第１回　多変数関数の微分（1）

今回のポイント

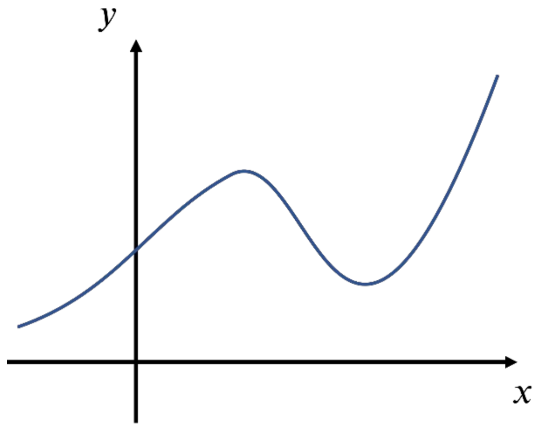
1. １変数関数から２変数関数へ
2. 2変数関数の極限
3. 偏微分

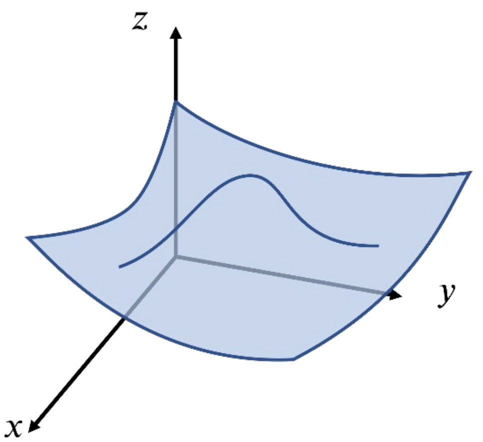
第４章　偏微分法

4.1　2変数関数と極限（$\boxed{\text{教}}$P.106～）

➢ __1変数関数から2変数関数へ__

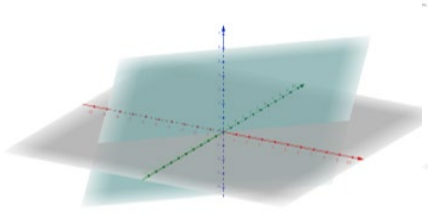
	$y = f(x)$	$z = f(x, y)$	
独立変数	x	x, y	→ 定義域
従属変数	y	z	→ 値域

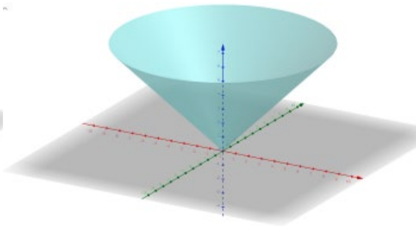


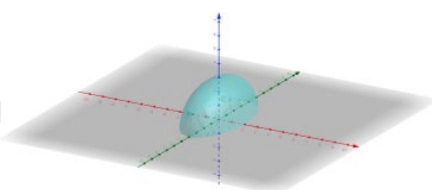


問2

(1)　$z = x - y$　　(2)　$z = \sqrt{x^2 + y^2}$　　(3)　$z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$







GeoGebra 空間図形より

極限

$(x,y) \to (a,b)$ となるとき、$f(x,y)$ が定数c に限りなく近づくとき、$f(x,y)$の極限値はc であるといい、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$$

と書く。

１変数関数の場合と同じく線形性、積、商についての基本性質が成り立つ。

定理 1 極限の基本性質

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = m \quad \text{とすると}$$

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) \pm g(x,y)\} = l + m, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} kf(x,y) = kl$

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,g(x,y) = lm$

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m}$

また、はさみうちの定理も成り立つ

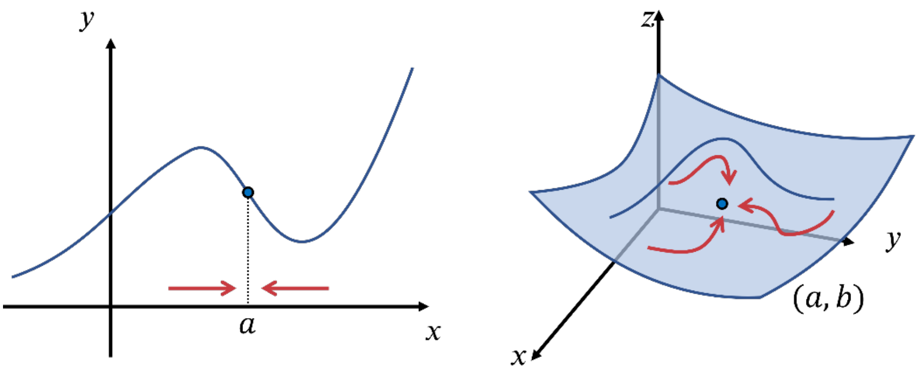
定理 2 挟み撃ちの定理

$$f(x,y) \le h(x,y) \le g(x,y), \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l$$

