int_0^y \left(\frac{0}{0^2 + y^2} \right) dy = C'$$

$$\int_0^x \left(\frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \right) dx = C'$$

$$\frac{1}{y} \left[y \cdot \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \right]_0^x = C'$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) = C'$$

$$\frac{x}{y} = \tan C'$$

$$\underline{y = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

$$P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q_x(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

なので、 $P_x(x, y) = Q_y(x, y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \int_1^y \left(\frac{1}{y} - \frac{0}{y\sqrt{0^2 + y^2}} \right) dy = C$$

$$\left[\log|x + \sqrt{x^2 + y^2}| \right]_0^x + [\log|y|]_1^y = C'$$

$$\log|x + \sqrt{x^2 + y^2}| - \log|y| + \log|y| = C'$$

$$\log|x + \sqrt{x^2 + y^2}| = C'$$

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = e^{C'}$$

$$\underline{x + \sqrt{x^2 + y^2} = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

【問題集】

➤ 全微分可能性の判定問題

\mathbb{R}^2 で定義された

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + y^4}{x^2 - xy + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

の原点 $(0, 0)$ における全微分可能性を調べよ。

➤ 全微分を求める問題

以下の関数の全微分を求めなさい。

(1) $z = x \cos y$

(2) $z = \log(x^2 + y^2)$

(3) $z = e^{xy}$

(4) $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0)),$

$f(x, y) = 0 \quad ((x, y) = (0, 0))$

で定義される関数について以下の問いに答えよ。

(4-1) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ を求めよ。

(4-2) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ。

(4-3) $f_x(x, y) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$ を求め $f_x(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。

以下の関数の全微分を求めなさい。

(5) $z = (x - 2y)^3$

(6) $z = \sin(x^2 + 2y^2)$

➤ 接平面と法線を求める問題

以下の関数の与えられた点における接平面および法線の方程式を求めよ。

(1) $z = x^2 - y^2 \quad (1, 1, 0)$

(2) $z = \log(x^2 + y^2) \quad (1, 1, \log 2)$

(3) $z = xy \quad (1, 1, 1)$

(4) $z = e^{2x-3y} \quad (0, 0, 1)$

(5) $z = ax^2 + by^2 \quad (1, 1, a + b)$

(6) $z = x^2 - y^2 \quad (1, 2, -3)$

- (8) $z = xy$ (1, 2, 2)
 (9) $z = \cos(x + y)$ $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$
 (10) $z = f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ について
 (10-1) 点 $A_0(1, 2, \log 6)$ における全微分を求めよ。
 (10-2) 点 $A_0(1, 2, \log 6)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。
 (11) $z = f(x, y) = \cos(x + y)$ について
 (11-1) 点 $A_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$ における全微分を求めよ。
 (11-2) 点 $A_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。
 (12) $f(x, y) = e^{xy}$ について点 $(1, 1, e)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。

➤ 完全微分方程式の問題

次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1) $(2x + y)dx + (x + 3y^2)dy = 0$
 (2) $(-2x + \sin y)dx + x \cos y dy = 0$
 (3) $(2x + \tan y)dx + (x + 1) \sec^2 y dy = 0$
 (4) $(x^2 + y)dx + (x - e^y)dy = 0$

➤ 物理数学としての問題(レポートに出題)

(1) van der Waals の状態方程式

$$p(T, V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \quad \text{の全微分 } dp \text{ を求め、}$$

$$dp = 0 \text{ のとき、} \frac{dT}{dV} \left(= \frac{\partial T(V, p)}{\partial V} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \right) \text{ を求めよ。}$$

- (2) 断熱変化に対する熱力学第一法則 ($\Delta U = Q + W$) は $\frac{3}{2}nRdT = -pdV$ と書ける。この微分方程式を解き、ポアソンの法則 $VT^{\frac{3}{2}} = \text{一定}$ を導出せよ。($pV = nRT$ を用いて良い)

【解答】

➤ 全微分可能性の判定問題

チャート P.221 基本例題 107

\mathbb{R}^2 で定義された

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + y^4}{x^2 - xy + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