ならば、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = l$$

である。



１変数関数の場合には右からの極限と左からの極限があったが、2変数関数の場合には近づき方が無数にある。そのため、どのような近づき方をしてもその値に近づくことを示す。問題の多くは

$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$を求める形である。解法は大きく以下の 3 通り。

(i) $y = mx$を使う

$y = mx$を代入して$x \to 0$とした極限がmによらず一定値に近づくことを示す。

(ii) 極座標を使う

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入して$r \to 0$とした極限がθによらず一定値に近づくことを示す。

(iii) 極座標を使った上で挟み撃ちの定理

三角関数の絶対値が 1 以下であることを利用して挟み撃ちの定理を用いる。

例題 1

$$(\mathbf{0.1})\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

(i) 点 P(x, y)が直線$y = mx$に沿って、原点$O(0,0)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - (mx)^3}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(1 - m^2\right)x^3}{(1 + m^2)x^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(1 - m^2\right)}{(1 + m^2)} x = 0$$

となり、傾きm によらず 0 に近づく。

$$\therefore \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (収束)$$

(ii) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3 - (r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\theta - \sin^3\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}$$
$$= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\theta - \sin^3\theta\right) = 0$$

となり、θ の値にかかわらず収束する。

$$(\mathbf{0.2})\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(i) 点 P(x, y)が直線$y = mx$に沿って、原点$O\left(0,0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot mx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m}{1 + m^2}$$

となり、傾きm の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

(ii) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\sin\theta$$

となり、θ の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(iii) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とし、$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$ とおくと、($(x,y)\to 0$ は $r\to 0$)

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}= r\cos\theta\sin\theta$$

となり、

$$0\le |f(x,y)|=|r\cos\theta\sin\theta|\le r$$

である。$r\to 0$ とすれば、はさみうちの定理より $f(x,y)\to 0$ となる。

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(i) 点 P(x,y) が直線 $y=m\sqrt{x}$ に沿って、原点 $O\left(0,0\right)$ に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot m^2x}{x^2+m^4x^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m^2x^2}{(1+m^4)x^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m^2}{1+m^4}$$

となり、傾き m の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

(この問題では x の次数が揃うように代入する直線を調整した)

教科書 P.111 $\boxed{\text{問 4}}$ をやってみよう。

➢ 関数の連続性

> 関数$f(x,y)$ が(a,b) の近傍で定義され、
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$
> のとき、この関数は(a,b) で連続であるという。

「連続性を調べよ」 → 「その点での値と極限値を比較して一致するかを確かめる」

例題 2

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left((x,y) \neq (0,0)\right), \quad f(0,0) = 0$

例題 1 (1) より$(0,0)$での極限値は 0、また$f(0,0)=0$であるから、$f(x,y)$は$(0,0)$で連続である。

(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad \left((x,y) \neq (0,0)\right), \quad f(0,0) = 0$

例題 1 (0.2) より$(0,0)$での極限値は存在しない。よって、
$f(x,y)$は$(0,0)$で不連続である。

問 4

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$0 \leq \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

右辺に対して$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ とおくと、($(x,y)\to 0$ は$r\to 0$)

$$\left(\text{右辺}\right) = |r\cos\theta\sin\theta| \to 0$$

よって、求める極限値は $\underline{0}$.

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

点 P(x,y)が直線$x = my^2$に沿って、原点$O\left(0,0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{my^5}{m^2y^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{my}{m^2+1} = \underline{0}$$

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおくと、($(x, y) \to 0$ は$r \to 0$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) = \underline{0}$$

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log\left(x^2 + y^2\right)$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおくと、($(x, y) \to 0$ は$r \to 0$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log\left(x^2 + y^2\right) = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\log\left(r^2\right) = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot \lim_{r\to 0} r^2\log\left(r^2\right)$$

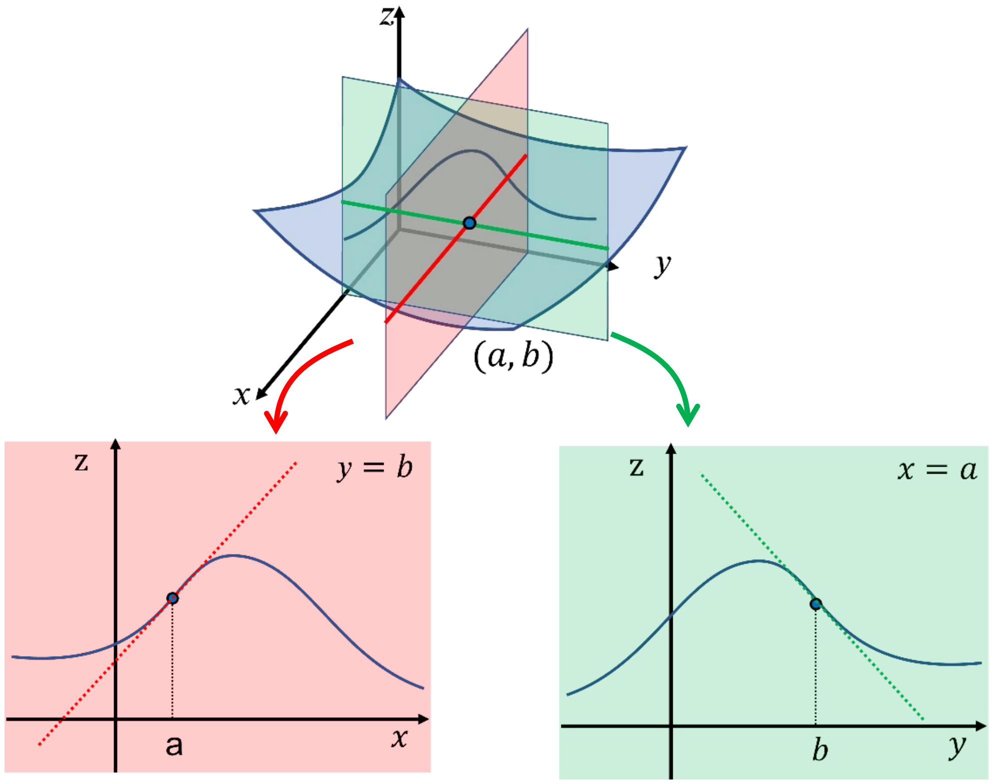
$r^2 = s$ とおくと

$$\lim_{r\to 0} r^2\log\left(r^2\right) = \lim_{s\to 0} \frac{\log s}{\left(\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{\left(\frac{1}{s}\right)}{\left(-\frac{1}{s^2}\right)} = \lim_{s\to 0}(-s) = 0$$

よって、求める極限値は$\underline{0}$

4.2　偏導関数（教 P.114～）

➢ **偏微分可能性と偏導関数**



偏微分係数の定義

$$f_x(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$f_y(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

収束すれば(a,b)で x (y) について偏微分可能であるという

偏導関数の定義

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

(x,y)で偏微分可能なときx (y) について偏微分可能であるといい、
各店における偏微分係数を示す関数を$f(x,y)$の偏導関数という。
偏導関数を求めることを偏微分するという。

例題 8

$f(x,y)=e^{2x}\sin y$

(i) 偏微分係数の定義 より

$$f_x\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{f\left(x,\frac{\pi}{2}\right)-f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{e^{2x}-e^2}{x-1}=\lim_{x\to1}e^2\frac{e^{2(x-1)}-1}{x-1}$$

$e^{2(x-1)}-1=u$ とおくと、$x\to1$ のとき $u\to0$ で、

$$e^{2(x-1)}=u+1$$

$$2(x-1)=\log(u+1)$$

$$=\lim_{u\to0}2e^2\underbrace{\frac{u}{\log(u+1)}}_{\to1}=\underline{2e^2}$$

(ii) 導関数の定義 より

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{e^{2(x+h)}\sin y-e^{2x}\sin y}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}e^{2x}\sin y\underbrace{\frac{e^{2h}-1}{h}}_{\to2}=2\,e^{2x}\sin y$$

$$\therefore\ f_x\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\underline{2e^2}$$

(iii) 導関数の計算 より

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x}\sin y\right)=2e^{2x}\sin y$$

$$\therefore\ f_x\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\underline{2e^2}$$

$$f_y(x,y)=2e^{2x}\cos y$$

$$\therefore\ f_y\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\underline{0}$$