の原点(0, 0)における全微分可能性を調べよ。

$$(h, k) \neq (0, 0) \text{ のとき、} f(0+h, 0+k) = \frac{2h^3 + k^4}{h^2 - hk + k^2}$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$y = 0 \text{ のとき、} f(x, 0) = 2x \text{ から、} f_x(0, 0) = 2x$$

$$x = 0 \text{ のとき、} f(0, y) = y^2 \text{ から、} f_y(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \frac{\frac{2h^3 + k^4}{h^2 - hk + k^2} - 0 - 2h - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{2h^2k - 2hk^2 + k^4}{(h^2 - hk + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $k = mh$ に沿って、原点 $O(0, 0)$ に近づくものとする、

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \frac{2h^2(mh) - 2h(mh)^2 + (mh)^4}{(h^2 - h(mh) + (mh)^2)\sqrt{h^2 + (mh)^2}} \\ &= \frac{2m - 2m^2 + m^4h}{(1 - m + m^2)\sqrt{1 + m^2}} \end{aligned}$$

となるが、 $m = 0$ のときは、0となるのが、 $m = -1$ のときは、 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ となり、収束しない。

よって全微分可能ではない。

➤ 全微分を求める問題

教科書 P.123 問 14 (演習に出題)

以下の関数の全微分を求めなさい。

(1) $z = x \cos y$

$$z_x = \cos y, \quad z_y = -x \sin y$$

となるので

$$\underline{dz = \cos y \cdot dx - x \sin y \cdot dy}$$

(2) $z = \log(x^2 + y^2)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

となるので

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

(3) $z = e^{xy}$

$$z_x = ye^{xy}, \quad z_y = xe^{xy}$$

となるので

$$dz = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$$

教科書 P.144 演習問題 4-A 6 (レポートに出題)

(4) $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0)),$

$$f(x, y) = 0 \quad ((x, y) = (0, 0))$$

で定義される関数について以下の問いに答えよ。

(4-1) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ を求めよ。

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

(4-2) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ。

$$\frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

このとき、

$$0 \leq \frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |h| \rightarrow 0 \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

よって、

$$\frac{\varepsilon(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で全微分可能である。

(4-3) $f_x(x, y) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$ を求め $f_x(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。

$$f_x(x, y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2 y (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

であるから、直線 $y = x$ に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とすると、

$f_x(x, y)$ の極限值は存在しない。よって、 $f_x(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続である。

教科書演習 P.131 4.7

以下の関数の全微分を求めなさい。

(5) $z = (x - 2y)^3$

$$z_x = 3(x - 2y)^2, \quad z_y = -6(x - 2y)^2$$

となるので

$$\underline{dz = 3(x - 2y)^2 dx - 6(x - 2y)^2 dy}$$

(6) $z = \sin(x^2 + 2y^2)$

$$z_x = 2x \cos(x^2 + 2y^2), \quad z_y = 4y \cos(x^2 + 2y^2)$$

となるので

$$\underline{dz = 2x \cos(x^2 + 2y^2) \cdot dx + 4y \cos(x^2 + 2y^2) \cdot dy}$$

➤ 接平面と法線を求める問題

教科書 P.127 問 17 (レポートに出題)

以下の関数の与えられた点における接平面および法線の方程式を求めよ。

(1) $z = x^2 - y^2 \quad (1, 1, 0)$

$f(x, y) = x^2 - y^2$ とすると、

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(x, y) = -2y, \quad f_y(1, 1) = -2$$

よって、接平面の方程式は

$$z = 2(x - 1) - 2(y - 1)$$

$$\underline{2x - 2y - z = 0}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-2} = -z}$$

(2) $z = \log(x^2 + y^2) \quad (1, 1, \log 2)$

$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ とすると、

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_x(1, 1) = 1, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad f_y(1, 1) = 1$$

よって、接平面の方程式は

$$z - \log 2 = (x - 1) + (y - 1)$$

$$\underline{x + y - z - 2 + \log 2 = 0}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{x - 1 = y - 1 = -z + \log 2}$$

教科書 P.144 演習問題 4-A 7. (演習に出題)

(3) $z = xy \quad (1, 1, 1)$

$f(x, y) = xy$ とすると、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_x(1, 1) = 1, \quad f_y(x, y) = x, \quad f_y(1, 1) = 1$$

よって、接平面の方程式は

$$z - 1 = (x - 1) + (y - 1)$$

$$\underline{x + y - z - 1 = 0}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{x = y = -z + 2}$$