偏微分の計算における公式（スカラー倍、線形性、積、商、合成関数）

$f(x,y)$ および $g(x,y)$ が共に偏微分可能なとき

1. （スカラー倍）　$(kf)_{x(y)} = k \cdot f_{x(y)}$
2. （線形性）　$(f \pm g)_{x(y)} = f_{x(y)} \pm g_{x(y)}$
3. （積）　$(f \cdot g)_{x(y)} = f_{x(y)} \cdot g + f \cdot g_{x(y)}$
4. （商）

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{x(y)} = \frac{f_{x(y)} \cdot g - f \cdot g_{x(y)}}{g^2}$$

5. （合成関数）

$z = f(x,y)$ が偏微分可能な関数$u = l(x,y)$ と微分可能な関数$z = g(u)$ の合成関数、

$$z = f(x,y) = g(u) = g\big(l(x,y)\big)$$

と表されるとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

これらを駆使して偏微分を解いてみよう

例

(1) $f(x,y) = x^2 y \cdot \tan^{-1} x$ の$f_x(x,y)$ を求めよ。

$$f_x(x,y) = \left(x^2 y\right)_x \cdot \tan^{-1} x + x^2 y \cdot \left(\tan^{-1} x\right)_x$$
$$= 2x \cdot y \cdot \tan^{-1} x + x^2 y \cdot \frac{1}{1+x^2} = \underline{xy\left(2\tan^{-1} x + \frac{x^2}{1+x^2}\right)}$$

(2) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+xy}$ の$f_y(x,y)$ を求めよ。

$$f_x(x,y) = \frac{(1-xy)_y \cdot (1+xy) - (1-xy) \cdot (1+xy)_y}{(1+xy)^2}$$
$$= \frac{-x \cdot (1+xy) - (1-xy) \cdot x}{(1+xy)^2} = \underline{\frac{-2x}{(1+xy)^2}}$$

(3) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{e^x + e^y}$ の$f_x(x,y)$ を求めよ。

$$f_x(x,y) = \frac{(e^{xy})_x \cdot (e^x + e^y) - e^{xy} \cdot (e^x + e^y)_x}{(e^x + e^y)^2}$$
$$= \frac{y \cdot e^{xy}(e^x + e^y) - e^{xy} e^x}{(e^x + e^y)^2} = \underline{\frac{e^{xy}\{(y-1)e^y + ye^y\}}{(e^x + e^y)^2}}$$

➢ 高次偏導関数

2 次偏導関数

$f(x, y) \xrightarrow[x\text{ で偏微分}]{} f_x(x, y),\ f_x\ \dfrac{\partial}{\partial x} f(a, b)$

もう一度 x で偏微分 → $f_{xx}(x, y),\ f_{xx}\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b)$

y で偏微分 → $f_{xy}(x, y),\ f_{xy}\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f(a, b)\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a, b)$

$\overrightarrow{xy}$　$\overrightarrow{xy}$　$\overleftarrow{yx}$

関数に近い側を先に偏微分する

- $(n-1)$次偏導関数がすべて偏微分可能 $\rightarrow f(x, y)$ は n 回微分可能
- n 次以下の偏導関数がすべて連続 $\rightarrow$ $f(x, y)$ は C^n 級である。
- 関数 $f(x, y)$ について演算子 Δ をラプラシアンと呼ぶ。

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$\Delta f = 0$ となる C^n 級関数 $f(x, y)$ を調和関数という。

例題 10

$f(x, y) = (2x + 3y)\sin y$ の2次導関数を求めよう。

$f_x = 2\sin y,$　　　$f_y = 3\sin y + (2x + 3y)\cos y$

より

$f_{xx} = 0,$　$f_{xy} = 2\cos y$　　$f_{yx} = 2\cos y,$　$f_{yy} = 6\cos y - (2x + 3y)\sin y$

シュワルツの定理

f_{xy} と f_{yx} が連続であるならば

$$f_{xy} = f_{yx}$$

教科書 P.115 問 7 をやってシュワルツの定理を確かめてみよう。

また、問 8 では調和関数となる関数を探す練習なので、やってみよう。

- **偏微分の順序変更**

シュワルツの定理より関数$f(x,y)$が点(a,b) において連続であるならば、

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

なので、偏微分の順番を入れ替えることができる。

例えば、$f(x,y)$が 3 回微分可能であれば、

$$f_{yxx}=f_{xyx}=f_{xxy},\qquad f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx},$$

などが成り立つ。

また、このような高次偏導関数のうち、x,y を両方含むようなものを混合偏導関数といい、関数$f(x,y)$ がC^n 級であれば偏微分の順序は自由に変更してよい。

【問題集】

➢ 極限値を求める問題

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(5) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{2x^3+y^3}$

(6) $\displaystyle f(x,y)=\frac{x^3+(y+4)x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$ の $(x,y)\to(0,0)$における極限値を求めなさい。

(7) $\displaystyle f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は $(x,y)\to(0,0)$ において極限値を持たないことを示せ。

➢ 偏微分する問題

(1) $z=x^3+y^3-3axy$

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $z=e^{ax}\cos by$

(4) $z=\log\left(x^2+y^2\right)$

(5) $z=x^y$

(6) $z=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(7) $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$

(8) $z=\ z=\sin^{-1}xy$

(9) $z = e^{xy}\tan^{-1} y$

(10) $z = xy\log(2x+y)$

(11) $z = x^2y^4 - xy + 2y^2$

(12) $z = e^{x^2+y^2}$

(13) $z = \sin\left(x^2+y^2\right)$

(14) $z = e^{xy}\tan^{-1} y$

(15) $f(x,y) = \dfrac{\sin^{-1} y}{x^2+1}$ について $f_x\left(1,\dfrac{1}{2}\right), f_y\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(16) $g(x,y) = \sqrt{x^2+1}\cdot\tan^{-1} y$ について $g_x(1,1), g_y(1,1)$ を求めよ。

(17) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 + 4y^4$

(18) $f(x,y) = \tan(x-y)$

(19) $f(x,y) = \dfrac{e^{2x+3y}}{x^2+y^2}$

➢ 高次偏微分する問題、シュワルツの定理の確認の問題

次の二次偏導関数を求め、$z_{xy} = z_{yx}$が成り立つことを確かめよ。

(1) $z = xy(2x+3y)$

(2) $z = e^{xy}$

(3) $z = \cos(x-2y)$

(4) $z = \log(e^x + e^y)$

(5) $z = \sin^{-1} xy$

(6) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(7) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 + 4y^4$

(8) $f(x,y) = \tan(x-y)$

(9) $f(x,y) = \cosh xy$ について2階の偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよ。

- **調和関数に関する問題**

次の関数について$z_{xx}+z_{yy}=0$ が成り立つことを示せ。

(1) $z=\log\left(x^2+y^2\right)$

(2) $z=e^x\cos y$

(3) $z=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

次の関数について調和関数かどうか確かめよ。

(4) $z=xy\left(x^2-y^2\right)$

(5) $z=e^x(\sin y+\cos y)$

(6) $z=\tan^{-1}xy$

(7) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(8) $z=\log\sqrt{x^2+y^2}$

(9) $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

- **物理数学としての問題**

van der Waals の状態方程式

$$p(T,V)=\frac{nRT}{V-nb}-a\left(\frac{n}{V}\right)^2\ \left(n,R,a,b\text{は定数}\right)$$

の変数(T,V) に関する 1 次 2 次偏導関数を求め、調和関数かどうか調べよ。

【解答】

- **極限値を求める問題**

教科書 P.144 演習問題 4-A 1.

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

点 P(x, y)が直線$y = mx$に沿って、原点$O\left(0, 0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(1-m^2\right)x^2}{(1+m^2)x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

となり、m の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

点 P(x, y)が直線$x = my^2$に沿って、原点$O\left(0, 0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m^2y^6}{m^2y^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m^2y^2}{m^2+1} = \underline{0}$$

教科書演習 P.123 4.1

(3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、($(x, y) \to 0$ は$r \to 0$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cdot \sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\sin^3\theta = \underline{0}$$

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ (レポートに出題)

点 P(x, y)が直線$y = mx^2$に沿って、原点$O\left(0, 0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{my^4}{x^4+m^2x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m}{m^2+1}$$

となり、m の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

チャート P.197 基本例題

(5) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{2x^3+y^3}$

点 P(x,y)が直線$y=mx$に沿って、原点$O\left(0,0\right)$に近づくものとすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{2x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2(mx)^3}{2x^3+(mx)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+m^3}{2+m^3}$$

となり、m の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

(6) $\displaystyle f(x,y)=\frac{x^3+(y+4)x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$ の $(x,y)\to(0,0)$における極限値を求めなさい。

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、($(x,y)\to 0$ は$r\to 0$)

$$f(x,y)=\frac{x^3+(y+4)x^2+2y^2}{2x^2+y^2}=\frac{r^2\left\{r\cos^3\theta+r\cos^2\theta\sin\theta+4\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right\}}{r^2\left\{2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right\}}$$

$$=\frac{r\cos^2\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)+2\left(2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{r\cos^2\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos^2\theta}+2$$