(4) $z = e^{2x-3y} \quad (0, 0, 1)$

$f(x, y) = e^{2x-3y}$ とすると、

$$f_x(x, y) = 2e^{2x-3y}, \quad f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(x, y) = -3e^{2x-3y}, \quad f_y(1, 1) = -3$$

よって、接平面の方程式は

$$z - 1 = 2x - 3y$$

$$\underline{2x - 3y - z + 1 = 0}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = -z + 1}$$

(5) $z = ax^2 + by^2 \quad (1, 1, a + b)$

$f(x, y) = ax^2 + by^2$ とすると、

$$f_x(x, y) = 2ax, \quad f_x(1, 1) = 2a, \quad f_y(x, y) = 2by, \quad f_y(1, 1) = 2b$$

よって、接平面の方程式は

$$z - a - b = 2a(x - 1) + 2b(y - 1)$$

$$\underline{2ax + 2by - z - a - b = 0}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x-1}{2a} = \frac{y-1}{2b} = -z + a + b}$$

教科書演習 P.132 例題 4.10

(6) $z = x^2 - y^2 \quad (1, 2, -3)$

$f(x, y) = x^2 - y^2$ とすると、

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(x, y) = -2y, \quad f_y(1, 2) = -4$$

よって、接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z + 3 &= 2(x - 1) - 4(y - 2) \\ \underline{2x - 4y - z} &= \underline{-3} \end{aligned}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{-1}}$$

教科書演習 P.132 問題 4.9

(8) $z = xy$ (1, 2, 2)

$f(x, y) = xy$ とすると、

$$f_x(x, y) = y, \quad f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(x, y) = x, \quad f_y(1, 2) = 1$$

よって、接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z - 2 &= 2(x - 1) + (y - 2) \\ \underline{2x + y - z} &= \underline{2} \end{aligned}$$

また、法線の方程式は

$$\underline{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}}$$

(9) $z = \cos(x + y)$ (0, $\frac{\pi}{2}$, 0)

$f(x, y) = \cos(x + y)$ とすると、

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = -\sin(x + y), \quad f_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f_y\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

よって、接平面の方程式は

$$\begin{aligned} z &= -x - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ \underline{x + y + z} &= \underline{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

また、法線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{x}{-1} &= \frac{y - \frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{z}{-1} \\ \underline{x = y - \frac{\pi}{2} = z} \end{aligned}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.180 実践問題 22

(10) $z = f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ について

(10-1) 点 $A_0(1, 2, \log 6)$ における全微分を求めよ。

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(1, 2) = \frac{1}{3}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_y(1, 2) = \frac{2}{3}$$

よって、全微分は、 $\Delta z = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$

(10-2) 点 $A_0(1, 2, \log 6)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。

接平面の方程式は

$$z - \log 6 = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 2)$$

$$\underline{x + 2y - 3z = 5 - 3\log 6}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.180 実践問題 22

(11) $z = f(x, y) = \cos(x + y)$ について

(11-1) 点 $A_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$ における全微分を求めよ。

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = -\sin(x + y), \quad f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

よって、全微分は、 $\Delta z = -dx - dy$

(11-2) 点 $A_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。

接平面の方程式は

$$z - 0 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\underline{2x + 2y + 2z = \pi}$$

チャート P.223 基本例題 110

(12) $f(x, y) = e^{xy}$ について点 $(1, 1, e)$ における $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ。

$$f_x(x, y) = ye^{xy}, \quad f_x(1, 1) = e, \quad f_y(x, y) = xe^{xy}, \quad f_y(1, 1) = e$$

よって、接平面の方程式は

$$z - e = e(x - 1) + e(y - 1)$$

$$\underline{ex + ey - z = e}$$

➤ **完全微分方程式の問題**

キャンパス・ゼミ演習 常微分方程式 P.35 演習問題 15

次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $(2x + y)dx + (x + 3y^2)dy = 0$

$$P(x, y) = 2x + y, \quad Q(x, y) = x + 3y^2 \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = 1, \quad Q_x(x, y) = 1 \text{ なので、 } P_x(x, y) = Q_y(x, y) \text{ が成り立つ。}$$