となる。ここで、

$$0\le |f(x,y)-2| = r\left|\frac{\cos^2\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos^2\theta}\right|$$

であるが、

$$0\le\left|\cos^2\theta\right|\le 1$$

$$|\cos\theta+\sin\theta| = \left|\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$$

$$0\le\left|\frac{1}{1+\cos^2\theta}\right|\le 1$$

なので、

$$0\le\left|\frac{\cos^2\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos^2\theta}\right|\le\sqrt{2}$$

よって

$$0\le |f(x,y)-2| = \sqrt{2}r$$

$r\to 0$ で$\left(\text{右辺}\right)\to 0$となり、はさみうちの定理より$|f(x,y)-2|\to 0$ となるので、

$$\underline{f(x,y)\to 2}$$

(7) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **は** $(x,y)\to(0,0)$ **において極限値を持たないことを示せ。**

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、($(x,y)\to 0$ は$r\to 0$)

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{r^2\{\cos^2\theta-\sin^2\theta\}}{r^2\{\cos^2\theta+\sin^2\theta\}}=\cos 2\theta$$

となり、θ の値によって変化する。よって、極限は存在しない。

- **偏微分する問題**

教科書 P.115 問 6（演習に出題）

(1) $z=x^3+y^3-3axy$

$$z_x=3x^2-3ay \qquad z_y=3y^2-3ax$$

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$z_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(3) $z=e^{ax}\cos by$

$$z_x=ae^{ax}\cos by \qquad z_y=-be^{ax}\sin by$$

(4) $z=\log(x^2+y^2)$

$$z_x=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad z_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

(5) $z=x^y$

$$z_x=yx^{(y-1)} \qquad z_y=x^y\log x$$

(6) $z=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$z_x=\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{|y|}}=\frac{|y|}{y\sqrt{y^2-x^2}} \qquad z_y=\frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}=\frac{-x|y|}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}$$

教科書 P.144 演習問題 4-A 3.

(7) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$

$$z_x = 2x\cos\left(x^2+y^2\right) \qquad z_y = 2y\cos\left(x^2+y^2\right)$$

(8) $z = \ z = \sin^{-1} xy$

$$z_x = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}} = \qquad z_y = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$

(9) $z = e^{xy}\tan^{-1} y$

$$z_x = ye^{xy}\tan^{-1} y \qquad z_y = xe^{xy}\tan^{-1} y + e^{xy}\frac{1}{1+y^2}$$

(10) $z = xy\log(2x+y)$

$$z_x = y\log(2x+y) + \frac{2xy}{2x+y} \qquad z_y = x\log(2x+y) + \frac{xy}{2x+y}$$

教科書演習 P.127 4.3

(11) $z = x^2y^4 - xy + 2y^2$

$$z_x = 2xy^4 - y \qquad z_y = 4x^2y^3 - x + 4y$$

(12) $z = e^{x^2+y^2}$

$$z_x = 2xe^{x^2+y^2} \qquad z_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

(13) $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$

$$z_x = 2x\cos\left(x^2+y^2\right) \qquad z_y = 2y\cos\left(x^2+y^2\right)$$

(14) $z = e^{xy}\tan^{-1} y$

$$z_x = ye^{xy}\tan^{-1} y \qquad z_y = xe^{xy}\tan^{-1} y + e^{xy}\frac{1}{1+y^2}$$

キャンパスゼミ P.166 演習問題 20

(15) $f(x,y) = \dfrac{\sin^{-1} y}{x^2+1}$ について $f_x\left(1,\dfrac{1}{2}\right), f_y\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ

$$f_x(x,y) = \frac{-2x\cdot\sin^{-1} y}{(x^2+1)^2}, \qquad f_x\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{-2\cdot 1\cdot\sin^{-1}\frac{1}{2}}{\left(1^2+1\right)^2} = -\frac{\pi}{12}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\qquad f_y\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

キャンパスゼミ P.167 実践問題 20

(16)　$g(x,y)=\sqrt{x^2+1}\cdot\tan^{-1}y$ について $g_x(1,1), g_y(1,1)$ を求めよ。

$$g_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\tan^{-1}y,\qquad g_x(1,1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}\cdot\tan^{-1}(1)=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

$$g_y(x,y)=\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{1+y^2},\qquad g_x(1,1)=\sqrt{1^2+1}\cdot\frac{1}{1+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

チャート P.220 基本例題

(17)　$f(x,y)=x^4-3x^2y^2-2xy^3+4y^4$

$$f_x(x,y)=4x^3-6xy^2-2y^3,\qquad f_y(x,y)=-6x^2y-6xy^2+16y^3$$

(18)　$f(x,y)=\tan(x-y)$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{\cos^2(x-y)},\qquad f_y(x,y)=-\frac{1}{\cos^2(x-y)}$$

(19)　$f(x,y)=\dfrac{e^{2x+3y}}{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y)=\frac{2(x^2+y^2-x)}{(x^2+y^2)^2}e^{2x+3y},\qquad f_y(x,y)=\frac{3x^2+3y^2-2x}{(x^2+y^2)^2}e^{2x+3y}$$

➢ **高次偏微分する問題、シュワルツの定理の確認の問題**

教科書 P.116 問 7（演習に出題）

次の二次偏導関数を求め、$z_{xy}=z_{yx}$が成り立つことを確かめよ。

(1)　$z=xy(2x+3y)$

$$z_x=4xy+3y^2,\qquad z_{xx}=4y\qquad z_{xy}=4x+6y$$

$$z_y=2x^2+6xy,\qquad z_{yx}=4x+6y\qquad z_{yy}=6x\qquad \therefore z_{xy}=z_{yx}$$

(2)　$z=e^{xy}$

$$z_x=ye^{xy},\qquad z_{xx}=y^2e^{xy}\qquad z_{xy}=(1+xy)e^{xy}$$

$z_y = xe^{xy}$,　　$z_{yx} = (1+xy)e^{xy}$　$z_{yy} = x^2e^{xy}$　　$\therefore z_{xy} = z_{yx}$

(3)　$z = \cos(x-2y)$

$z_x = -\sin(x-2y)$,　$z_{xx} = -\cos(x-2y)$　$z_{xy} = 2\cos(x-2y)$

$z_y = 2\sin(x-2y)$,　$z_{yx} = 2\cos(x-2y)$　$z_{yy} = -4\cos(x-2y)$　$\therefore z_{xy} = z_{yx}$

(4)　$z = \log(e^x + e^y)$

$$z_x = \frac{e^x}{e^x+e^y},\quad z_{xx} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\quad z_{xy} = \frac{-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

$$z_y = \frac{e^y}{e^x+e^y},\quad z_{yx} = \frac{-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\quad z_{yy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\qquad \therefore z_{xy} = z_{yx}$$

(5)　$z = \sin^{-1} xy$

$$z_x = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} = y\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$z_{xx} = -\frac{1}{2}y\cdot\left(-2xy^2\right)\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = xy^3\cdot\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_{xy} = \left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y\cdot\left(-2x^2y\right)\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} = x\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad z_{yx} = \left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}},\quad z_{xy} = x^3y\cdot\left(1-x^2y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$\therefore z_{xy} = z_{yx}$

教科書演習 P.128 4.5

(6)　$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ **の二次偏導関数を求め、$z_{xy} = z_{yx}$が成り立つことを確かめよ。**

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -x\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$z_{xx} = -\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x^2\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(-1+y^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_{xy} = \frac{1}{2}x\cdot(-2y)\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}} = -xy\cdot\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_y = -y\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$z_{yx} = -xy \cdot \left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad z_{yy} = \left(-1 + x^2\right)\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad \therefore z_{xy} = z_{yx}$$

チャート P.228 基本例題

(7) $\boldsymbol{f(x, y) = x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 + 4y^4}$

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 6xy^2 - 2y^3, \quad f_y(x, y) = -6x^2y - 6xy^2 + 16y^3$$

なので、

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 6y^2, \quad f_{xy}(x, y) = -12xy - 6y^2$$
$$f_{yx}(x, y) = -12xy - 6y^2, \quad f_{yy}(x, y) = -6x^2 - 12xy + 48y^2$$

(8) $\boldsymbol{f(x, y) = \tan(x - y)}$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2(x - y)}, \quad f_y(x, y) = -\frac{1}{\cos^2(x - y)}$$

なので、

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2\sin(x - y)}{\cos^2(x - y)}, \quad f_{xy}(x, y) = -\frac{2\sin(x - y)}{\cos^2(x - y)}$$
$$f_{yx}(x, y) = -\frac{2\sin(x - y)}{\cos^2(x - y)}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{2\sin(x - y)}{\cos^2(x - y)}$$