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x + y) dx + \int_0^y (0 + 3y^2) dx = C$$

$$[x^2 + xy]_0^x + [y^3]_0^y = C$$

$$\underline{x^2 + xy + y^3 = C} \quad (C \text{は任意定数})$$

(別解) 一般解は、

$$\int_0^x (2x + 0) dx + \int_0^y (x + 3y^2) dx = C$$

$$[x^2]_0^x + [xy + y^3]_0^y = C$$

$$\underline{x^2 + xy + y^3 = C} \quad (C \text{は任意定数})$$

キャンパス・ゼミ演習 常微分方程式 P.36 演習問題 16

(2) $(-2x + \sin y)dx + x \cos y dy = 0$

$P(x, y) = -2x + \sin y$, $Q(x, y) = x \cos y$ とおくと、

$P_y(x, y) = \cos y$, $Q_x(x, y) = \cos y$ なので、 $P_x(x, y) = Q_y(x, y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (-2x + \sin y) dx + \int_0^y (0 \cdot \cos y) dx = C$$

$$[-x^2 + x \sin y]_0^x = C$$

$$\underline{-x^2 + x \sin y = C} \quad (C \text{は任意定数})$$

キャンパス・ゼミ演習 常微分方程式 P.37 演習問題 17 (レポートに出題)

(3) $(2x + \tan y)dx + (x + 1) \sec^2 y dy = 0$

$P(x, y) = 2x + \tan y$, $Q(x, y) = (x + 1) \sec^2 y$ とおくと、

$P_y(x, y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, $Q_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ なので、 $P_x(x, y) = Q_y(x, y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x + \tan y) dx + \int_0^y ((0 + 1) \sec^2 y) dx = C$$

$$[x^2 + x \tan y]_0^x + [\tan y]_0^y = C$$

$$x^2 + x \tan y + \tan y = C$$

$$\underline{x^2 + (x + 1) \tan y = C} \quad (C \text{は任意定数})$$

前年度 レポート問題

$$(4) \quad (x^2 + y)dx + (x - e^y)dy = 0$$

$$P(x, y) = x^2 + y, \quad Q(x, y) = x - e^y \text{ とおくと、}$$

$$P_y(x, y) = 1, \quad Q_x(x, y) = 1 \text{ なので、} P_x(x, y) = Q_y(x, y) \text{ が成り立つ。}$$

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (x^2 + y)dx + \int_0^y (0 - e^y)dy = C'$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_0^x + [-e^y]_0^y = C'$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - e^y + 1 = C'$$

$$\underline{x^3 + 3xy - 3e^y = C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

➤ 物理数学としての問題(レポートに出題)

(3) van der Waals の状態方程式

$$p(T, V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \text{ の全微分 } dp \text{ を求め、}$$

$$dp = 0 \text{ のとき、} \frac{dT}{dV} \left(= \frac{\partial T(V, p)}{\partial V} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \right) \text{ を求めよ。}$$

$$p_T(T, V) = \frac{nR}{V - nb}, \quad p_V(T, V) = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + 2\frac{an^2}{V^3}$$

となるので

$$\underline{dp = \frac{nR}{V - nb} dT + \left(-\frac{nRT}{(V - nb)^2} + 2\frac{an^2}{V^3} \right) dV}$$

また、 $dp = 0$ のとき、

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\frac{nRT}{(V - nb)^2} - 2\frac{an^2}{V^3}}{\frac{nR}{V - nb}} = \frac{T}{V - nb} - 2\frac{an}{R} \frac{V - nb}{V^3}$$

(4) 断熱変化に対する熱力学第一法則 ($\Delta U = Q + W$) は $\frac{3}{2}nRdT = -pdV$ と書ける。この

微分方程式を解き、ポアソンの法則 $VT^{\frac{3}{2}} = \text{一定}$ を導出せよ。($pV = nRT$ を用いて良

い)

与式を整理すると

$$pdV + \frac{3}{2}nRdT = 0$$

$$\frac{nRT}{V}dV + \frac{3}{2}nRdT = 0$$

$$\frac{1}{V}dV + \frac{3}{2T}dT = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{3}{2T}\right) = 0$$

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x \left(\frac{1}{V}\right) dx + \int_0^y \left(\frac{3}{2T}\right) dx = C'$$

$$\log V + \frac{3}{2}\log V = C'$$

$$\underline{VT^{\frac{3}{2}} = C} \quad (C \text{は任意定数})$$