キャンパスゼミ P.173 実践問題 21

(9) $\boldsymbol{f(x, y) = \cosh xy}$ **について2階の偏導関数** $\boldsymbol{f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}}$ **を求めよ**

$$f_x = y \cdot \sinh xy,$$
$$f_{xx} = y^2 \cosh xy, \quad f_{xy} = \sinh xy + xy \cdot \cosh xy$$

$$f_y = x \cdot \sinh xy,$$
$$f_{yx} = \sinh xy + xy \cdot \cosh xy, \quad f_{xy} = x^2 \cosh xy$$

- **調和関数に関する問題**

教科書 P.116 問 8

次の関数について$z_{xx}+z_{yy}=0$ が成り立つことを示せ。

(1)　$z=\log\left(x^2+y^2\right)$

$$z_x=\frac{2x}{x^2+y^2},\qquad z_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z_y=\frac{2y}{x^2+y^2},\qquad z_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$$

(2)　$z=e^x\cos y$

$$z_x=e^x\cos y,\qquad z_{xx}=e^x\cos y$$
$$z_y=-e^x\sin y,\qquad z_{yy}=-e^x\cos y\qquad\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$$

(3)　$z=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$z_x=\frac{\left(\frac{1}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad z_{xx}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z_y=\frac{-\left(\frac{x}{y^2}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{-x}{x^2+y^2},\qquad z_{yy}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$$

教科書 P.144 演習問題 4-A 4.（レポートに出題）

次の関数について調和関数かどうか確かめよ。

(4)　$z=xy\left(x^2-y^2\right)$

$$z_x=3x^2y-y^3,\qquad z_{xx}=6xy$$
$$z_y=x^3-3xy^2,\qquad z_{yy}=-6xy$$
$\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$ より調和関数である。

(5)　$z=e^x(\sin y+\cos y)$

$$z_x=e^x(\sin y+\cos y),\qquad z_{xx}=e^x(\sin y+\cos y)$$
$$z_y=e^x(\cos y-\sin y),\qquad z_{yy}=e^x(-\sin y-\cos y)$$
$\therefore z_{xx}+z_{yy}=0$ より調和関数である。

(6)　$z=\tan^{-1}xy$

$$z_x = \frac{y}{1+(xy)^2}, \qquad z_{xx} = \frac{-2xy^3}{\{1+(xy)^2\}^2}$$

$$z_y = \frac{x}{1+(xy)^2}, \qquad z_{xx} = \frac{-2x^3y}{\{1+(xy)^2\}^2}$$

$\therefore z_{xx} + z_{yy} \neq 0$ より調和関数ではない。

(7) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$z_x = \frac{y\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{xx} = \frac{2xy\left(x^2-3y^2\right)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_y = \frac{x\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{yy} = \frac{2xy\left(y^2-3x^2\right)}{(x^2+y^2)^3}$$

$\therefore z_{xx} + z_{yy} \neq 0$ より調和関数ではない。

教科書演習 P.128 4.6

次の関数について調和関数かどうか確かめよ。

(8) $z = \log\sqrt{x^2+y^2}$

$$z_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad z_{xx} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z_{yy} = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\therefore z_{xx} + z_{yy} = 0$ より調和関数である。

(9) $z = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$z_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{xx} = \frac{-2y\cdot\left(x^2+y^2\right)^2 + 2xy\cdot 2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y\left(3x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$z_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{yy} = \frac{-2y\cdot\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2-y^2\right)\cdot 2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{2y\left(-3x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^3}$$

$\therefore z_{xx} + z_{yy} = 0$ より調和関数である。

- **物理数学としての問題（レポートに出題）**

van der Waals の状態方程式

$$\boldsymbol{p(T,V)=\frac{nRT}{V-nb}-a\left(\frac{n}{V}\right)^2\left(n,R,a,b\text{は定数}\right)}$$

の変数$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{V})$ に関する 1 次 2 次偏導関数を求め、調和関数かどうか調べよ。（レポートに出題）

$$p_T(T,V)=\frac{nR}{V-nb}\qquad p_{TT}(T,V)=0$$

$$p_V(T,V)=\frac{-nRT}{(V-nb)^2}+\frac{2an^2}{V^3}\quad p_{VV}(T,V)=\frac{2nRT}{(V-nb)^3}-\frac{6an^2}{V^4}\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

$\therefore p_{TT}+p_{VV}\neq 0$ より調和関数ではない。